V. I. ARNOLD

Metodele matematice ale mecanicii clasice



Editura Științifică și Enciclopedică
București 1980

Traducere de Andrei Verona

Coperta de Constantin Gheorghiu-Enescu

В. И. АРНОЛЬД

Математические методы класической механики

Издательство Наука
Москва 1974

CUPRINS

PARTEA A-III-A
MECANICA HAMILTONIANĂ

PREFAȚĂ

În mecanica clasică se utilizează o varietate destul de mare de metode și noțiuni matematice: ecuațiile diferențiale și curenții în spațiile de faze, varietățile și aplicațiile diferențiabile, grupurile și algebrele Lie, geometria simplectică și teoria ergodică. Multe din teoriile matematice contemporane s-au născut din problemele mecanicii și numai ulterior au căpătat acea formă axiomatică și abstractă care le îngreuiază atît de mult studierea.

În această carte, aparatul matematic al mecanicii clasice se construiește chiar de la început, astfel încît cititorului nu i se cer cunoștințe preliminare care să iasă din cadrul cursurilor uzuale de analiză (derivată, integrală, ecuații diferențiale), geometrie (spațiu liniar, vectori) și algebră liniară (operatori liniari, forme pătratice).

Cu ajutorul acestui aparat se analizează toate problemele fundamentale ale dinamicii sistemelor mecanice, inclusiv teoria oscilațiilor, teoria mișcării solidului rigid și formalismul hamiltonian. Autorul s-a străduit peste tot să evidențieze aspectul geometric, calitativ al fenomenelor. Din acest punct de vedere, cartea se apropie mai mult de cursurile de mecanică teoretică destinate fizicienilor teoreticieni decît de cursurile tradiționale de mecanică teoretică expuse matematicienilor.

O parte importantă a cărții este dedicată principiilor variaționale și dinamicii analitice. Caracterizînd dinamica analitică, F. Klein scrie în cartea sa *Lecții despre dezvoltarea matematicii în secolul al XIX-lea*: „din aceste teorii, fizicianul poate extrage pentru problemele sale foarte puțin, iar inginerul — nimic". Dezvoltarea științei în anii care au urmat a infirmat hotărît această remarcă. Formalismul hamiltonian a stat la baza mecanicii cuantice și este în zilele noastre una din armele arsenalului matematic cele mai des utilizate în fizică. După ce a fost recunoscută importanța

structurii simplectice și a principiului lui Huygens pentru toate problemele posibile de optimizare, ecuațiile lui Hamilton au început să fie utilizate constant în cercetările inginerești în acest domeniu. Pe de altă parte, dezvoltarea contemporană a mecanicii cerești, legată de necesitățile cercetărilor cosmice, a dus la o nouă renaștere a interesului pentru metodele și problemele dinamicii analitice.

Legăturile mecanicii clasice cu alte ramuri ale matematicii și fizicii sînt multiple și variate. *Anexele* de la sfîrșitul cărții sînt dedicate unora din aceste legături. În cadrul acestora, se consideră ca aplicații ale aparatului mecanicii clasice, bazele geometriei riemanniene, dinamica fluidului ideal, teoria perturbațiilor mișcărilor cvasiperiodice a lui Kolmogorov, formulele asimptotice pentru lungimi de undă mici pentru ecuațiile fizicii matematice și clasificarea causticilor în optica geometrică.

Aceste anexe sînt destinate cititorului interesat și nu intră în programa obligatorie a cursului general. Unele din ele pot sta la baza alcătuirii unor cursuri speciale (de exemplu, despre metodele asimptotice în teoria oscilațiilor neliniare sau formulele asimptotice cvasiclasice). De asemenea, în anexe sînt incluse și o serie de date cu caracter îndrumător (de exemplu, lista formelor normale ale hamiltonienilor pătratici). În timp ce în capitolele fundamentale ale cărții autorul s-a străduit să expună toate demonstrațiile într-un mod cît mai amănunțit, evitînd trimiterile la alte surse, anexele sînt constituite din enunțuri de rezultate pentru ale căror demonstrații se fac trimiteri la literatura de specialitate.

Baza cărții a constituit-o cursul obligatoriu de mecanică analitică de trei semestre, expus de autor studenților în matematică din anii trei și patru ai Facultății de matematică-mecanică de la Universitatea din Moscova, în perioada 1966–1968.

Autorul îi este recunoscător lui I.G. Petrovski, care a stăruit ca acest curs să fie expus, scris și editat. În pregătirea pentru tipar a lecțiilor, autorul a fost mult ajutat de L.A. Bunimovici, L.D. Vaingortin și V.L. Novikov, care i-au pus la dispoziție notele de curs și, în special, de N.N. Kolesnikov, care a îngrijit ediția litografiată (M.G.U., 1968). Aducem aici mulțumiri atît lor cît și tuturor auditorilor și colegilor care ne-au transmis observații asupra textului litografiat; multe dintre aceste observații au fost utilizate în pregătirea acestei ediții. Autorul îi este recunoscător lui M.A. Leontovici care a propus tratarea legăturilor prin trecere la limită și lui I.I. Vorovici și V.I. Iudovici pentru recenzia atentă a manuscrisului.

V. I. Arnold

Partea I

MECANICA NEWTONIANĂ

Mecanica newtoniană studiază mișcarea sistemelor de puncte materiale în spațiul euclidian tridimensional. În acest spațiu acționează grupul de izometrii ale spațiului care are șase parametri. Noțiunile și teoremele fundamentale ale mecanicii newtoniene (chiar dacă ele se formulează în termeni de coordonate carteziene) sînt invariante în raport cu acest grup*).

Un sistem mecanic newtonian potențial este definit de masele punctelor sale și energia sa potențială. Izometriilor spațiului care invariază energia potențială le corespund legi de conservare.

Ecuațiile lui Newton permit să se studieze complet o serie de probleme importante ale mecanicii, cum ar fi problema mișcării într-un cîmp central.

---

*) Și chiar în raport cu grupul mai mare al transformărilor galileiene ale spațiului — timp.

CAPITOLUL 1

FAPTE EXPERIMENTALE

În capitolul de față sînt descrise faptele experimentale fundamentale care stau la baza mecanicii : principiul relativității al lui Galilei și ecuația diferențială a lui Newton. Se consideră restricțiile impuse ecuațiilor de mișcare de principiul relativității și se dau exemple dintre cele mai simple.

§1. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII ȘI PRINCIPIUL DETERMINISMULUI

În acest paragraf se introduce și se discută noțiunea de sistem de coordonate inerțial. Formularea riguros matematică a afirmațiilor acestui paragraf este dată în paragraful următor.

La baza mecanicii clasice se află o serie de rezultate experimentale*). Să enumerăm cîteva dintre acestea :

A. Spațiul și timpul. Spațiul nostru este tridimensional și euclidian, iar timpul este unidimensional.

B. Principiul relativității al lui Galilei. Există sisteme de coordonate (numite inerțiale), care au următoarele două proprietăți :

1) La orice moment de timp, toate legile naturii sînt aceleași în toate sistemele inerțiale.

2) Toate sistemele de coordonate care se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu un sistem inerțial sînt inerțiale.

---

*) Toate aceste „rezultate experimentale” sînt adevărate numai aproximativ și experiențele mai exacte le infirmă. Pentru a evita exprimările greoaie, nu vom mai menționa în continuare acest lucru și vom vorbi de modelele noastre matematice ca și cum acestea ar descrie exact fenomenele fizice.

Cu alte cuvinte, dacă un sistem de coordonate care este legat de Pămînt este inerţial, atunci un experimentator care se găseşte într-un tren care se mişcă rectiliniu şi uniform în raport cu Pămîntul nu poate descoperi că trenul se mişcă, prin experienţe care se desfăşoară în întregime în interiorul vagonului.

În realitate, un sistem de coordonate legat de Pămînt este numai aproximativ inerţial. Sînt inerţiale, cu o precizie mai mare, sistemele de coordonate legate de Soare, de stele etc.

C. Principiul determinismului al lui Newton. Starea iniţială a unui sistem mecanic (ansamblul poziţiilor şi vitezelor punctelor sistemului la un moment de timp dat) determină univoc întreaga mişcare.

Acest fapt nu ne mai uimeşte deoarece aflăm despre el foarte devreme. Se poate imagina o lume în care pentru determinarea viitorului unui sistem, este necesar ca la momentul iniţial să se cunoască şi acceleraţiile. Experienţa arată că lumea noastră nu este de acest tip.

§2. GRUPUL GALILEIAN ŞI ECUAŢIILE LUI NEWTON

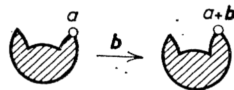
În acest paragraf se defineşte şi se studiază grupul transformărilor galileiene ale spaţiului-timp. În continuare, se consideră ecuaţiile lui Newton şi cele mai simple restricţii impuse membrului lor drept de proprietăţile de invarianţă în raport cu grupul transformărilor lui Galilei*).

A. Notaţii. Se notează cu $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale şi cu $\mathbf{R}^n$ spaţiul liniar real n-dimensional.

Spaţiul afin n-dimensional A^n diferă de $\mathbf{R}^n$ prin faptul că în el „nu este fixată originea coordonatelor". Grupul $\mathbf{R}^n$ acţionează în A^n ca un grup de *transporturi prin paralelism* (translaţii) (fig. 1):

$$a \to a + \mathbf{b} \ (a \in A^n,\ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n,\ a + \mathbf{b} \in A^n).$$

Fig. 1. Transport prin paralelism.



*) Cititorul care nu simte nevoia unei formulări matematice a afirmaţiei lor pe la §1, poate sări peste acest paragraf.

Prin urmare, în A^n nu este definită suma a două puncte; diferenţa este însă definită, fiind un vector din $\mathbf{R}^n$.

O *structură euclidiană* în spaţiul liniar $\mathbf{R}^n$ este definită de o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită, denumită ***produs scalar***. Produsul scalar permite definirea *distanţei*

$$\rho(x,\ y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y,\ x - y)}$$

dintre punctele spaţiului afin corespunzător A^n.

Spaţiul afin cu distanţa astfel introdusă se numeşte *spaţiu euclidian* şi se notează cu E^n.

B. Structura galileiană. Structura spaţio-temporală galileiană cuprinde următoarele trei elemente:

1) *Universul* — spaţiul afin*) de dimensiune patru A^4. Punctele spaţiului afin A^4 se numesc *puncte de univers* sau *evenimente*. Transporturile prin paralelism ale universului A^4 formează spaţiul liniar $\mathbf{R}^4$.

2) *Timpul* — o aplicaţie liniară $t: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ a spaţiului transporturilor prin paralelism pe „axa reală a timpului". Se numeşte *intervalul de timp* dintre evenimentul $a \in A^4$ şi evenimentul $b \in A^4$ numărul $t(b - a)$ (fig. 2).

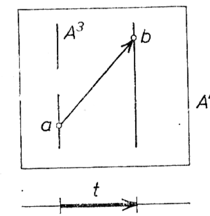


Fig. 2. Interval de timp t.

Dacă $t(b - a) = 0$, se spune că b şi a sînt *simultane*.

*) În antichitate, universul era considerat ca fiind înzestrat nu cu o structură afină, ci cu una liniară (sistemul geocentric + geneza lumii).

Mulţimea evenimentelor simultane între ele este un subspaţiu afin tridimensional al lui A^4 şi se numeşte *spaţiul* A^3 *al evenimentelor simultane*.

Nucleul aplicaţiei t este format din transporturile prin paralelism ale lui A^4 care transformă un eveniment oarecare (şi atunci, oricare eveniment) într-un eveniment simultan cu el. Acest nucleu este un subspaţiu liniar tridimensional $\mathbf{R}^3$ al spaţiului liniar $\mathbf{R}^4$.

Structura galileiană cuprinde încă un element.

3) *Distanţa dintre evenimentele simultane*

$$\rho(a, b) = \|a-b\| = \sqrt{(a-b, a-b)}, \quad a, b \in A^3,$$

dată de un produs scalar în spaţiul $\mathbf{R}^3$. Această distanţă transformă fiecare spaţiu de evenimente simultane într-un spaţiu euclidian tridimensional E^3.

Spaţiul A^4, înzestrat cu structura spaţio-temporală galileiană se numeşte *spaţiu galileian*.

Se poate vorbi despre două evenimente care au loc simultan în locuri diferite, însă afirmaţia „două evenimente a şi b care sînt caracterizate prin momente de timp diferite, au loc în acelaşi punct al spaţiului tridimensional" nu are sens pînă nu se alege un sistem de coordonate.

Se numeşte *grupul lui Galilei* (sau *grupul galileian*) grupul tuturor transformărilor spaţiului galileian, care îi păstrează structura. Elementele acestui grup se numesc *transformări galileiene*. Prin urmare, transformările galileiene sînt transformările afine ale lui A^4, care păstrează intervalele de timp şi distanţele dintre evenimentele simultane.

E x e m p l u. Să considerăm produsul direct*) $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ al axei t cu spaţiul liniar tridimensional $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu o structură euclidiană fixată. Acest spaţiu are o structură galileiană naturală şi îl vom denumi *spaţiul galileian aritmetizat*.

Să dăm trei exemple de transformări galileiene ale acestui spaţiu. În primul rînd, *mişcarea uniformă cu viteza* $\mathbf{v}$

$$g_1(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x}+\mathbf{v}t), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

De asemenea, *schimbarea prin translaţie a originei coordonatelor*

$$g_2(t, \mathbf{x}) = (t+s, \mathbf{x}+\mathbf{y}), \ \forall t \in \mathbf{R}, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

*) Reamintim că produsul direct a două mulţimi A şi B este mulţimea perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$. Produsul direct a două spaţii (liniare, afine, euclidiene) are o structură de spaţiu de acelaşi tip.

În sfîrşit, *rotaţia axelor de coordonate*

$$g_3(t, \mathbf{x}) = (t, G\mathbf{x}), \ \forall t \in \mathbf{R}, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3,$$

unde $G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este o transformare ortogonală.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *orice transformare galileiană a spaţiului* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ *se poate reprezenta ca o compunere a unei rotaţii cu o translaţie şi o mişcare uniformă* $(g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3)$, *reprezentarea fiind unică* (prin urmare, dimensiunea grupului galileian este $3+4+3=10$).

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *toate spaţiile galileiene sînt izomorfe între ele**) *şi în particular sînt izomorfe cu spaţiul numeric* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$.

Fie M o mulţime. O aplicaţie bijectivă $\varphi_1: M \to \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ se numeşte *sistem galileian de coordonate pe mulţimea M*. Un sistem de coordonate galileiene pe mulţimea M, φ_2, *se mişcă uniform* în raport cu sistemul φ_1 dacă aplicaţia $\varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1}: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ este o transformare galileiană. În acest caz, sistemele de coordonate φ_1 şi φ_2 definesc pe M o aceeaşi structură galileiană.

C. Mişcare, viteză, acceleraţie. Se numeşte *mişcare* în $\mathbf{R}^N$ orice aplicaţie diferenţiabilă $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^N$ a unui interval I al dreptei reale în $\mathbf{R}^N$.

Se numeşte *vectorul viteză* (al mişcării $\mathbf{x}$) în punctul $t_0 \in I$ derivata

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t_0+h)-\mathbf{x}(t_0)}{h} \in \mathbf{R}^N.$$

Se numeşte *vectorul acceleraţie* (al mişcării $\mathbf{x}$) în punctul $t_0 \in I$ a doua derivată

$$\ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0}$$

Vom considera în continuare că funcţiile cu care lucrăm sînt continuu diferenţiabile de atîtea ori cît este necesar. În cele ce urmează, dacă nu se subliniază contrariul, aplicaţiile, funcţiile

*) Altfel spus, există o aplicaţie bijectivă a unui spaţiu pe celălalt, aplicaţie care conservă structura galileiană.

etc. vor fi considerate ca aplicații diferențiabile, funcții diferențiabile etc. Imaginea aplicației $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^N$ se numește *traiectorie* sau *curbă* în $\mathbf{R}^N$.

P r o b l e m ă. Este posibil ca traiectoria unei mișcări diferențiabile în plan să aibă aspectul din fig. 3 ? Poate avea vectorul accelerație valoarea indicată în figură ?

Răspunsuri. Da. Nu.

Să definim acum ce înseamnă un *sistem mecanic de n puncte care se mișcă în spațiul euclidian tridimensional.*

Fie $\mathbf{x}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ o mișcare în $\mathbf{R}^3$. Graficul*) acestei aplicații este o curbă în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$.

O curbă în spațiul galileian, care este într-un oarecare sistem galileian de coordonate (și atunci în orice astfel de sistem) graficul unei mișcări, se numește *linie de univers* (fig. 4).

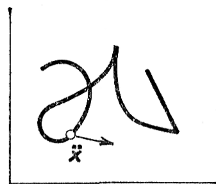


Fig. 3. Traiectorie a mișcării unui punct.

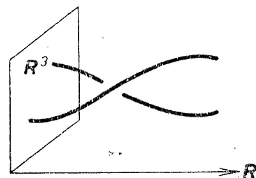


Fig. 4. Linii de univers.

O mișcare a unui sistem de n puncte este dată, în spațiul galileian de coordonate, de n linii de univers. Într-un sistem galileian de coordonate, aceste n linii sînt descrise de n aplicații $\mathbf{x}_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $i = 1, \ldots, n$.

Produsul direct a n exemplare ale spațiului $\mathbf{R}^3$ se numește *spațiul configurațiilor* sistemului de n puncte. Cele n aplicații $\mathbf{x}_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ definesc o unică aplicație

$$\mathbf{x}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N, \quad N = 3n,$$

a axei timpului în spațiul configurațiilor. Această aplicație se numește *mișcare a sistemului de n puncte în sistemul galileian de coordonate* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$.

*) Graficul aplicației $f: A \to B$ este, prin definiție, submulțimea produsului direct $A \times B$ formată din toate perechile de forma $(a, f(a))$, $a \in A$.

D. Ecuația lui Newton. Conform principiului determinismului newtonian (§1, C), orice mișcare a sistemului este univoc determinată de poziția sa inițială ($\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^N$) și de viteza sa inițială ($\dot{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbf{R}^N$).

În particular, *poziția și viteza inițială determină accelerația.* Cu alte cuvinte, există o aplicație $\mathbf{F}: \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ astfel încît

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \tag{1}$$

Newton a pus la baza mecanicii ecuația (1). Ea se numește astăzi *ecuația lui Newton.*

Conform teoremei de existență și unicitate din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, funcția $\mathbf{F}$ și condițiile inițiale $\mathbf{x}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ determină univoc mișcarea*).

Forma funcției $\mathbf{F}$ se determină experimental pentru fiecare sistem mecanic concret. Din punct de vedere matematic, pentru fiecare sistem forma lui $\mathbf{F}$ reprezintă însăși *definiția* sistemului.

E. Restricțiile impuse pe principiul relativității. Principiul relativității al lui Galilei afirmă că în spațiul-timp fizic s-a ales o structură galileiană („clasa sistemelor inerțiale de coordonate"), care are următoarea proprietate:

*Dacă liniile de univers ale tuturor punctelor unui sistem***) *sînt transformate prin aceeași transformare galileiană, atunci se obțin liniile de univers ale aceluiași sistem* (*cu noi condiții inițiale*) (fig. 5).

*) În anumite condiții de diferențiabilitate, pe care le presupunem aici îndeplinite. În general, mișcarea este definită de ecuația (1) numai pe un anumit *interval* al axei timpului. Pentru simplificare, vom considera că acest interval al axei timpului coincide cu întreaga axă, ceea ce se întîmplă în majoritatea cazurilor.

**) În formularea principiului relativității trebuie avut în vedere faptul că el se referă numai la sisteme fizice (în particular, mecanice) închise, deci că trebuie să se includă în sistem toate corpurile a căror interacțiune joacă un rol în studierea fenomenului dat. Riguros vorbind, ar trebui incluse în sistem toate corpurile din Univers. Experiența arată însă că adesea se poate neglija influența marii lor majorități: de exemplu, atunci cînd se studiază mișcarea planetelor în jurul Soarelui se poate neglija atracția celorlalte stele etc.

Pe de altă parte, atunci cînd se studiază mișcarea corpurilor în vecinătatea Pămîntului, sistemul nu este închis dacă nu se include în el și Pămîntul; atunci cînd se studiază mișcarea unui avion, sistemul nu este închis dacă nu se ține seama de acțiunea aerului care înconjură avionul etc. În cele ce urmează, prin „sistem mecanic" se înțelege, în majoritatea cazurilor, un sistem închis. Cînd va fi vorba de sisteme care nu sînt închise, aceasta se va specifica în mod special (vezi, de exemplu, §3).

Această proprietate impune o serie de condiţii membrului drept al ecuaţiei lui Newton, scrisă într-un sistem de coordonate inerţial: ecuaţia (1) trebuie să fie invariantă la grupul transformărilor galileiene.

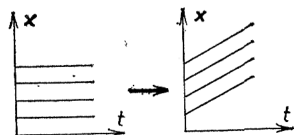


Fig. 5. Principiul relativităţii al lui Galilei.

E x e m p l u l 1. Printre transformările galileiene se află şi translaţiile în timp. Invarianţa în raport cu translaţiile în timp se traduce prin faptul că „legile naturii rămîn constante", deci că atunci cînd $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (1), şi $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t+s)$ este soluţie, pentru orice $s \in \mathbf{R}$.

De aici rezultă că *membrul drept al ecuaţiei* (1) *nu poate depinde, într-un sistem inerţial de coordonate, de timp:*

$$\ddot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

O b s e r v a ţ i e. Ecuaţiile diferenţiale ale căror membru drept depinde de timp apar în următoarele situaţii.

Să presupunem că studiem partea I a sistemului mecanic I + II. Atunci acţiunea părţii II asupra părţii I se poate înlocui uneori prin variaţia în timp a parametrilor sistemului de ecuaţii care descriu mişcarea părţii I.

E x e m p l u. Acţiunea Lunii asupra Pămîntului poate fi neglijată atunci cînd se studiază majoritatea fenomenelor de pe Pămînt. Atunci însă cînd se studiază mareele, această acţiune trebuie luată în considerare, înlocuind atracţia Lunii prin modificarea periodică a forţei de atracţie pe Pămînt.

Ecuaţiile cu coeficienţi variabili pot apărea şi ca rezultat al unor operaţii formale, în rezolvarea problemelor.

E x e m p l u l 2. Printre transformările galileiene se află şi translaţiile în spaţiul tridimensional. Invarianţa în raport cu acest tip de translaţii are ca semnificaţie *omogenitatea* spaţiului — „spaţiul are aceleaşi proprietăţi în toate punctele sale". Altfel spus, dacă $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ este o mişcare care satisface (1) a unui sistem de n puncte, atunci pentru orice $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$, mişcarea $\boldsymbol{\varphi}_i(t) + \mathbf{r}$ $(i = 1, \ldots, n)$ satisface şi ea ecuaţia (1).

De aici rezultă că *membrul drept al ecuaţiei* (1) *nu poate să depindă, într-un sistem inerţial de coordonate, decît de „coordonatele relative"* $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$.

Din invarianţa în raport cu trecerea la un sistem de coordonate în mişcarea uniformă (ceea ce nu modifică pe $\ddot{\mathbf{x}}_i$ şi $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$, dar adaugă la fiecare $\dot{\mathbf{x}}_j$ un vector constant $\mathbf{v}$) rezultă că *membrul drept al ecuaţiei* (1) *nu poate să depindă, într-un sistem inerţial de coordonate, decît de vitezele relative:*

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \ \dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k\}), \quad i, \ j, \ k = 1, \ldots, \ n.$$

E x e m p l u l 3. Printre transformările galileiene se află şi rotaţiile în spaţiul tridimensional. Invarianţa în raport cu aceste rotaţii are ca semnificaţie *izotropia* spaţiului — „nu există direcţii privilegiate".

Mai exact, dacă $\boldsymbol{\varphi}_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ $(i = 1, \ldots, n)$ este o mişcare a unui sistem de n puncte materiale, care satisface (1) şi $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este o transformare ortogonală, atunci şi mişcarea $G\boldsymbol{\varphi}_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ $(i = 1, \ldots, n)$ satisface ecuaţia (1). Altfel spus,

$$\mathbf{F}(G\mathbf{x}, \ G\dot{\mathbf{x}}) = G\mathbf{F}(\mathbf{x}, \ \dot{\mathbf{x}}),$$

unde $G\mathbf{x}$ înseamnă $(G\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ G\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^3$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că dacă *un sistem mecanic este format dintr-un singur punct, atunci acceleraţia sa este egală cu zero într-un sistem inerţial de coordonate* („prima lege a lui Newton").

I n d i c a ţ i e. Conform exemplelor 1 şi 2, vectorul acceleraţie nu depinde de $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ şi t; conform exemplului 3, vectorul $\mathbf{F}$ este invariant la rotaţii.

P r o b l e m ă. Un sistem mecanic este alcătuit din două puncte. La momentul iniţial vitezele lor sînt nule (într-un anumit sistem inerţial de coordonate). Să se demonstreze că punctele se vor mişca pe dreapta care le uneşte.

P r o b l e m ă. Un sistem mecanic este alcătuit din trei puncte materiale. La momentul iniţial vitezele acestor puncte sînt nule (într-un sistem inerţial de coordonate). Să se demonstreze că toate cele trei puncte rămîn în timpul mişcării în acelaşi plan în care se aflau iniţial.

P r o b l e m ă. Un sistem mecanic este alcătuit din două puncte. Demonstraţi că pentru orice condiţii iniţiale există un sistem inerţial de coordonate în care aceste două puncte rămîn tot timpul într-un plan fix.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că mecanica „reflectată în oglindă" coincide cu ea însăşi.

I n d i c a ţ i e. Printre transformările galileiene se află şi transformarea de reflectare, care schimbă orientarea lui $\mathbf{R}^3$.

P r o b l e m ă. Este unică clasa sistemelor inerţiale ?

Răspuns. Se obţin alte clase schimbînd etaloanele de lungime şi timp, cît şi direcţia timpului.

§3. EXEMPLE DE SISTEME MECANICE

Am subliniat că forma funcţiei **F** din ecuaţia lui Newton (1) se determină experimental pentru fiecare sistem mecanic. Să dăm acum cîteva exemple.

Atunci cînd ne ocupăm de probleme concrete, este raţional să nu includem în sistem toate obiectele din Univers. Aşa cum am mai spus, cînd se studiază, spre exemplu, majoritatea fenomenelor de pe Pămînt, se poate neglija influenţa Lunii. De asemenea, de obicei se poate neglija influenţa proceselor studiate asupra mişcării Pămîntului şi, chiar mai mult, se poate considera că un sistem de coordonate legat de Pămînt este „imobil". Se înţelege că principiul relativităţii nu mai impune condiţiile de mai sus ecuaţiilor de mişcare scrise într-un astfel de sistem. De exemplu, în vecinătatea Pămîntului există o direcţie privilegiată — cea verticală.

A. Exemplul 1. Căderea unei pietre pe Pămînt. Experienţa arată că

$$\ddot{x} = -g, \quad g \approx 9{,}8 \text{ m/sec}^2 \text{ (Galilei)}, \tag{2}$$

unde x este înălţimea la care se află piatra deasupra Pămîntului (fig. 6).

Dacă se introduce „energia potenţială" $U = g \cdot x$, ecuaţia (2) se poate scrie sub forma

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Dacă $U : E^N \to \mathbf{R}$ este o funcţie diferenţiabilă în spaţiul euclidian, vom nota gradientul ei cu $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$. Dacă $E^N = E^{n_1} \times \ldots \times E^{n_k}$ este un produs direct de spaţii euclidiene, vom nota cu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ punctul $\mathbf{x} \in E^N$, iar vectorul $\partial U / \partial \mathbf{x}$, cu $(\partial U / \partial \mathbf{x}_1, \ldots, \partial U / \partial \mathbf{x}_k)$.

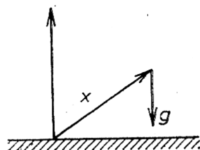


Fig. 6. Căderea unei pietre pe Pămînt.

În particular, dacă $x_1, \ldots, x_N$ sînt coordonatele carteziene în E^N, atunci componentele lui $\partial U / \partial \mathbf{x}$ sînt derivatele parţiale $\partial U / \partial x_1 \ldots$ $\ldots, \partial U / \partial x_N$.

Experienţa arată că raza-vectoare a pietrei în raport cu un punct arbitrar O al Pămîntului satisface ecuaţia

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{unde } U = \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \tag{3}$$

Vectorul din membrul drept este îndreptat spre Pămînt. El se numeşte vectorul acceleraţie al forţei de greutate $\mathbf{g}$.

B. Exemplul 2. Căderea de la mare înălţime. La fel ca şi toate celelalte rezultate experimentale, legea de mişcare (2) are un domeniu de aplicabilitate mărginit.

Conform legii de cădere mai exacte stabilită experimental de Newton, *acceleraţia este invers proporţională cu pătratul distanţei pînă la centrul Pămîntului.*

$$\ddot{x} = -g \frac{r_0^2}{r^2},$$

unde $r = r_0 + x$ (fig. 7).

Şi această ecuaţie se poate pune sub forma (3), introducînd energia potenţială

$$U = -\frac{k}{r}, \quad k = g \cdot r_0^2,$$

invers proporţională cu distanţa pînă la centrul Pămîntului.

P r o b l e m ă. Să se determine viteza cu care trebuie aruncată în sus piatra pentru ca ea să zboare de la suprafaţa Pămîntului la o distanţă infinită*).

Răspuns. $\geqslant 11{,}2$ km/sec.

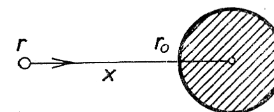


Fig. 7. Cîmpul gravitaţional al Pămîntului.

*) Aceasta este aşa-numita a doua viteză cosmică v_2. Ecuaţia noastră nu ţine seama de atracţia Soarelui. Atracţia Soarelui nu permite ca piatra să părăsească sistemul solar dacă viteza ei în raport cu Pămîntul este mai mică decît 16,6 km/sec.

C. Mişcarea unei greutăţi pe o dreaptă, sub acţiunea unui arc. Experienţa arată că pentru abateri mici ale arcului de la poziţia de echilibru, ecuaţia de mişcare a greutăţii este (fig. 8):

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x.$$

Această ecuaţie se poate pune şi ea sub forma (3), dacă se introduce energia potenţială $U = \frac{\alpha^2 x^2}{2}$. Dacă se pun, în locul unei greutăţi, două greutăţi de acelaşi tip, atunci se dovedeşte că pentru aceeaşi elongaţie a arcului, acceleraţia este de două ori mai mică.

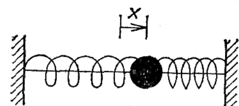


Fig. 8. Greutate pe un arc.

S-a stabilit experimental că pentru orice două corpuri, raportul acceleraţiilor lor $\ddot{x}_1/\ddot{x}_2$ pentru aceeaşi elongaţie a arcului este constant (nu depinde de mărimea elongaţiei arcului şi de proprietăţile acestuia, ci numai de corpuri). Mărimea invers proporţională cu acest raport se numeşte raportul maselor celor două corpuri:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1}.$$

Ca unitate de masă se ia masa unui corp fixat, oarecare, de exemplu 1 litru de apă. Experienţa arată că toate corpurile au masa pozitivă.

Produsul $m\ddot{x}$ al masei corpului cu acceleraţia sa nu depinde de corp, ci este o caracteristică a elongaţiei arcului. Această mărime se numeşte *forţa* cu care arcul acţionează asupra corpului.

Ca unitate de forţă se ia „newtonul". De exemplu, asupra unui litru de apă, atîrnat de un arc la suprafaţa Pămîntului, arcul acţionează cu o forţă de 9,8 newtoni (= 1 kg).

D. Exemplul 4. Sistemul potenţial. Fie $E^{3n} = E^3 \times \ldots \times E^3$ spaţiul configuraţiilor unui sistem de n puncte din spaţiul euclidian tridimensional E^3. Fie $U: E^{3n} \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi $m_1 \ldots, m_n$ numere pozitive.

D e f i n i ţ i e. *Mişcarea a n puncte de mase $m_1, \ldots, m_n$ în cîmpul potenţial cu energia potenţială U este descrisă de sistemul de ecuaţii diferenţiale.*

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Ecuaţiile de mişcare din exemplele 1 —3 sînt de această formă. Sub aceeaşi formă se scriu ecuaţiile de mişcare pentru un număr mare de alte sisteme mecanice.

De exemplu, se numeşte *problema celor trei corpuri* din mecanica cerească problema (4) în care $n = 3$ şi

$$U = -\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|} - \frac{m_2 m_3}{\|x_2 - x_3\|} - \frac{m_3 m_1}{\|x_3 - x_1\|}.$$

La forma (4) se pot aduce şi unele ecuaţii diferenţiale de cu totul altă provenienţă, de exemplu ecuaţia oscilaţiilor electrice.

În capitolul următor ne vom ocupa în principal de studierea sistemului de ecuaţii diferenţiale (4).

CAPITOLUL 2
STUDIEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

În majoritatea cazurilor (un exemplu îl reprezintă problema celor trei corpuri) nu se reușește nici rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării, nici studierea destul de completă a comportării soluțiilor. În acest capitol se consideră cîteva probleme simple, dar importante, pentru care ecuațiile lui Newton se rezolvă.

§4. SISTEME CU UN GRAD DE LIBERTATE

În acest paragraf se studiază planul fazelor ecuației diferențiale (1). Pentru înțelegerea calitativă a unei astfel de ecuații este suficientă o singură privire asupra graficului energiei potențiale. În plus, ecuația (1) se integrează prin cvadraturi.

A. Definiție. Vom numi *sistem cu un grad de libertate* orice sistem descris de o singură ecuație diferențială

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Energia cinetică a sistemului este, prin definiție, forma pătratică

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2.$$

Energia potențială a sistemului este, prin definiție, funcția

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Semnul din această formulă este ales astfel încît energia potențială a pietrei din exemplul 1, §3, să fie cu atît mai mare cu cît piatra este mai sus.

Să observăm că energia potențială U determină pe f. Prin urmare, pentru a da sistemul (1) este suficient să indicăm care este energia potențială. Dacă se adaugă la energia potențială o constantă, ecuațiile de mișcare (1) nu se schimbă.

Se numește *energie totală* a sistemului suma

$$E = T + U.$$

Prin urmare, energia totală este o funcție $E(x, \dot{x})$.

B. Teoremă (legea conservării energiei). *Energia totală a punctului mobil în mișcarea descrisă de* (1) *se conservă* : $E(x(t), \dot{x}(t))$ *nu depinde de* t.

D e m o n s t r a ț i e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0, \text{ c.c.t.d.}$$

C. Planul fazelor.

Ecuația (1) este echivalentă cu sistemul de două ecuații

$$\dot{x} = y, \dot{y} = f(x).$$

Să considerăm planul de coordonate x, y. Acesta se numește *planul fazelor* ecuației (1). Punctele planului fazelor se numesc *stări*. Membrul drept al sistemului (2) definește un cîmp de vectori pe planul fazelor. Acest cîmp se numește *cîmpul vectorial al vitezelor*.

O soluție a sistemului (2) este o mișcare $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ a stării sistemului în planul fazelor pentru care viteza de mișcare a stării coincide în fiecare moment de timp cu vectorul vitezei în acel punct în care se află starea la momentul considerat*).

Imaginea aplicației φ se numește orbită. Prin urmare, o orbită este dată de ecuațiile parametrice

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ \varphi_2 = \dot{\varphi}_1.$$

*) Aici se presupune, pentru comoditate, că soluția φ este definită pe toată axa timpului $\mathbf{R}$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că prin fiecare stare trece o orbită și numai una singură.

I n d i c a ț i e. Se pot consulta tratatele de ecuații diferențiale ordinare.

Să observăm că o orbită se poate reduce la un singur punct. Un astfel de punct se numește *poziție de echilibru*. Vectorul viteză într-o poziție de echilibru este nul.

Legea conservării energiei permite determinarea simplă a orbitelor. Într-adevăr, pe fiecare orbită valoarea energiei totale este constantă. Prin urmare, fiecare orbită este conținută în întregime într-o singură mulțime de nivel constant al energiei : $E(x, y) = h$.

D. Exemple.

E x e m p l u l 1. Ecuația fundamentală a teoriei oscilațiilor este

$$\ddot{x} = -x.$$

În acest caz (fig. 9), avem

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2},\ U = \frac{x^2}{2},\ E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

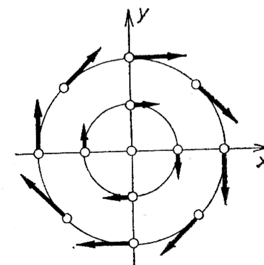


Fig. 9. Planul fazelor ecuației $\ddot{x} = -x$.

Mulțimile de nivel constant al energiei sînt cercuri concentrice și originea coordonatelor. În punctul (x, y), vectorul viteză în spațiul fazelor are componentele $(y, -x)$. El este perpendicular pe raza vectoare și este egal ca mărime cu aceasta. Rezultă că mișcarea stării în planul fazelor reprezintă o rotație uniformă în jurul lui O : $x = r_0 \cos(\varphi_0 - t)$, $y = r_0 \sin(\varphi_0 - t)$. Prin urmare, fiecare mulțime de nivel constant al energiei este o orbită.

E x e m p l u l 2. Să presupunem că energia potențială este dată de graficul său (fig. 10). Să trasăm mulțimile de nivel constant al energiei $y^2/2 + U(x) = E$. Pentru aceasta, este util să ținem seama de următoarele particularități :

1. Pozițiile de echilibru ale sistemului (2) se găsesc pe axa x a planului fazelor. Un punct $x = \xi$, $y = 0$ este poziție de echilibru

dacă ξ este punct critic al energiei potenţiale, deci dacă $\left.\mathrm{d}U/\mathrm{d}x\right|_{x=\xi}=0$.

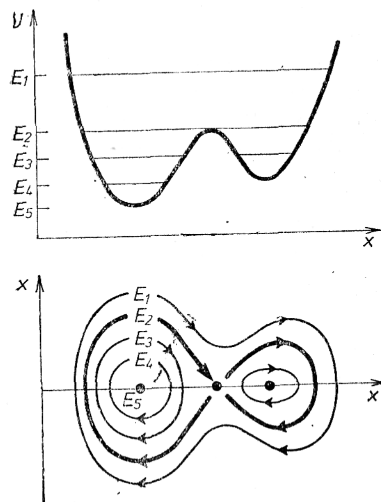


Fig. 10. Energia potenţială şi orbitele.

2. Fiecare mulţime de nivel constant este o curbă *netedă* în vecinătatea fiecărui punct al său care nu este poziţie de echilibru (aceasta rezultă din teorema funcţiilor implicite). În particular, dacă constanta E nu este valoare critică a energiei potenţiale (este diferită de valorile luate de U în punctele critice) atunci mulţimea de nivel constant E al energiei totale este o curbă netedă.

Atunci cînd studiem curbele de nivel constant al energiei, trebuie să ne îndreptăm atenţia asupra valorilor critice ale lui E şi asupra valorilor lui E apropiate de valorile critice. Pentru aceasta este util să ne reprezentăm o bilă mică care alunecă în groapa de potenţial U.

De exemplu, raţionamentul : „Energia cinetică este nenegativă. Prin urmare, energia potenţială nu este mai mare ca cea totală. Cu cît energia potenţială este mai mică, cu atît viteza este mai mare" capătă în acest limbaj următoarea formă : „Bila nu poate sări din groapa de potenţial, neputîndu-se ridica la un nivel mai înalt decît cel definit de energia ei iniţială. Alunecînd în groapă, bilei îi creşte viteza". De asemenea, observăm imediat că punctele de

maxim (minim) local al energiei potenţiale sînt poziţii de echilibru instabil (respectiv stabil) ale sistemului.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze ultimele afirmaţii.

P r o b l e m ă. Din cîte orbite este formată separatoarea (optul) — curba de nivel constant corespunzătoare valorii E_2 (fig. 10) ?

Răspuns. Din trei.

P r o b l e m ă. Să se determine durata mişcării pe separatoare.

Răspuns. Din teorema de unicitate rezultă că această durată este infinită.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că timpul cît durează mişcarea de la x_1 la x_2 (într-un singur sens) este egal cu $t_2-t_1=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E-U(x))}}$.

P r o b l e m ă. Să se deseneze orbitele atunci cînd se dă graficul energiei potenţiale (fig. 11).

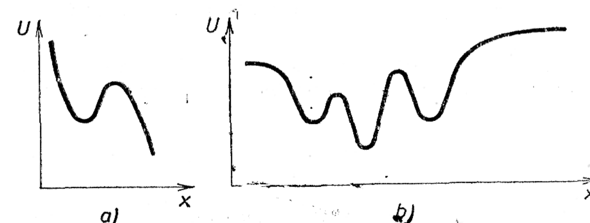


Fig. 11. Energie potenţială.

Răspuns. Fig. 12.

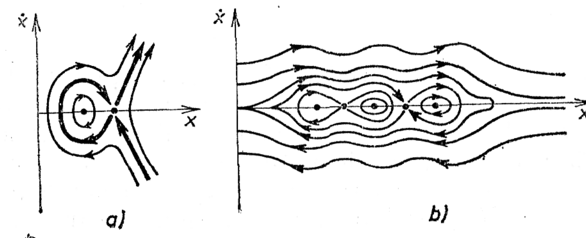


Fig. 12. Orbite.

P r o b l e m ă. Să se traseze orbitele pentru „ecuaţia pendulului matematic plan" : $\ddot{x}=-\sin x$.

P r o b l e m ă. Să se traseze orbitele pentru „ecuaţia pendulului a cărui axă se roteşte" : $\ddot{x}=-\sin x+M$.

O b s e r v a ţ i e. În aceste două probleme se notează cu x unghiul de abatere al pendulului. Stările ale căror coordonate x diferă cu 2π corespund unei aceleiaşi poziţii a pendulului. Prin urmare, în afară de planul fazelor este natural să se considere şi cilindrul fazelor $\{x \pmod{2\pi},\ y\}$.

Problemă. Să se determine tangentele la ramurile curbei de nivel critic corespunzătoare unui maxim al energiei potențiale, $E = U(\xi)$ (fig. 13).

Răspuns. $y = \pm \sqrt{U''(\xi)}\ (x-\xi)$.

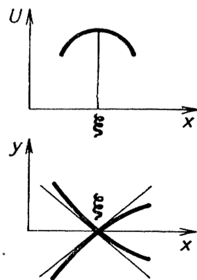


Fig. 13. Curbă de nivel constant critic al energiei.

Problemă. Fie $S(E)$ aria cuprinsă în interiorul orbitei închise corespunzătoare mulțimii de nivel constant E al energiei. Demonstrați că perioada mișcării pe această orbită este

$$T = \frac{dS}{dE}.$$

Problemă. Fie E_0 valoarea energiei potențiale în punctul de minim ξ_0. Să se determine perioada oscilațiilor mici în vecinătatea punctului ξ_0, $T_0 = \lim_{E \to E_0} T(E)$

Răspuns. $2\pi/\sqrt{U''(\xi_0)}$.

Problemă. Să considerăm o mișcare periodică pe o orbită închisă, corespunzătoare mulțimii de nivel constant E al energiei. Este ea stabilă în sens Liapunov ?

Răspuns. Nu*).

E. Curentul în planul fazelor. Fie M un punct al planului fazelor. Să considerăm soluția sistemului (2) a cărei condiție inițială la momentul $t = 0$ este reprezentată de punctul M. Facem ipoteza că fiecare soluție a sistemului se prelungește la întreaga axă a timpului. Valoarea pe care o ia soluția de mai sus la un moment dat t depinde de M și notăm starea corespunzătoare (fig. 14) cu

$$M(t) = g^t M.$$

În acest mod am definit o aplicație $g^t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a planului fazelor în el însuși. Conform teoremelor cunoscute din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, aplicația g^t este un difeomorfism

*) Singura excepție o constituie cazul în care perioada nu depinde de energie.

(este bijectivă și bidiferențiabilă). Difeomorfismele g^t, $t \in \mathbf{R}$ formează un grup : $g^{t+s} = g^t \cdot g^s$, $\forall s, t \in \mathbf{R}$. De asemenea, g^0 este aplicația identică și g^{-t} este aplicația inversă lui g^t, $\forall t \in \mathbf{R}$. Aplicația $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(t, M) = g^t M$ este diferențiabilă. Toate aceste proprietăți se exprimă la un loc spunînd că transformările g^t formează un *grup cu un parametru de difeomorfisme* ale planului fazelor. Acest grup se mai numește și *curentul* definit de sistemul (2) (sau de ecuația (1)).

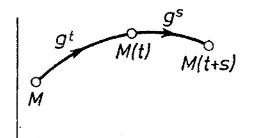


Fig. 14. Curent.

Exemplu. Curentul definit de ecuația $\ddot{x} = -x$ este grupul g^t al rotațiilor de unghi t ale planului fazelor în jurul originei coordonatelor.

Problemă. Să se demonstreze că sistemul cu energia potențială $U = -x$ nu definește un curent.

Problemă. Să se demonstreze că dacă energia potențială este pozitivă peste tot, atunci curentul există.

Indicație. Se folosește legea conservării energiei pentru a demonstra că soluțiile se prelungesc pe întreaga axă a timpului.

Problemă. Să se traseze imaginea discului $x^2 + (y-1)^2 \lessdot 1/4$ prin acțiunea transformărilor g^t ale curentului definit de ecuația ; a) „pendulului răsturnat" $\ddot{x} = x$; b) „pendulului neliniar" $\ddot{x} = -\sin x$.

Răspuns. fig. 15.

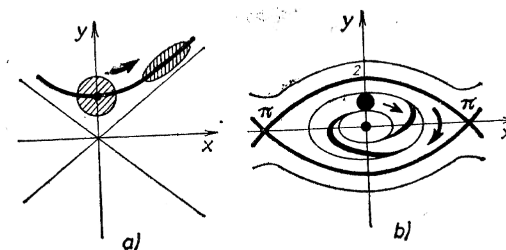


Fig. 15. Efectul curentului asupra unui disc.

§5. SISTEME CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Analiza unui sistem potențial general cu două grade de libertate nu este pînă în prezent complet rezolvată. În acest paragraf se consideră cîteva din exemplele cele mai simple.

A. Definiții. Prin sistem cu două grade de libertate vom înțelege un sistem descris de o ecuație diferențială

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E^2,$$

unde f este un cîmp de vectori în plan.

Sistemul se numește *potențial* dacă există o funcție $U : E^2 \to \mathbf{R}$ astfel încît $\mathbf{f} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$. Prin urmare, pentru un sistem potențial, ecuațiile de mișcare sînt de forma*).

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}. \tag{1}$$

B. Legea conservării energiei.

Teoremă. *Energia totală a unui sistem potențial*

$$E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + U(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}}^2 = (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})$$

se conservă. Se afirmă că $dE/dt = 0$.

Demonstrație. Datorită ecuațiilor de mișcare

$$\frac{dE}{dt} = (\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\right) = \left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\right) = 0.$$

Corolar. *Dacă în momentul inițial energia totală era egală cu E, atunci întreaga traiectorie este conținută în domeniul în care*

*) În coordonate carteziene în planul E^2

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

$U(\mathbf{x}) \leqslant E$: punctul $\mathbf{x}$ *se află întotdeauna în interiorul gropii de potențial $U(x_1, x_2) \leqslant E$.*

Observație. Într-un sistem cu un grad de libertate se poate introduce întotdeauna energia potențială

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Acest lucru nu este posibil, în general, pentru sistemele cu două grade de libertate.

Problemă. Să se dea un exemplu de sistem de forma $\ddot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x})$, $\mathbf{f}\mathbf{x} \in E^2$, care nu este potențial.

C. Spațiul fazelor. Ecuația de mișcare (1) se poate scrie sub forma unui sistem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, & \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_2}. \end{cases} \tag{2}$$

Spațiul de faze al unui sistem cu două grade de libertate este, prin definiție, spațiul cvadridimensional cu coordonatele x_1, x_2, y_1, y_2.

Sistemul (2) definește un cîmp de vectori viteză în spațiul fazelor și în același timp*) curentul sistemului nostru (un grup cu un parametru de difeomorfisme ale spațiului de faze cvadridimensional). Orbitele sistemului (2) sînt submulțimi ale spațiului fazelor. Acest spațiu este de fapt o reuniune de orbite. Proiecțiile orbitelor din spațiul de faze pe planul x_1, x_2 reprezintă traiectoriile mișcării punctului nostru în planul x_1, x_2. Deseori și aceste traiectorii sînt denumite orbite. „Orbitele" din planul x_1, x_2 se pot autointersecta, spre deosebire de orbitele din spațiul fazelor.

*) În ipotezele suplimentare obișnuite.

Ecuația

$$E = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + U(\mathbf{x}) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + U(x_1, x_2) = E_0$$

dată de legea conservării energiei definește o hipersuprafață tridimensională în spațiul fazelor : $E(x_1, x_2, y_1, y_2) = E_0$; această hipersuprafață Π_{E_0} este invariantă la curentul sistemului : $g^t \Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}$. Putem spune că acest curent „curge" pe hipersuprafața de nivel constant al energiei. Cîmpul vectorial al vitezelor este tangent la hipersuprafața Π_{E_0} în fiecare punct al ei. Prin urmare, ea este formată în întregime din orbite (fig. 16).

D. Exemplul 1 (oscilațiile mici ale pendulului sferic). Fie $U = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Mulțimile de nivel constant al energiei potențiale în planul x_1, x_2 sînt cercuri concentrice (fig. 17).

Ecuațiile de mișcare $\ddot{x}_1 = -x_1$, $\ddot{x}_2 = -x_2$ sînt echivalente cu sistemul

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad \dot{x}_2 = y_2,$$

$$\dot{y}_1 = -x_1, \dot{y}_2 = -x_2.$$

Acest sistem se descompune în două sisteme independente ; cu alte cuvinte, fiecare din coordonatele x_1 și x_2 variază în timp la fel ca într-un sistem cu un grad de libertate.

Soluțiile sînt de forma

$$x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

$$x_2 = c_3 \cos t + c_4 \sin t,$$

$$y_1 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t,$$

$$y_2 = -c_3 \sin t + c_4 \cos t.$$

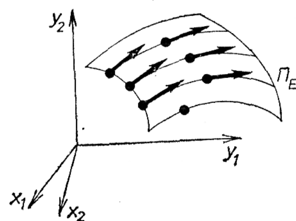


Fig. 16. Suprafață de nivel constant al energiei și orbite.

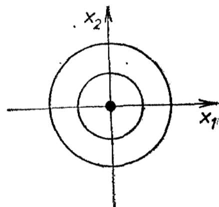


Fig. 17. Curbele de nivel constant al energiei potențiale a pendulului sferic.

Din legea conservării energiei rezultă

$$E = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \text{const},$$

deci hipersuprafața de nivel constant Π_E este o sferă în spațiul cvadridimensional $\{(x_1, x_2, y_1, y_2)\}$.

Problemă. Să se demonstreze că mulțimea orbitelor de pe hipersuprafața Π_E este parametrizată de o sferă de dimensiune doi. Mai exact, formula $w = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ definește „aplicația lui Hopf" a sferei tridimensionale Π_E pe sfera bidimensională (planul variabilei complexe w completat cu punctul de la infinit — sfera lui Riemann). Orbitele sistemului sînt imaginile reciproce ale punctelor prin aplicația lui Hopf.

Problemă. Să se determine proiecțiile orbitelor pe planul x_1, x_2 (să se traseze curbele descrise de punctul în mișcare).

E. Exemplul 2. («figurile lui Lissajous»). Să considerăm încă un exemplu de mișcare plană (*«oscilațiile mici cu două grade de libertate»*) :

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \quad (\omega = \text{const}).$$

Energia potențială este

$$U = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2.$$

Din legea conservării energiei rezultă că dacă la momentul inițial energia totală este

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + U(x_1, x_2) = E,$$

atunci mișcarea se desfășoară în întregime în interiorul elipsei $U(x_1, x_2) \leqslant E$.

În plus, sistemul nostru este alcătuit din două sisteme unidimensionale independente. Prin urmare, legea conservării energiei se aplică fiecăruia în parte și deci se conservă mărimile :

$$E_1 = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_2^2$$

$$(E = E_1 + E_2).$$

Rezultă că variația lui x_1 (respectiv x_2) este limitată la banda $|x_1| \leqslant A_1, A_1 = \sqrt{2E_1(0)}$ (respectiv $|x_2| \leqslant A_2$, $A_2 = \sqrt{2E_2(0)}$). Intersecția acestor două benzi determină un dreptunghi în interiorul căreia se găsește inclusă proiecția orbitei (fig. 18).

Problemă. Să se demonstreze că acest dreptunghi este înscris în elipsa $U \leqslant E$. Soluția generală a ecuațiilor de mișcare este $x_1 = A_1 \sin(t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \sin$

$(\omega t+\varphi_2)$: punctul mobil efectuează independent o oscilaţie cu frecvenţa 1 şi amplitudinea A_1 pe orizontală şi o oscilaţie cu frecvenţa ω şi amplitudinea A_2 pe verticală.

Pentru a trasa proiecţia orbitei în planul x_1, x_2, procedăm în modul următor. Considerăm un cilindru cu baza $2A_1$ şi o bandă de lăţime $2A_2$. Trasăm pe bandă o sinusoidă cu perioada $2\pi A_1/\omega$ şi amplitudinea A_2 şi o înfăşurăm pe cilindru (fig. 19).

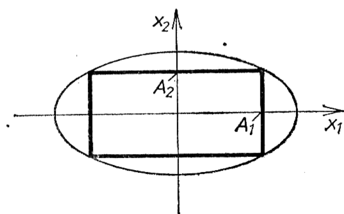


Fig. 18. Domeniile $U\leqslant E$, $U_1\leqslant E_1$ şi $U_2\leqslant E_2$.

Proiecţia ortogonală a sinusoidei înfăşurate pe cilindru astfel obţinute pe planul x_1, x_2 dă curba căutată; ea se numeşte *figură Lissajous.*

Figurile lui Lissajous sînt comod de urmărit pe un oscilograf imprimînd două oscilaţii armonice independente baleiajului vertical şi celui orizontal.

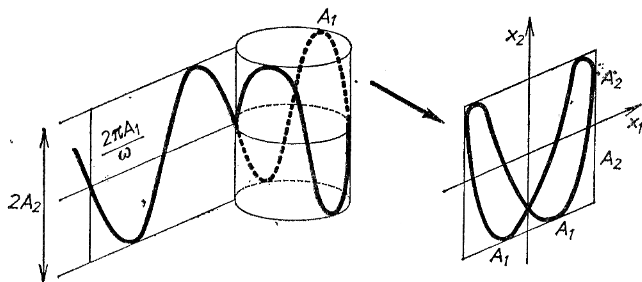


Fig. 19. Construcţia unei figuri Lissajous.

Forma figurilor Lissajous este puternic dependentă de frecvenţa ω. Dacă $\omega=1$ (pendulul sferic din exemplul 1) atunci curba de pe cilindru este o elipsă. Proiecţia acestei elipse pe planul x_1, x_2 depinde de diferenţa de fază $\varphi_2-\varphi_1$. Pentru $\varphi_1=\varphi_2$, se obţine segmentul diagonal al dreptunghiului, iar pentru valori mici ale lui $\varphi_2-\varphi_1$, o elipsă înscrisă în dreptunghi şi contractată spre diagonală. Atunci cînd $\varphi_2-\varphi_1=$ $=\pi/2$, se obţine o elipsă cu axele principale x_1 şi x_2; cînd $\varphi_2-\varphi_1$ creşte de la $\pi/2$ la π elipsa se contractă în direcţia celei de-a doua diagonale. Mărind în continuare pe $\varphi_2-\varphi_1$, procesul se repetă de la început (fig. 20).

Să presupunem acum că frecvenţele sînt egale numai aproximativ: $\omega\approx 1$. Segmentul de curbă corespunzător intervalului $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ este foarte asemănător cu o elipsă. Următoarea „spiră" aminteşte şi ea de o elipsă, dar pentru ea diferenţa de fază $\varphi_2-\varphi_1$ este cu $2\pi(\omega-1)$ mai mare ca a primeia. Prin urmare, curba lui Lissajous

cu $\omega\approx 1$ este o elipsă care se deformează, trecînd lent prin toate fazele, de la contracţia în direcţia unei diagonale pînă la contracţia în direcţia celeilalte. (fig. 21).

Dacă una din frecvenţe este dublul celeilalte ($\omega=2$), atunci pentru o anumită diferenţă de fază figura lui Lissajous se transformă într-o curbă parcursă de două ori (fig. 22).

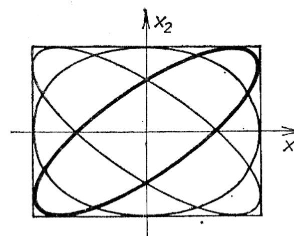


Fig. 20. Figuri Lissajous cu $\omega=1$.

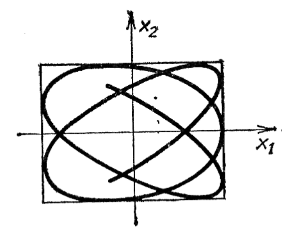


Fig. 21. Figuri Lissajous cu $\omega\approx 1$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că această ultimă curbă este o parabolă.

În cazul cînd diferenţa de fază $\varphi_2-\varphi_1$ creşte, se obţin succesiv curbele din fig. 23.

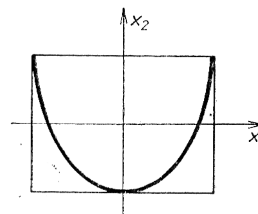


Fig. 22. Figură Lissajous cu $\omega=2$.

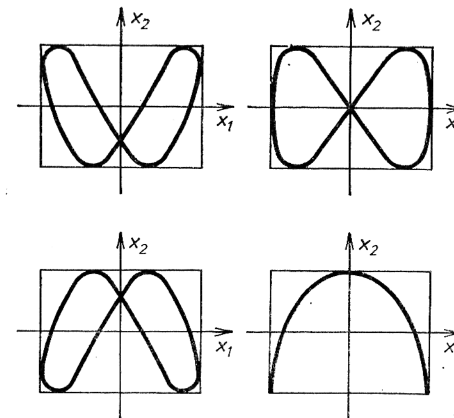


Fig. 23. Figuri Lissajous cu $\omega=2$.

În general, dacă una din frecvenţe este de n ori mai mare decît cealaltă ($\omega=n$), atunci printre figurile Lissajous se găseşte şi graficul unui polinom de gradul n (fig. 24); acest polinom se numeşte *polinomul lui Cebîşev.*

Problemă. Să se demonstreze că dacă $\omega = m/n$, m şi n naturale, atunci figurile lui Lissajous sînt curbe algebrice, închise iar dacă ω este iraţional, figurile lui Lissajous sînt dense în dreptunghi. Care este mulţimea umplută dens în spaţiul fazelor de orbita corespunzătoare unei astfel de figuri ?

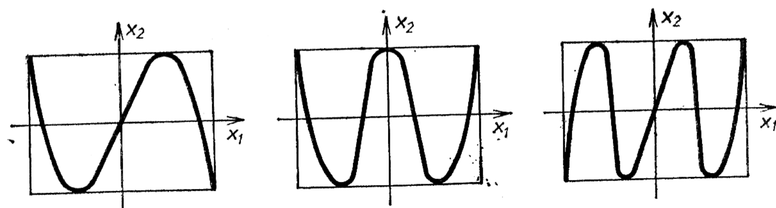


Fig. 24. Polinoame Cebîşev.

§6. CÎMPUL DE FORŢE POTENŢIAL

În acest paragraf se studiază dependenţa dintre lucrul mecanic şi energia potenţială.

A. Lucrul mecanic efectuat de un cîmp de forţe de-a lungul unui drum. Reamintim definiţia lucrului mecanic efectuat de forţa **F** de-a lungul drumului **S**. Lucrul mecanic corespunzător unei forţe constante **F** (de exemplu, forţa cu care tragem în sus de o greutate) de-a lungul drumului $\mathbf{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ este, prin definiţie, produsul scalar (fig. 25)

$$A = (\mathbf{F}, \mathbf{S}) = |F|\,|S| \cos \varphi.$$

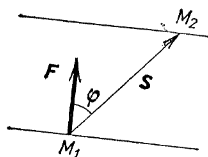


Fig. 25. Lucrul mecanic efectuat de o forţă constantă **F** pe drumul rectiliniu **S**.

Fie date cîmpul de forţe **F** şi curba l de lungime finită. Aproximăm curba l printr-o linie frîntă cu laturile $\Delta\mathbf{S}_i$ şi notăm cu $\mathbf{F}_i$

valoarea forţei într-unul din punctele lui $\Delta\mathbf{S}_i$. În aceste *condiţii, lucrul mecanic efectuat de cîmpul* **F** *de-a lungul drumului l este, prin definiţie* (fig. 26)

$$A = \lim_{|\Delta\mathbf{S}_i| \to 0} \sum (\mathbf{F}_i, \Delta\mathbf{S}_i).$$

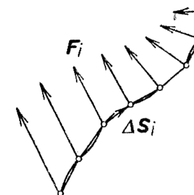


Fig. 26. Lucrul mecanic efectuat de un cîmp de forţe de-a lungul unui drum l.

În tratatele de analiză se demonstrează că dacă cîmpul este continuu, iar drumul rectificabil, limita există. Ea se notează cu $\int_l (\mathbf{F}, d\mathbf{S})$.

B. Condiţia de potenţialitate a cîmpului.

Teoremă. *Cîmpul de vectori* **F** *este potenţial*) dacă şi numai dacă lucrul mecanic efectuat de-a lungul oricărui drum M_1M_2 depinde numai de extremităţile drumului şi nu depinde de forma drumului.*

Într-adevăr, să presupunem că lucrul mecanic efectuat de cîmpul **F** nu depinde de drum. Atunci funcţia de punct

$$U(M) = -\int_{M_0}^{M} (\mathbf{F}, d\mathbf{S})$$

este corect definită. Se verifică uşor că

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}},$$

deci cîmpul **F** este potenţial şi U este energia sa potenţială. Evident, energia potenţială U este definită numai pînă la o constantă aditivă $U(M_0)$, care se poate alege arbitrar.

*) Se mai spune că „derivă dintr-un potenţial'' (*N. T.*)

Reciproc, să presupunem că **F** este un cîmp potenţial cu energia potenţială U. Atunci se verifică uşor că

$$\int_{M_0}^{M} (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = -U(M) + U(M_0),$$

deci că lucrul mecanic nu depinde de drum.

P r o b l e m ă. Demonstraţi că cîmpul vectorial $F_1 = x_2$, $F_2 = -x_1$ nu este potenţial (fig. 27).

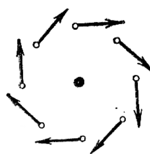


Fig. 27. Cîmp care nu este potenţial.

P r o b l e m ă. Să se determine dacă cîmpul vectorial cu componentele $F_1 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $F_2 = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$, definit în planul x_1, x_2 exceptînd originea coordonatelor, este sau nu potenţial. Să se demonstreze că un cîmp este potenţial dacă şi numai dacă lucrul mecanic efectuat de-a lungul oricărui drum închis este nul.

C. Cîmpul central. Un cîmp de vectori în planul E^2 se numeşte *central* cu centrul în O dacă el este invariant în raport cu grupul de mişcări*) ale planului care lasă pe loc punctul O.

P r o b l e m ă. Să se arate că toţi vectorii unui cîmp central se găsesc în direcţia razelor care trec prin punctul O, mărimea vectorilor în fiecare punct depinzînd numai de distanţa de la punct la centrul O.

Este util să se considere şi cîmpuri centrale care nu sînt definite în punctul O.

E x e m p l u. Cîmpul newtonian $\mathbf{F} = k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ este central, în timp ce cîmpul din problema de la punctul B, nu este.

Teoremă. *Orice cîmp central este potenţial şi energia sa potenţială depinde numai de distanţa pînă la centrul cîmpului* $U = U(r)$.

*) Inclusiv reflexiile.

D e m o n s t r a ţ i e. Conform problemei precedente, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \Phi(r)\, \mathbf{e}_r$ unde $\mathbf{r}$ este raza vectoare relativă la O, r este lungimea lui $\mathbf{r}$ şi $\mathbf{e}_r$ — versorul lui $\mathbf{r}$. Atunci

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = \int_{r(M_1)}^{r(M_2)} \Phi(r)\, dr$$

şi este evident că această integrală nu depinde de drum.

P r o b l e m ă. Să se calculeze energia potenţială a cîmpului newtonian.

O b s e r v a ţ i e. Definiţiile şi teoremele acestui paragraf se extind direct la un spaţiu euclidian E^n de dimensiune n arbitrară.

§7. MOMENTUL CINETIC

Vom vedea mai tîrziu că invarianţa ecuaţiilor unei probleme de mecanică la un grup oarecare de transformări atrage după sine existenţa unor legi de conservare. Un cîmp central este invariant la grupul rotaţiilor. Integrala primă corespunzătoare se numeşte moment cinetic.

A. Definiţie. Mişcarea unui punct material (de masă 1) într-un cîmp central în plan este descrisă de ecuaţia

$$\ddot{\mathbf{r}} = \Phi(r)\mathbf{e}_r,$$

unde $\mathbf{r}$ este raza vectoare relativ la centrul O al cîmpului, r este lungimea lui $\mathbf{r}$ şi $\mathbf{e}_r$ — versorul lui $\mathbf{r}$. Vom considera că planul nostru este scufundat în spaţiul euclidian tridimensional orientat.

D e f i n i ţ i e. *Momentul cinetic (sau momentul cantităţii de mişcare) al punctului material de masă* 1 *în raport cu punctul* O este, prin definiţie, produsul vectorial

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}].$$

Vectorul $\mathbf{M}$ este perpendicular pe planul mişcării şi este dat de un număr : $\mathbf{M} = M\, \mathbf{n}$, unde $\mathbf{n} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ este vectorul normal la plan şi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ constituie un reper care dă orientarea planului (fig. 28).

O b s e r v a ț i e. În general, se numește momentul vectorului **a**, „aplicat în punctul **r**", relativ la punctul O, vectorul $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$; de exemplu, în manualele de statică de liceu s-a considerat momentul unei forțe.

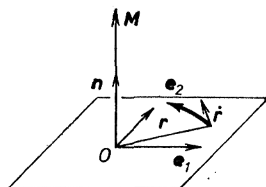


Fig. 28. Moment cinetic.

B. Legea conservării momentului cinetic.

Lemă. *Fie* **a** *și* **b** *doi vectori variabili în timp în spațiul euclidian orientat* $\mathbf{R}^3$. *Atunci*

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}}].$$

Demonstrația rezultă din definiția derivatei.

Teoremă. (legea conservării momentului cinetic). *La mișcarea într-un cîmp central, momentul cinetic* **M** *în raport cu centrul* O *al cîmpului nu variază în timp.*

D e m o n s t r a ț i e. Prin definiție,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}].$$

Conform lemei

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}].$$

Din ecuația de mișcare, ținînd seama că cîmpul este central, rezultă că vectorii $\ddot{\mathbf{r}}$ și $\mathbf{r}$ sînt coliniari, deci $[\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = 0$. Prin urmare, $\dot{\mathbf{M}} = 0$, c.c.t.d.

C. Legea lui Kepler. Legea conservării momentului cinetic a fost descoperită de Kepler prin observații efectuate asupra mișcării planetei Marte. Kepler a formulat această lege într-o formă diferită de cea de mai sus.

Să introducem în planul mișcării coordonatele polare r, φ cu polul în centrul O al cîmpului. Să considerăm în punctul **r** de coordonate $|\mathbf{r}| = r$ și φ doi versori: $\mathbf{e}_r$, îndreptat în direcția razei vectoare (deci $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$) și $\mathbf{e}_\varphi$, care îi este ortogonal și îndreptat în sensul creșterii lui φ. Descompunem vectorul viteză $\dot{\mathbf{r}}$ în baza $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ (fig. 29).

Lemă. *Are loc relația*

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi.$$

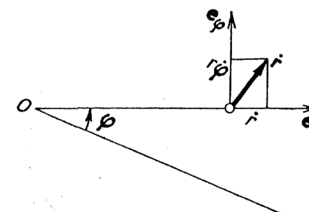


Fig. 29. Descompunerea vectorului r în baza $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$.

D e m o n s t r a ț i e. Evident, vectorii $\mathbf{e}_r$ și $\mathbf{e}_\varphi$ se rotesc cu viteza unghiului $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r.$$

Derivînd egalitatea $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, obținem

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi, \text{ c.c.t.d.}$$

Prin urmare, momentul cinetic este

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}, \dot{r}\mathbf{e}_r] + [\mathbf{r}, r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi] = r\dot{\varphi}[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\varphi] = r^2\dot{\varphi}[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi]$$

și deci se conservă mărimea

$$M = r^2\dot{\varphi}.$$

Această mărime are o interpretare geometrică simplă.

Kepler a denumit viteză areolară (sectorială) C viteza de variaţie a ariei $S(t)$ descrisă de raza-vectoare (fig. 30).

$$C = \frac{dS}{dt}.$$

Legea lui Kepler, determinată de el prin observaţii, se formulează astfel:

În intervale de timp egale raza vectoare descrie arii egale, astfel încît viteza areolară este constantă; $\frac{dS}{dt} = \text{const}.$

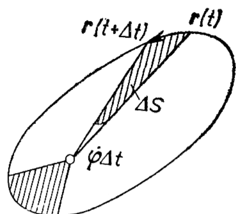


Fig. 30. Viteza vectorială.

Aceasta este una dintre formulările posibile ale legii conservării momentului cinetic. Într-adevăr,

$$S = S(t + \Delta t) - S(t) = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}\ \Delta t + O(\Delta t)$$

şi deci viteza areolară

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2} M,$$

fiind jumătate din momentul cinetic al punctului material de masă 1, se conservă.

E x e m p l u. Sateliţii de comunicaţie «Molnia» au orbite puternic alungite. Conform legii lui Kepler, un astfel de satelit petrece o mare parte a timpului în partea mai îndepărtată de Pămînt a orbitei şi mărimea $\dot{\varphi}$ este mică.

§8. STUDIEREA MIŞCĂRII ÎNTR-UN CÎMP CENTRAL

Legea conservării momentului cinetic permite reducerea problemei mişcării într-un cîmp central la o problemă cu un singur grad de libertate ceea ce permite o analiză completă a acestei mişcări.

A. Reducerea la o problemă unidimensională. Să considerăm mişcarea unui punct material (de masă 1) într-un cîmp central în plan:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad U = U(\mathbf{r}).$$

Este naturală trecerea la coordonatele polare r, φ.

Conform legii conservării momentului cinetic, mărimea $M = \dot{\varphi}(t)\, r^2(t)$ este constantă (nu depinde de timp).

Teoremă. *În condiţiile mişcării unui punct material de masă unitate într-un cîmp central, distanţa punctului pînă la centrul cîmpului variază ca şi coordonata r într-o problemă unidimensională cu energia potenţială*

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Derivînd relaţia $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\, \mathbf{e}_r + r\, \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ demonstrată în §5, obţinem

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\, \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Cîmpul fiind central,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial U}{\partial r}\, \mathbf{e}_r$$

şi deci ecuaţiile de mişcare capătă, în coordonatele polare, următoarea formă:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Conform legii conservării momentului cinetic, $\dot{\varphi} = M/r^2$, unde M este o constantă (în t) care este definită de condițiile inițiale. Prin urmare,

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} \text{ sau } \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \text{ unde } V = U + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Funcția $V(r)$ se numește *energia potențială efectivă.*

Observație. În problema cu un grad de libertate astfel obținută, energia totală

$$E_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r)$$

coincide cu energia totală în problema inițială

$$E = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r),$$

deoarece

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2r^2}.$$

B. Integrarea ecuațiilor de mișcare. În sistemul unidimensional obținut, energia totală se conservă. Prin urmare, dependența lui r de t se determină printr-o cvadratură :

$$\dot{r} = \sqrt{2(E-V(r))}, \quad \int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E-V(r))}}.$$

Cum $\dot{\varphi} = M/r^2$, $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}}$ și ecuația orbitei în coordonate polare se găsește printr-o cvadratură :

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)\, dr}{\sqrt{2(E-V(r))}}.$$

C. Studierea orbitelor. Să fixăm valoarea constantei momentului cinetic M. Variația lui r cu timpul se studiază ușor desenînd graficul energiei potențiale efective $V(r)$ (fig. 31).

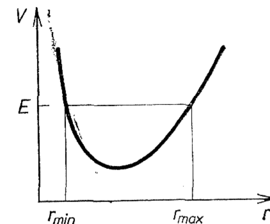


Fig. 31. Graficul energiei potențiale efective.

Fie E valoarea energiei totale. Orbita corespunzătoare datelor E și M este conținută în întregime în domeniul $V(r) \leqslant E$. Pe frontiera acestui domeniu $V = E$ deci $\dot{r} = 0$. În general însă viteza punctului material la frontiera $V = E$ nu este nulă, deoarece $\dot{\varphi} \neq 0$ pentru $M \neq 0$.

Inegalitatea $V(r) \leqslant E$ definește în plan unul sau mai multe domenii inelare :

$$0 \leqslant r_{min} \leqslant r \leqslant r_{max} \leqslant \infty.$$

Dacă $0 < r_{min} < r_{max} < \infty$, mișcarea este mărginită și are loc în inelul cuprins între cercurile de raze r_{min} și r_{max}.

Aspectul unei orbite este indicat în fig. 32. Unghiul φ variază monoton, iar r oscilează periodic între r_{min} și r_{max}. Punctele în care $r = r_{min}$ se numesc *pericentre*, iar cele în care $r = r_{max}$ — *apocentre*

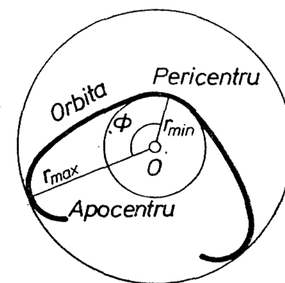


Fig. 32. Orbită a unui punct material într-un cîmp central.

(dacă centrul este Pămîntul — perigeu și apogeu, dacă este Soarele — periheliu și afeliu, dacă este Luna — periseleniu și aposeleniu).

Fiecare din razele care unesc centrul cu un apocentru sau pericentru este o axă de simetrie a orbitei.

În cazul general, orbita nu este închisă: *unghiul dintre un pericentru și un apocentru consecutive este dat de integrala*:

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2(E-V(r))}} .$$

Unghiul dintre două pericentre consecutive este de două ori mai mare.

Orbita este închisă dacă și numai dacă unghiul Φ este comensurabil cu 2π: $\Phi = 2\pi(m/n)$, unde m și n sînt numere întregi.

Se poate arăta că dacă unghiul Φ este incomensurabil cu 2π, orbita umple dens inelul (fig. 33).

Dacă $r_{\min} = r_{\max}$, deci E este valoarea lui V într-un punct de minim, atunci inelul respectiv degenerează într-un cerc care este orbită.

Problemă. Pentru ce valori ale lui α mișcarea pe o orbită circulară în cîmpul cu energia potențială $U = r^\alpha$, $-2 \leqslant \alpha < \infty$, este stabilă în sens Liapunov?

Răspuns. Numai pentru $\alpha = 2$.

Pentru valori E puțin mai mari decît valoarea minimă a lui V, inelul $r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max}$ este foarte îngust, iar orbita este apropiată

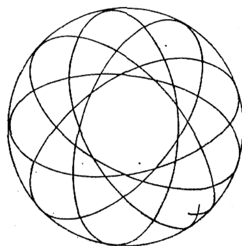


Fig. 33. Orbită densă într-un inel.

de cerc. În problema unidimensională corespunzătoare r va efectua oscilații mici în vecinătatea punctului de minim al lui V.

Problemă. Să se determine unghiul Φ pentru o orbită apropiată de una circulară de rază r.

Indicație. Vezi punctul D de mai jos.

Să considerăm cazul $r_{\max} = \infty$. Dacă $\lim_{r\to\infty} U(r) = \lim_{r\to\infty} V(r) = U_\infty < \infty$, atunci este posibilă îndepărtarea la $r \to \infty$ (evadarea). Dacă energia inițială E este mai mare ca U, atunci punctul se îndepărtează la infinit (într-un timp finit) cu viteza finală $\dot r_\infty = \sqrt{2(E-U_\infty)}$. Să remarcăm că dacă $U(r)$ tinde la limita sa U_∞ mai încet ca r^{-2}, atunci potențialul efectiv la infinit va fi de tip atractiv (presupunem aici că la infinit potențialul U este de tip atractiv).

Dacă $|U(r)|$ nu crește, atunci cînd $r \to 0$, mai repede ca $M^2/2r^2$, atunci $r_{\min} > 0$ și orbita nu ajunge la centru. Dacă $U(r) + M^2/2r^2 \to -\infty$ cînd $r \to 0$, atunci este posibilă „căderea în centrul cîmpului". Această cădere poate avea loc în timp finit (de exemplu, în cîmpul $U(r) = -1/r^3$).

Problemă. Să se determine forma orbitei în cazul în care energia totală este egală cu valoarea energiei potențiale efective V într-un punct de maxim.

D. Cîmpurile centrale în care toate orbitele mărginite sînt închise. Din următorul șir de probleme rezultă că singurele cazuri în care toate orbitele mărginite într-un cîmp central sînt închise sînt:

$$U = ar^2,\ a \geqslant 0 \text{ și } U = -k/r,\ k \geqslant 0.$$

Problema 1. Să se demonstreze că unghiul Φ dintre un pericentru și un apocentru succesiv este egal cu semiperioada oscilațiilor sistemului unidimensional cu energia potențială $W(x) = U\left(\frac{M}{x}\right) + \frac{x^2}{2}$.

Indicație. Schimbarea de variabilă $x = M/r$ dă

$$\Phi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E-W(x))}} .$$

Problema 2. Să se determine unghiul Φ pentru o orbită apropiată de una circulară de rază r.

Răspuns. $\Phi \approx \Phi_{\text{cir}} = \dfrac{\pi M}{r^2\sqrt{W''(r)}} = \pi \sqrt{\dfrac{U'(r)}{3U'(r) + rU''(r)}}$.

Problema 3. Pentru ce funcții U mărimea Φ_{cir} nu depinde de r?

Răspuns. $U(r) = ar^\alpha$ ($\alpha \geqslant -2$, $\alpha \neq 0$) și $U(r) = b \ln r$. Valoarea corespunzătoare este $\Phi_{\text{cir}} = \pi/\sqrt{\alpha+2}$ (cazul logaritmic corespunde valorii $\alpha = 0$). De exemplu, pentru $\alpha = 2$, avem $\Phi_{\text{cir}} = \pi/2$, iar pentru $\alpha = -1$, $\Phi_{\text{cir}} = \pi$.

Problema 4. Să presupunem că $U(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$. Să se determine $\lim\limits_{E\to\infty} \Phi\,(E,\ M)$.

Răspuns. $\pi/2$.

Indicaţie. Schimbarea de variabilă $x = y x_{max}$ transformă expresia lui Φ în

$$\Phi = \int\limits_{y_{min}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{2(W^*(1) - W^*(y))}}, \qquad W^*(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x_{max}^2}\, U\left(\frac{M}{y x_{max}^2}\right).$$

În cazul cînd $E \to \infty$, avem $x_{max} \to \infty$, $y_{min} \to 0$ şi al doilea termen al lui W^* poate fi neglijat.

Problema 5. Să presupunem că $U(r) = -kr^{-\beta}$, $0 < \beta < 2$. Să se determine

$$\Phi_0 = \lim_{E\to -0} \Phi.$$

Răspuns. $\Phi_0 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^\beta - x^2}} = \frac{\pi}{2-\beta}$. Se observă că Φ_0 nu depinde de M.

Problema 6. Să se determine toate cîmpurile centrale în care există orbite mărginite şi toate aceste orbite sînt închise.

Răspuns. $U = ar^2$ sau $U = -k/r$.

Rezolvare. Dacă toate orbitele mărginite sînt închise, atunci, în particular, $\Phi_{cir} = 2\pi m/n =$ const. Conform problemei 3, $U = ar^\alpha$ $(\alpha \geqslant -2)$ sau $U = b \ln r$, $(\alpha = 0)$. În ambele cazuri $\Phi_{cir} = \pi/\sqrt{\alpha+2}$. Dacă $\alpha < 0$, atunci conform problemei 4, $\lim\limits_{E\to\infty} \Phi\,(E,\ M) = \pi/2$. Prin urmare, $\Phi_{cir} = \pi/2$, $\alpha = 2$. Dacă $\alpha < 0$, conform problemei 5, $\lim\limits_{E\to -0} \Phi\,(E,\ M) = \pi/(2+\alpha)$. Prin urmare, $\pi/(2+\alpha) = \pi/\sqrt{2+\alpha}$, deci $\alpha = -1$. În cazul $\alpha = 0$, obţinem $\Phi_{cir} = \pi/\sqrt{2}$, număr incomensurabil cu 2π. Rezultă că toate orbitele mărginite pot fi închise numai în cîmpurile $U = -k/r$ şi $U = ar^2$. În cîmpul $U = ar^2$, $a > 0$, toate orbitele sînt închise (sînt elipse cu centrul în O; vezi exemplul 1, §3). În cîmpul $U = -k/r$, toate orbitele mărginite sînt închise şi eliptice, ceea ce vom demonstra acum.

E. Problema lui Kepler. Este vorba de mişcarea în cîmpul central de potenţial $U = -k/r$, în care energia potenţială efectivă are expresia $V(r) = -k/r + M^2/2r^2$ (fig. 34).

Conform formulei generale

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Integrînd, obţinem

$$\varphi = \arccos \frac{\dfrac{M}{r} - \dfrac{k}{M}}{\sqrt{2E + \dfrac{k^2}{M^2}}}.$$

La această expresie ar fi trebuit adăugată o constantă arbitrară. Considerăm că această constantă este nulă, ceea ce este echivalent

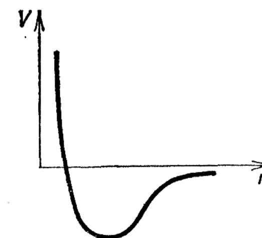


Fig. 34. Potenţialul efectiv în problema lui Kepler.

cu alegerea pericentrului ca punct de la care începe măsurarea lui φ. Introducem următoarele notaţii:

$$\frac{M^2}{k} = p; \qquad \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}} = e.$$

Obţinem $\varphi = \arccos\left(\frac{p}{r} - 1\right)/e$, deci $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$.

Aceasta este aşa-numita *ecuaţie focală* a unei secţiuni conice. Mişcarea este mărginită pentru $E < 0$ (fig. 35). În acest caz,

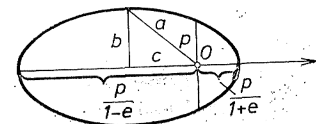


Fig. 35. Elipsă kepleriană.

$e < 1$ şi deci secţiunea conică este o elipsă. Mărimea p (respectiv e) se numeşte *parametrul* elipsei (respectiv *excentricitatea* elipsei).

Prima lege a lui Kepler, descoperită de el experimental prin observații asupra mișcării lui Marte, constă în faptul că planetele descriu elipse în focarele cărora se află Soarele.

Dacă se consideră că planetele se mișcă într-un cîmp gravitațional central, atunci din prima lege a lui Kepler rezultă legea atracției gravitaționale a lui Newton : $U = -k/r$ (vezi punctul D de mai sus).

Parametrul și excentricitatea elipsei sînt legate de semiaxele acesteia prin relațiile

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}, \quad \text{deci } a = \frac{p}{1-e^2}.$$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, unde $c = ae$ este distanța de la centru la focar (vezi fig. 35).

Observație. O elipsă cu excentricitatea mică este foarte asemănătoare cu un cerc*). Dacă distanța de la focar la centru este o mărime mică de ordinul întîi, atunci diferența dintre semiaxe este de ordinul doi : $b = a\sqrt{1-e^2} \approx a(1-e^2/2)$. De exemplu, într-o elipsă cu semiaxa mare de 10 cm și excentricitatea 0,1, diferența dintre semiaxe este egală cu 0,5 mm, iar distanța dintre focar și centru — cu 1 cm.

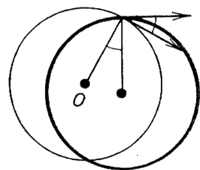


Fig. 36. Orbită apropiată de una circulară.

Excentricitățile orbitelor planetelor sînt foarte mici. Din acest motiv, Kepler a formulat prima sa lege în modul următor : *planetele se învîrtesc în jurul Soarelui pe cercuri, dar Soarele nu se găsește în centrul cercurilor.*

*) Picurați o picătură într-un pahar cu ceai nu departe de centrul paharului. Undele care se formează se vor strînge în punctul simetric față de centru. Cauza este următoarea : conform definiției focale a elipsei, undele emise într-un focar al elipsei se strîng în celălalt focar.

Legea a doua a lui Kepler : *viteza areolară este constantă, este valabilă în orice cîmp central.*

Legea a treia a lui Kepler : *perioada de rotație pe o orbită eliptică depinde numai de mărimea axei mari.*

*Pătratele perioadelor de revoluție a două planete pe două orbite eliptice sînt în același raport ca și cuburile semiaxelor mari ale elipselor**).

Demonstrație. Să notăm cu T perioada de revoluție și cu S aria descrisă de raza vectoare în intervalul de timp T. $2S = MT$, deoarece viteza sectorială este $M/2$. Aria elipsei este însă $S = \pi ab$ și deci $T = \frac{2\pi ab}{M}$. Cum însă $a = \frac{(M^2/k)}{\frac{2|E|M^2}{k^2}} = \frac{k}{2|E|}$ $\left(\text{din } a = \frac{p}{1-e^2}\right)$ și $b = \frac{M^2}{k}\frac{1}{\sqrt{2|E|}\frac{M}{k}} = \frac{M}{\sqrt{2|E|}}$, rezultă

$$T = 2\pi\frac{k}{(\sqrt{2|E|})^3}; \text{ dar } 2|E| = \frac{k}{a} \text{ și, în final, } T = 2\pi a^{3/2}k^{-1/2}.$$

Să observăm că energia totală E depinde numai de semiaxa mare a a orbitei și este aceeași pentru întreaga familie de orbite eliptice, de la cercul de rază a pînă la segmentul de lungime $2a$.

Problemă. La lansarea unui satelit pe o orbită circulară la distanța de 300 km de Pămînt, direcția vitezei a suferit o abatere de 1°, înspre Pămînt, de la valoarea calculată. Care este abaterea perigeului ?

Răspuns. Înălțimea perigeului se micșorează cu aproximativ 110 km.

Indicație. Abaterea orbitei de la un cerc este o mărime mică de ordinul doi și deci poate fi neglijată. Raza are valoarea calculată, deoarece energia inițială are valoarea calculată. Prin urmare, orbita reală se obține din cea calculată printr-o rotație cu 1°.

Problemă. Cum variază înălțimea perigeului dacă viteza imprimată satelitului este cu 1 m/sec mai mică decît cea calculată?

Problemă. Se numește *prima viteză cosmică* viteza de mișcare pe o orbită circulară a cărei rază este apropiată de raza Pămîntului. Să se determine valoarea primei viteze cosmice v_1 și să se arate că $v_2 = \sqrt{2}\, v_1$ (vezi §3, B).

Răspuns. 8,1 km/sec.

*) Prin planete se înțeleg aici punctele materiale care se mișcă în cîmpul central.

Problemă*). În timpul ieşirii din navă în spaţiul cosmic, cosmonautul A. Leonov a aruncat în direcţia Pămîntului capacul aparatului de filmat. Să se studieze mişcarea capacului în raport cu nava cosmică, considerînd viteza de aruncare egală cu 10 m/sec.

Răspuns. Capacul se va mişca în raport cu nava aproximativ pe o elipsă cu axa mare în jur de 32 km şi axa mică în jur de 16 km. Centrul orbitei este aşezat pe orbita navei cu 16 km înaintea punctului de aruncare, iar perioada de rotaţie pe elipsă este egală cu perioada de rotaţie a navei.

Indicaţie. Să luăm ca unitate de lungime raza orbitei circulare a navei cosmice şi să alegem unitatea de timp în aşa fel ca perioada de rotaţie a navei să fie egală cu 2π. Trebuie să studiem soluţiile ecuaţiei lui Newton

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

vecine cu soluţia circulară $r_0 = 1$, $\varphi_0 = t$. Căutăm aceste soluţii sub forma

$$r = r_0 + r_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, r_1 \ll 1, \ \varphi_1 \ll 1.$$

Conform teoremei de diferenţiabilitate a soluţiilor în raport cu condiţiile iniţiale, funcţiile $r_1(t)$ şi $\varphi_1(t)$ satisfac, modulo mărimi mici de ordinul doi în raport cu abaterea iniţială, un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare (ecuaţiile în variaţii).

Introducînd expresiile pentru r şi φ în ecuaţia lui Newton, obţinem, în urma unor calcule simple, următoarea formă a ecuaţiilor în variaţii:

$$\ddot{r}_1 = 3r_1 + 2\dot{\varphi}_1, \quad \ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1.$$

Rezolvind aceste ecuaţii cu condiţiile iniţiale date ($r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{r}_1(0) = -1/800$) obţinem răspunsul de mai sus.

Termenii de ordinul al doilea neglijaţi dau un efect de ordinul 1/800 în raport cu cel obţinut (deci de ordinul zecilor de metrii la o revoluţie). Prin urmare, după o rotaţie, capacul, descriind o elipsă cu axa mare de treizeci de kilometri într-o oră şi jumătate, se *întoarce la nava cosmică din direcţia opusă Pămîntului şi trece la cîteva zeci de metri de navă.*

Este evident că în acest calcul am neglijat faptul că orbita navei diferă de una circulară, efectul forţelor diferite de forţa de atracţie gravitaţională etc.

§9. MIŞCAREA UNUI PUNCT ÎN SPAŢIUL TRIDIMENSIONAL

În acest paragraf se defineşte momentul cinetic în raport cu o axă şi se demonstrează că la mişcarea într-un cîmp cu simetrie axială el se conservă.

*) Această problemă este luată din captivanta carte a lui A. A. Beleţchi, *Studii asupra mişcării obiectelor cosmice*, Nauka, Moscova, 1972.

Toate rezultatele obţinute pentru mişcarea în plan se extind uşor la mişcarea în spaţiu.

A. Cîmpul potenţial. Să considerăm mişcarea într-un cîmp potenţial E^3

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{unde } U = U(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in E^3.$$

Este adevărată *legea conservării energiei*:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \left(\text{unde } E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r)\right).$$

B. Cîmpul central. *Este adevărată legea conservării momentului cinetic* $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$. *La mişcarea într-un cîmp central, vectorul* $\mathbf{M}$ *nu îşi schimbă valoarea*:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0.$$

Orice cîmp central este potenţial (această afirmaţie se demonstrează la fel ca în plan) şi

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = 0,$$

deoarece $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$, iar vectorul $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ este coliniar cu vectorul $\mathbf{r}$, cîmpul fiind central.

Corolar. *În cazul mişcării într-un cîmp central, fiecare orbită din* E^3 *este plană.*

Demonstraţie. $(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = ([\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}], \mathbf{r}) = 0$ şi prin urmare $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{M}$ oricare ar fi t. Cum $\mathbf{M} = \text{const}$, fiecare orbită este conţinută în planul ortogonal lui $\mathbf{M}$*).

Rezultă că studierea mişcării într-un cîmp central în spaţiu se reduce la problema plană analizată în paragraful precedent.

*) Cazul $\mathbf{M} = 0$ este lăsat în seama cititorului.

P r o b l e m ă. Să se studieze mișcarea într-un cîmp central în spațiul euclidian de dimensiune n.

C. Cîmpul cu simetrie axială.

D e f i n i ț i e. Spunem că un cîmp vectorial în E^3 are *simetrie axială* dacă el este invariant în raport cu grupul rotațiilor spațiului, care lasă pe loc fiecare punct al unei anumite axe.

P r o b l e m ă. Demonstrați că dacă un cîmp are simetrie axială și este potențial, atunci energia sa potențială are, în coordonatele cilindrice r, φ, z expresia $U = U(r, z)$. În particular, din această expresie rezultă că vectorii cîmpului se află în plane care trec prin axa z.

Un exemplu de astfel de cîmp este cîmpul gravitațional creat de un corp de rotație.

Fie z o axă orientată de versorul $\mathbf{e}_z$ în spațiul euclidian orientat E^3, $\mathbf{F}$ un vector al spațiului liniar euclidian $\mathbf{R}^3$, O un punct de pe axa z și $\mathbf{r} = x - O \in R^3$ raza vectoare a punctului $x \in \mathbf{E}^3$ relativ la O (fig. 37).

D e f i n i ț i e. Se numește *momentul* M_z *al vectorului* F, *aplicat în punctul* $\mathbf{r}$, *în raport cu axa* z, proiecția pe această axă a momentului vectorului $\mathbf{F}$ în raport cu un punct arbitrar al axei z:

$$M_z = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \mathbf{F}]).$$

Numărul M_z nu depinde de alegerea punctului O pe axa z. Într-adevăr, să considerăm un alt punct O' pe axă. Atunci, datorită proprietății produsului mixt, avem: $M_z' = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}', \mathbf{F}]) = ([\mathbf{e}_z, \mathbf{r}'], \mathbf{F}) = ([\mathbf{e}_z, \mathbf{r}], \mathbf{F}) = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \mathbf{F}]) = M_z$.

O b s e r v a ț i e. M_z depinde de alegerea *sensului* axei z: dacă schimbăm pe $\mathbf{e}_z$ în $-\mathbf{e}_z$, M_z își schimbă semnul.

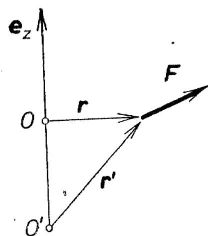


Fig. 37. Momentul vectorului F în raport cu axa z.

Teoremă. *În cazul mișcării într-un cîmp potențial cu simetrie axială în jurul axei z, momentul cantității de mișcare (momentul cinetic) relativ la axa z se conservă.*

D e m o n s t r a ț i e. $M_z = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}])$, $\dot{M}_z = (\mathbf{e}_z, [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}]) + (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}]) = 0$, deoarece $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ și prin urmare vectorii $\mathbf{r}$ și $\ddot{\mathbf{r}}$ sînt conținuți într-un plan care trece prin axa z, deci $[\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] \perp \mathbf{e}_z$.

O b s e r v a ț i e. Demonstrația rămîne valabilă pentru orice cîmp de forțe pentru care vectorul forță $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ este mereu conținut în planul generat de $\mathbf{r}$ și $\mathbf{e}_z$.

§10. MIȘCAREA UNUI SISTEM DE n PUNCTE

În acest paragraf se demonstrează legile conservării energiei, impulsului și momentului cinetic pentru sistemele de puncte materiale din E^3.

A. Forțe interioare și exterioare. Se numesc ecuațiile lui Newton ale mișcării unui sistem de n puncte materiale cu masele m_i și razelevectoare $\mathbf{r}_i \in E^3$ ecuațiile

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Vectorul $\mathbf{F}_i$ se numește *forța care acționează asupra punctului i.*

Forțele $\mathbf{F}_i$ se determină experimental. Observațiile arată că deseori, într-un sistem de două puncte, aceste forțe sînt egale ca mărime, acționează pe direcția dreptei care unește cele două puncte și sînt de sens opus (fig. 38).

Forțele de acest tip se numesc *forțe de interacție.* (Un exemplu — forțele de atracție universală).

Dacă toate forțele care acționează asupra punctelor sistemului sînt forțe de interacție între puncte, sistemul se numește *închis.*

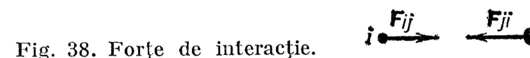


Fig. 38. Forțe de interacție.

Conform definiției, într-un sistem închis forța care acționează asupra punctului i este de forma

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij}.$$

Vectorul $\mathbf{F}_{ij}$ se numeşte forţa cu care punctul j acţionează asupra punctului i.

Cum forţele $\mathbf{F}_{ij}$ şi $\mathbf{F}_{ji}$ sînt opuse ca sens ($\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$), ele se pot scrie sub forma $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\mathbf{e}_{ij}$, unde $\mathbf{e}_{ij}$ este versorul direcţiei de la punctul i la punctul j, iar $f_{ij} = f_{ji}$ determină mărimea forţelor.

Dacă sistemul nu este închis, atunci forţele care acţionează asupra sa se pot reprezenta deseori sub forma

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}'_i,$$

unde $\mathbf{F}_{ij}$ sînt forţele de interacţie şi $\mathbf{F}'_i(\mathbf{r}_i)$ sînt aşa-numitele *forţe exterioare*.

Exemplu (fig. 39). Să împărţim un sistem închis dat în două părţi I şi II. Forţa $\mathbf{F}_i$ aplicată asupra punctului i din sistemul

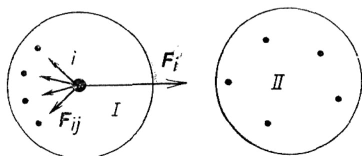


Fig. 39. Forţe interioare şi forţe exterioare.

I este determinată de forţele de interacţie din interiorul sistemului I şi de forţele care acţionează asupra punctului i din partea punctelor sistemului II, deci

$$F_i = \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} \mathbf{F}_{ij} + F'_i.$$

Forţa $F'_i(= \sum_{k\in II} \mathbf{F}_{ik})$ este exterioară în raport cu sistemul I.

B. Legea conservării impulsului.

Definiţie. Se numeşte *impulsul* (sau *cantitatea de mişcare* a) sistemului vectorul

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Teoremă. *Viteza de variaţie a impulsului este egală cu suma forţelor exterioare care acţionează asupra punctelor sistemului.*

Demonstraţie.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}'_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}'_i.$$

Într-adevăr, $\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} = 0$, deoarece, pentru forţele de interacţie, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

Corolarul 1. *Impulsul unui sistem închis se conservă.*

Corolarul 2. *Dacă suma forţelor exterioare care acţionează asupra sistemului este perpendiculară pe o axă x, atunci proiecţia P_x a impulsului pe axa x se conservă: $P_x =$* const.

Definiţie. Se numeşte *centrul de inerţie* al sistemului punctul

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Problemă. Demonstraţi că centrul de inerţie este corect definit: el nu depinde de alegerea originei de la care se măsoară razele vectoare.

Impulsul sistemului este egal cu impulsul unui punct material de masă $\sum_{i=1}^{n} m_i$ aflat în centrul de inerţie.

Într-adevăr, $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i$, de unde $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i$.

Putem formula acum teorema impulsului ca o teoremă privind mişcarea centrului de inerţie.

Teoremă. *Centrul de inerţie al sistemului se mişcă ca şi cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în acest centru şi toate forţele ar fi aplicate în el.*

Demonstraţie.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \text{ şi deci } \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

Corolar. *Dacă sistemul este închis, centrul său de inerţie se mişcă rectiliniu şi uniform.*

C. Legea conservării momentului cinetic.

Definiţie. Se numeşte *momentul cinetic al unui punct material relativ la un punct O*, momentul vectorului impuls al punctului relativ la punctul O:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}].$$

Se numeşte *momentul cinetic al sistemului relativ la punctul O* suma momentelor cinetice ale punctelor sistemului:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\dot{\mathbf{r}}_i].$$

Teoremă. *Viteza de variaţie a momentului cinetic al sistemului este egală cu suma momentelor forţelor exterioare care acţionează asupra punctelor sistemului.*

Demonstraţie.

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} [\dot{\mathbf{r}}_i, m_i\dot{\mathbf{r}}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i\ddot{\mathbf{r}}_i].$$

Primul termen este nul, iar cel de-al doilea este egal, conform ecuaţiilor lui Newton, cu

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i, \left(\sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}'_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}'_i].$$

Într-adevăr, suma momentelor a două forţe de interacţie opuse este nulă:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \Rightarrow [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ji}] = [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \mathbf{F}_{ij}] = 0.$$

Prin urmare, suma momentelor tuturor forţelor de interacţie este nulă:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i, \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ij}\right] = 0$$

şi deci $d\mathbf{M}/dt = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}'_i]$, c. c. t. d.

Corolarul 1 (legea conservării momentului cinetic). *Dacă sistemul este închis,* $\mathbf{M} = \text{const}$.

Să notăm cu $\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}'_i]$ suma momentelor forţelor exterioare. Conform teoremei precedente $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}$ şi deci rezultă

Corolarul 2. *Dacă momentul forţelor exterioare relativ la o axă z este nul, atunci componenta M_z se conservă.*

D. Legea conservării energiei.

Definiţie. Se numeşte *energia cinetică* a unui punct material de masă m mărimea

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Definiţie. *Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale* este suma energiilor cinetice ale punctelor:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2},$$

unde m_i sînt masele punctelor sistemului şi $\dot{\mathbf{r}}_i$ — vitezele lor.

Teoremă. *Variaţia (creşterea) energiei cinetice a sistemului este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forţelor care acţionează asupra punctelor sistemului.*

Demonstraţie.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i, m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{F}_i).$$

Prin urmare,

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{r}}_i, F_i)\, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

c.c.t.d.

Spațiul configurațiilor unui sistem de n puncte materiale în E^3 este produsul direct a n spații euclidiene: $E^{3n} = E^3 \times \ldots \times E^3$ și are și el o structură de spațiu euclidian. Să notăm cu $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ raza-vectoare a punctului din spațiul configurațiilor și cu $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n)$ vectorul forță. Teorema precedentă se poate pune sub forma:

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{r(t_0)}^{r(t_1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{F})\, dt.$$

Cu alte cuvinte,

Creșterea energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al «forței» 3n-dimensionale $\mathbf{F}$ *de-a lungul «drumului»* $\mathbf{r}(t)$ *din spațiul configurațiilor.*

D e f i n i ț i e. Un sistem se numește *potențial* (sau *conservativ*) dacă forțele depind numai de pozițiile punctelor sistemului: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$ și lucrul mecanic efectuat de $\mathbf{F}$ pe orice drum depinde numai de extremitățile drumului:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \Phi(M_1, M_2).$$

Teoremă. *Pentru ca sistemul să fie potențial este necesar și suficient ca să existe energia potențială, deci o funcție* $U = U(\mathbf{r})$ astfel încît

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

D e m o n s t r a ț i e. Vezi §4, B.

Teoremă. *Energia totală* $E = T + U$ *a unui sistem potențial se conservă în timpul mișcării:* $E(t_1) = E(t_0)$.

D e m o n s t r a ț i e. Din teorema precedentă

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{r(t_0)}^{r(t_1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}(t_0)) - U(\mathbf{r}(t_1)),$$

c.c.t.d.

Să presupunem că am împărțit toate forțele care acționează asupra punctelor sistemului în forțe de interacție și forțe exterioare:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}'_i,$$

unde $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$

Propoziție. *Dacă forțele de interacție depind numai de distanțele relative:* $f_{ij} = f_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$, *atunci ele sînt potențiale.*

D e m o n s t r a ț i e. Dacă sistemul este format din exact două puncte i și j, atunci se poate verifica ușor că energia potențială de interacție este dată de formula

$$U_{ij}(r) = -\int_{r_0}^{r} f_{ij}(\rho)\, d\rho.$$

Într-adevăr, în acest caz

$$-\frac{\partial U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_i} = f_{ij} \frac{\partial(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\mathbf{r}_i} = f_{ij}\mathbf{e}_{ij}.$$

Prin urmare, energia potențială de interacție a tuturor punctelor este

$$U(r) = \sum_{i>j} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - r_j|), \text{ c.c.t.d.}$$

Dacă forţele exterioare sînt şi ele potenţiale, deci $\mathbf{F}'_i = -\partial U'_i/\partial \mathbf{r}_i$, atunci sistemul este potenţial şi are energia potenţială totală

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i>j} U_{ij} + \sum_i U'_i.$$

Pentru un astfel de sistem energia cinetică se conservă:

$$E = T + U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} + \sum_{i>j} U_{ij} + \sum_i U'_i.$$

Dacă sistemul nu este potenţial, atunci, în general, energia totală nu se conservă.

Definiţie. Se numeşte *creşterea energiei nemecanice* E' micşorarea energiei mecanice, $E(t_0)-E(t_1)$:

$$E'(t_1) - E'(t_0) = E(t_0) - E(t_1).$$

Teoremă (legea conservării energiei). *Energia totală* $H = E+E'$ *se conservă.*

Este evident că această teoremă este o consecinţă imediată a definiţiei precedente. Importanţa ei constă în faptul că în sistemele fizice concrete, pentru mărimea energiei nemecanice E' există expresii în funcţie de celelalte mărimi fizice (temperatură etc.).

E. Exemplu. Problema celor două corpuri. Să presupunem că două puncte cu masele m_1 şi m_2 interacţionează cu potenţialul U, astfel încît ecuaţiile de mişcare se scriu sub forma

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2}, \quad U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Teoremă. *În problema celor două corpuri,* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ *variază la el ca şi la mişcarea unui punct de masă* $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ *în cîmpul cu potenţialul* $U(|\mathbf{r}|)$.

Să notăm cu $\mathbf{r}_0$ raza-vectoare a centrului de inerţie

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Conform teoremei de conservare a impulsului, punctul $\mathbf{r}_0$ se mişcă rectiliniu şi uniform.

Să considerăm acuma vectorul $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Înmulţind prima din ecuaţiile de mişcare cu m_2, pe cea de-a doua cu m_1 şi scăzînd-o pe a doua din prima, obţinem $m_1m_2\ddot{\mathbf{r}} = -(m_1+m_2)\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$, unde

$$U = U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|) = U(|\mathbf{r}|).$$

În particular, în cazul forţei de atracţie newtoniană punctele descriu în jurul centrului lor comun de inerţie secţiuni conice cu focarul în centrul de inerţie (fig. 40).

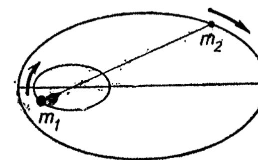


Fig. 40. Problema celor două corpuri.

Problemă. Să se determine semiaxa mare a elipsei pe care o descrie centrul Pămîntului în jurul centrului comun de inerţie al Pămîntului şi Lunii. Unde este situat acest centru de inerţie: în interiorul Pămîntului sau în exteriorul său? (Masa Lunii este de 81 de ori mai mică decît masa Pămîntului).

§11. CONSIDERENTE DE ASEMĂNARE

În anumite cazuri se pot obţine informaţii importante fără să se rezolve ecuaţiile de mişcare, plecînd numai de la forma acestora şi utilizînd aşa-numitele considerente de asemănare şi dimensiune. Esenţa acestor considerente constă într-o alegere a variaţiei etaloanelor (de timp, lungime, masă etc.) pentru care ecuaţiile de mişcare îşi păstrează forma.

A. Exemplu. Să presupunem că $\mathbf{r}(t)$ satisface ecuaţia

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Să punem $t_1 = \alpha t$, $m_1 = \alpha^2 m$. Atunci $\mathbf{r}(t_1)$ satisface ecuaţia

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t_1^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Cu alte cuvinte, *dacă micşorăm masa punctului de patru ori, atunci el poate parcurge aceeaşi orbită, în acelaşi cîmp de forţe, de două ori mai repede**).

B. Problemă. Să presupunem că se dă un cîmp central a cărui energie potenţială este o funcţie omogenă de grad ν:

$$U(\alpha r) = \alpha^{\nu} U(r), \qquad \forall \alpha > 0.$$

Să se demonstreze că *dacă curba γ este o orbită a mişcării unui punct în spaţiul euclidian în acest cîmp curba omotetică $\alpha\gamma$ este şi ea o orbită* (cu condiţii iniţiale corespunzătoare). Să se determine raportul dintre perioadele de rotaţie pe aceste orbite. Să se deducă de aici izocronismul oscilaţiilor pendulului ($\nu = 2$) şi legea a treia a lui Kepler ($\nu = -1$).

Problemă. Ştiind că raza (respectiv masa) unei planete este de α ori mai mică (respectiv de β ori mai mică) decît raza (respectiv masa) Pămîntului, să se determine de cîte ori sînt mai mici pe planetă acceleraţia gravitaţională, respectiv prima şi a doua viteză cosmică decît cele de pe Pămînt.

Răspuns. $\gamma = \beta\alpha^{-2}$, $\delta = \sqrt{\beta/\alpha}$.

Spre exemplu, pentru Lună $\alpha \approx 3{,}7$, $\beta \approx 81$. Prin urmare, acceleraţia forţei gravitaţionale este aproximativ 1/6 din cea de pe Pămînt ($\gamma \approx 6$), iar vitezele cosmice, aproximativ 1/5 din cele corespunzătoare Pămîntului ($\delta \approx 4{,}7$).

Problemă**). Animalele din pustiu trebuie să înfrunte distanţele mari dintre izvoarele de apă. Cum depinde intervalul de timp maximal pe care un animal poate să-l alerge de dimensiunile L ale animalului?

Răspuns. Direct proporţional cu L.

Rezolvare. Rezerva de apă este direct proporţională cu volumul corpului, deci cu L^3; pierderea de apă prin transpiraţie este proporţională cu suprafaţa, deci cu L^2. Prin urmare, durata maximală de alergare de la un izvor la altul este direct *proporţională cu* L.

Să observăm că distanţa maximală pe care o poate parcurge animalul creşte şi ea proporţional cu L (vezi problema următoare).

Problemă**). Cum depinde viteza cu care aleargă un animal pe un teren neaccidentat sau într-o zonă muntoasă de dimensiunile L ale animalului?

Răspuns. Pe teren neaccidentat $\sim L^0$, la munte $\sim L^{-1}$.

*) Aici se presupune că U nu depinde de m. În cîmpul gravitaţional energia potenţială U este proporţională cu m şi prin urmare perioada nu depinde de masa m a punctului în mişcare.

**) J. Smith, *Idei matematice în biologie*, Cambridge, 1968.

Rezolvare. Puterea dezvoltată de animal este proporţională cu L^2 (randamentul muşchilor este constant-aproximativ 25%; restul de 75% din energia chimică se transformă în căldură; disiparea de căldură este proporţională cu suprafaţa corpului, deci cu L^2; prin urmare, puterea utilă este proporţională cu L^2).

Forţa de rezistenţă a aerului este direct proporţională cu pătratul vitezei şi aria secţiunii transversale; puterea necesară pentru a învinge această rezistenţă este deci proporţională cu v^2L^2v. Prin urmare, $v^3L^2 \sim L^2$ şi deci $v \sim L^0$. Într-adevăr, vitezele de alergare pe un teren neaccidentat ale animalelor care nu sînt mai mici ca un iepure şi mai mari ca un cal nu depind practic de dimensiunile animalului.

Pentru a alerga pe munte, este necesară o putere $mgv \sim L^3v$. Deoarece puterea dezvoltată este $\sim L^2$, obţinem $v \sim L^{-1}$. Într-adevăr, un cîine urcă cu uşurinţă o culme, în timp ce un cal încetineşte pasul.

Problemă*). Cum depinde de dimensiunile animalului înălţimea săriturii sale?

Răspuns. $\sim L^0$.

Rezolvare. Energia necesară pentru o săritură de înălţime h este proporţională cu L^3h, iar lucrul mecanic efectuat de forţa F a muşchilor este proporţională cu FL. Forţa F este proporţională cu L^2 (deoarece rezistenţa oaselor este proporţională cu suprafaţa secţiunii lor). Prin urmare, $L^3h \sim L^2L$ şi deci înălţimea săriturii nu depinde de dimensiunile animalului. Într-adevăr, cangurul şi şoarecele săritor sar aproximativ la aceeaşi înălţime.

*) J. Smith, *op. cit.*

Partea a II-a
MECANICA LAGRANGEANĂ

Mecanica lagrangeană descrie mişcarea unui sistem mecanic cu ajutorul spaţiului configuraţiilor. Spaţiul configuraţiilor unui sistem mecanic are o structură de varietate diferenţiabilă. Pe o varietate diferenţiabilă acţionează grupul difeomorfismelor. Noţiunile şi teoremele fundamentale ale mecanicii lagrangeene (chiar dacă ele sînt formulate în termeni de coordonate locale) sînt invariante în raport cu acest grup*).

Un sistem mecanic lagrangean este definit de o varietate („spaţiul configuraţiilor") şi o funcţie pe fibrarea tangentă a acestei varietăţi („funcţia lui Lagrange" sau „lagrangeanul" sistemului).

Orice grup cu un parametru de difeomorfisme ale spaţiului configuraţiilor, care lasă invariantă funcţia lui Lagrange, defineşte o lege de conservare (deci o integrală primă a ecuaţiilor de mişcare).

Sistemul newtonian potenţial este un caz particular de sistem lagrangean (în acest caz spaţiul configuraţiilor este euclidian, iar funcţia lui Lagrange este diferenţa dintre energia cinetică şi energia potenţială).

Punctul de vedere lagrangean permite studierea completă a unei serii de probleme importante ale mecanicii; teoria oscilaţiilor mici şi dinamica solidului rigid constituie doar două exemple.

---

*) Şi chiar în raport cu un grup mai larg de transformări care înglobează şi transformări ale timpului.

CAPITOLUL 3

PRINCIPIUL VARIAŢIONAL

În acest capitol se arată că mişcările unui sistem newtonian potenţial sînt extremale ale unui principiu variaţional, aşa-numitul „principiu al minimei acţiuni al lui Hamilton".

Din această observaţie rezultă multe corolare importante, de exemplu o metodă rapidă de a scrie ecuaţiile de mişcare într-un sistem de coordonate curbilinii, precum şi o serie de concluzii cu caracter calitativ, cum ar fi, de exemplu, teorema de reîntoarcere în vecinătatea punctului iniţial.

În acest capitol se utilizează spaţiul numeric n-dimensional. Un vector $\mathbf{x}$ al acestui spaţiu este un ansamblu de numere $(x_1, \ldots, x_n)$. În concordanţă cu această notaţie, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ înseamnă $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ şi $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, $\mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$.

§12. CALCULUL VARIAŢIONAL

În cele ce urmează ne vor fi necesare cîteva rezultate din calculul variaţional. O tratare mai amănunţită se găseşte, spre exemplu, în manualele lui M. A. Lavrentiev şi L. A. Liusternik, *Curs de calcul variaţional*, M. L., 1938, sau G. E. Şilov, *Analiza matematică (Curs special)*, Fizmatghiz, 1961.

Calculul variaţional se ocupă de determinarea extremelor unor funcţii al căror domeniu de definiţie este un spaţiu de dimensiune infinită : spaţiul curbelor. Funcţiile de acest tip poartă numele de *funcţionale*.

Un exemplu de funcțională este lungimea curbelor din planul euclidian:

$$\gamma = \{t, x : x = x(t); \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\};$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt.$$

În general, se numește funcțională orice aplicație a spațiului curbelor în dreapta reală.

Să considerăm o curbă γ' „apropiată" de γ:

$\gamma' = \{t, x : x = x(t) + h(t)\}$. O vom nota cu $\gamma' = \gamma + h$. Să considerăm și creșterea funcționalei Φ, $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$ (fig. 41).

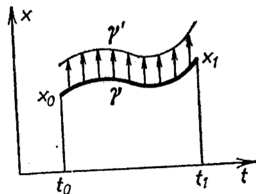


Fig. 41. Variație a unei curbe.

A. Variația.

Definiție. Spunem că funcționala Φ este diferențiabilă*) dacă $\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = F + R$, unde funcționala F depinde liniar de h (deci, pentru γ fixată, $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$, $F(ch) = cF(h)$) iar $R(h, \gamma) = O(h^2)$ în sensul că din $|h| < \varepsilon$ și $\left|\frac{dh}{dt}\right| < \varepsilon$ rezultă $|R| < C\varepsilon^2$. Partea liniară $F(h)$ a creșterii se numește *diferențiala* lui Φ.

Se poate arăta că dacă funcționala Φ este diferențiabilă, atunci diferențiala sa este univoc definită. Diferențiala unei funcționale mai este denumită și *variația* ei, iar h se numește variație a curbei γ.

*) Ar fi trebuit să indicăm pe ce clasă de curbe este definită funcționala Φ și ce spațiu liniar parcurge h. Putem considera, de exemplu, că în ambele cazuri este vorba de funcții indefinit diferențiabile.

Exemplu. Fie $\gamma = \{t, x : x = x(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ o curbă în planul t, x; notăm $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Fie $L = L(a, b, c)$ o funcție diferențiabilă de trei variabile. Formăm funcționala

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt.$$

De exemplu, în cazul particular $L = 1 + b^2$ se obține lungimea curbei.

Teoremă. *Funcționala* $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt$ *este diferențiabilă, iar diferențiala ei este dată de formula*

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] h\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Demonstrație.

$$\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} [L(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)]\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\right] dt + O(h^2) = F(h) + R, \text{ unde}$$

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\right] dt, \ R = O(h^2).$$

Integrînd prin părți, obținem

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_0}^{t_1}, \text{ c.c.t.d.}$$

B. Extremale.

D e f i n i ț i e. Se numește *extremală* a funcționalei diferențiabile $\Phi = \Phi(\gamma)$ o curbă γ pentru care $F(h, \gamma) = 0$ pentru orice h.

(La fel ca în cazul în care γ este un punct staționar al unei funcții dacă în acest punct diferențiala ei este egală cu zero).

Teoremă. *Pentru ca o curbă $\gamma: x = x(t)$ să fie extremală a funcționalei $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt$ în spațiul curbelor care trec prin punctele $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, este necesar și suficient ca de-a lungul curbei $x(t)$ să aibă loc relația*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Lemă. *Dacă funcția diferențiabilă $f(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, satisface $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)\, dt = 0$ pentru orice funcție continuă*) $h(t)$ pentru care $h(t_0) = h(t_1) = 0$, atunci $f(t) \equiv 0$,*

D e m o n s t r a ț i a l e m e i. Fie t^*, $t_0 < t^* < t_1$, astfel încît $f(t^*) > 0$. f fiind continuă, există o vecinătate $\Delta: t_0 < t^* - d < t^* < t^* + d < t_1$, a lui t astfel încît $f(t) > c > 0\ \forall\, t \in \Delta$. Fie h o funcție continuă cu $h(t) = 0, t \notin \Delta$, $h(t) > 0, \forall\, t \in \Delta$ și $h(t) = 1$, $\forall\, t$ cu $t^* - d/2 < t < t^* + d/2$.

În aceste condiții este evident că $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, h(t)\, dt \geqslant dc > 0$ (fig. 42).

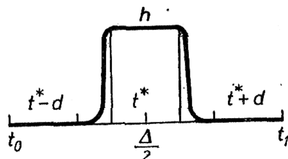


Fig. 42. Construcția funcției h.

*) Sau cel puțin pentru orice funcție diferențiabilă h.

Am ajuns la o contradicție și deci rezultă că $f(t^*) = 0$, $\forall\, t^*$, $t_0 < t^* < t_1$.

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i. Conform teoremei precedente

$$F(h) = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\right] h\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Termenul fără integrală este nul, deoarece $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Dacă γ este o extremală, $F(h) = 0$ pentru orice h cu $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Prin urmare, pentru orice funcție $h(t)$ cu această proprietate, $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, h(t)\, dt = 0$, unde $f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}$. Conform lemei $f(t) \equiv 0$. Reciproc, dacă $f(t) \equiv 0$, este evident că $F(h) \equiv 0$, c.c.t.d.

E x e m p l u. Să verificăm că extremalele lungimii sînt drepte. Avem:

$$L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

și deci ecuația extremalelor este

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}\right) = 0,$$

avînd soluțiile

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c, \quad \dot{x} = c_1, \quad x = c_1 t + c_2.$$

C. Ecuația Euler-Lagrange.

D e f i n i ț i e. Ecuația

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

se numește *ecuația Euler — Lagrange pentru funcționala*

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt.$$

Fie acum $\mathbf{x}$ vector al spațiului numeric n-dimensional $\mathbf{R}^n$, $\gamma = \{t, \mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ o curbă în spațiul $(n+1)$ dimensional $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ și $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție diferențiabilă de $2n+1$ variabile.

Teorema următoare se demonstrează la fel ca cea precedentă.

Teoremă. *Pentru ca curba* γ *să fie extremală a funcționalei* $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\, dt$, *definită pe spațiul curbelor* $\mathbf{x}(t)$ *care unesc două puncte date* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ *și* $(t_1, \mathbf{x}_1)$ *este necesar și suficient ca de-a lungul ei să fie satisfăcute ecuațiile Euler — Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

Acesta este un sistem de n ecuații de ordinul doi și soluțiile depind de $2n$ constante arbitrare. Pentru definirea acestora se utilizează cele $2n$ condiții $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Problemă. Să se dea exemple în care există mai multe extremale care unesc două puncte date și exemple în care nu există extremale.

D. Observație importantă. *Proprietatea unei curbe* γ *de a fi extremală a unei funcționale nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.*

De exemplu, una și aceeași funcțională — lungimea curbei — este dată în coordonatele carteziene și coordonatele polare de formule diferite :

$$\Phi_{cart} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt,\quad \Phi_{pol} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt.$$

Extremalele sînt însă aceleași — dreptele din plan. Ecuațiile dreptelor în coordonatele carteziene diferă de cele în coordonatele polare, fiind date de funcții diferite : $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, respectiv $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Și unele și celelalte satisfac însă ecuația Euler — Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

cu diferența că în primul caz $x_{cart} = (x_1, x_2)$; $L_{cart} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$, iar în cel de-al doilea, $x_{pol} = (r, \varphi)$; $L_{pol} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$.

Prin urmare, putem scrie ușor în orice coordonate ecuația diferențială a familiei tuturor dreptelor.

Problemă. Scrieți ecuația diferențială a familiei tuturor dreptelor din plan în coordonatele polare.

§13. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

În acest paragraf indicăm principiul variațional ale cărui extremale sînt soluțiile ecuațiilor newtoniene de mișcare într-un cîmp potențial.

Să comparăm ecuațiile dinamicii datorate lui Newton

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{\mathbf{r}}_i) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \tag{1}$$

cu ecuațiile Euler — Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0. \tag{2}$$

A. Principiul minimei acțiuni al lui Hamilton.

Teoremă. *Mișcările sistemului mecanic* (1) *coincid cu extremalele funcționalei* $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$, *unde* $L = T - U$ *este diferența dintre energia cinetică și energia potențială.*

Demonstrație. Deoarece $U = U(r)$ și $T = \Sigma\, m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2/2$, avem $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i\dot{\mathbf{r}}_i$, $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$.

Corolar. *Fie* $(q_1, \ldots, q_{3n})$ *un sistem arbitrar de coordonate în spaţiul configuraţiilor unui sistem de n puncte materiale. Atunci* $\mathbf{q}$ *variază cu timpul conform ecuaţiilor Euler — Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \text{ unde } L = T - U.$$

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, mişcarea este o extremală a funcţionalei $\int L\,dt$. Prin urmare, în orice sistem de coordonate este satisfăcută ecuaţia Euler — Lagrange, scrisă în acest sistem de coordonate.

Definiţie. În mecanică se utilizează următoarele denumiri: $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U$ *funcţia lui Lagrange sau lagrangeanul sistemului;* q_i — *coordonatele generalizate;* $\dot{q}_i$ — *vitezele generalizate;* $\partial L/\partial \dot{q}_i = p_i$ — *impulsurile generalizate;* $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ = *forţele generalizate;* $\int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt$ — *acţiunea;* $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ — *ecuaţiile lui Lagrange.*

Ultima teoremă se numeşte „principiul minimei acţiuni în forma lui Hamilton“ deoarece, în anumite cazuri de mişcări, $\mathbf{q}(t)$ este nu numai o extremală, ci realizează şi valoarea minimă a funcţionalei acţiune $\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$.

B. Exemplele cele mai simple.

Exemplul 1. Pentru un punct material care se mişcă liber în E^3 obţinem

$$L = T = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2};$$

în coordonatele carteziene $q_i = r_i$,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Aici vitezele generalizate sînt componentele vectorului viteză, impulsurile generalizate $p_i = m_i\dot{q}_i$ — componentele vectorului impuls; ecuaţiile lui Lagrange coincid cu ecuaţiile lui Newton $\frac{dp}{dt} = 0$. Extremalele sînt drepte. Din principiul lui Hamilton rezultă că dreptele nu sînt numai curbele cele mai scurte $\left(\text{adică extremalele funcţionalei lungime } \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}\,dt\right)$, ci şi extremalele acţiunii $\int_{t_0}^{t_1}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\,dt$.

Problemă. Demonstraţi că o astfel de extremală este un minim.

Exemplul 2. Să considerăm *mişcarea unui punct într-un cîmp central în plan*, în coordonatele polare $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. Din relaţia $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$ obţinem expresia energiei cinetice $T = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ şi lagrangeanul $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$, $U = U(q_1)$.

Impulsurile generalizate sînt $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, deci $p_1 = m\dot{r}$, $p_2 = mr^2\dot{\varphi}$.

Prima ecuaţie a lui Lagrange $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1}$ capătă forma

$$m\ddot{r} = mr^2\dot{\varphi} - \frac{\partial U}{\partial r},$$

obţinută deja la §8.

Deoarece $q_2 = \varphi$ nu intră în L, avem $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ şi deci a doua ecuaţie Lagrange se scrie $\dot{p}_2 = 0$, $p_2 =$ const. Ea reprezintă legea conservării momentului cinetic.

În cazul general al unui cîmp care nu este central, $U = U(r, \varphi)$ am fi obţinut

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Această ecuaţie se poate rescrie sub forma $\frac{d}{dt}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_z) = \mathbf{N}$, unde $\mathbf{N} = ([\mathbf{r}, \mathbf{F}], \mathbf{e}_z)$, $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$. (*Viteza de variaţie a momentului cinetic relativ la axa z ortogonală la planul mişcării este egală cu momentul forţei* **F** *în raport cu axa z*).

Într-adevăr, avem $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi = -(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = -(\mathbf{F}, \mathbf{e}_r)\, dr - r\,(\mathbf{F}, \mathbf{e}_\varphi)\, d\varphi$ şi deci $-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r\,(\mathbf{F}, \mathbf{e}_\varphi) = r([\mathbf{e}_r, \mathbf{F}], \mathbf{e}_z) = ([\mathbf{r}, \mathbf{F}], \mathbf{e}_z)$.

Exemplul analizat sugerează următoarea generalizare a legii conservării momentului cinetic.

D e f i n i ţ i e . O coordonată q_i se numeşte *ciclică* dacă ea nu apare explicit în funcţia lui Lagrange : $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Teoremă. *Impulsul generalizat corespunzător unei coordonate ciclice se conservă:* $p_i = \text{const.}$

D e m o n s t r a ţ i e . Conform ecuaţiei lui Lagrange

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ c.c.t.d.}$$

§14. TRANSFORMAREA LEGENDRE

Transformarea Legendre este un procedeu matematic ajutător care constă în trecerea de la funcţiile definite pe un spaţiu liniar la funcţii definite pe spaţiul dual. Transformarea Legendre este înrudită cu dualitatea proiectivă şi coordonatele tangenţiale din geometria proiectivă sau construcţia dualului unui spaţiu Banach din analiză. Ea se întîlneşte frecvent în fizică (un exemplu îl constituie definirea mărimilor termodinamice).

A. Definiţie. Fie $y = f(x)$ o funcţie convexă : $f''(x) > 0$.

Se numeşte *transformata Legendre* a funcţiei f o nouă funcţie g de o nouă variabilă p, care se construieşte în modul următor

(fig. 43). Să trasăm în planul x, y graficul funcţiei f. Fie p un număr real dat. Să considerăm dreapta $y = p\,x$. Să considerăm punctul $x = x(p)$ în care curba se află la distanţă maximă pe verticală de această dreaptă : funcţia $px - f(x) = F(p, x)$ are în punctul $x(p)$ un maxim pentru p fixat. Atunci, prin definiţie, $g(p) = F(p, x(p))$.

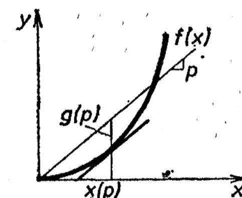


Fig. 43. Transformarea Legendre.

Punctul $x(p)$ se determină din condiţia de extrem : $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, deci $f'(x) = p$. Funcţia f fiind convexă, punctul $x(p)$ este unic*).

P r o b l e m ă . Să se arate că domeniul de definiţie al lui g poate fi un punct, un segment sau o rază, chiar dacă funcţia f este definită pe întreaga dreaptă reală. Demonstraţi că dacă funcţia f este definită pe un segment, atunci funcţia g este definită pe întreaga axă p.

B. Exemple.

E x e m p l u l 1. Fie $f(x) = x^2$. Atunci $F(p, x) = px - x^2$, $x(p) = \frac{p}{2}$, $g(p) = \frac{1}{4} p^2$.

E x e m p l u l 2. Fie $f(x) = \frac{mx^2}{2}$. Atunci $g(p) = \frac{p^2}{2m}$.

E x e m p l u l 3. Fie $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Atunci $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, unde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ $(\alpha > 1,\ \beta > 1)$.

E x e m p l u l 4. Fie $f(x)$ o linie frîntă convexă. Atunci şi $g(p)$ este o linie frîntă convexă ; vîrfurilor lui $f(x)$ îi corespund segmente ale lui $g(p)$, iar segmentelor lui $f(x)$ —

*) Dacă există.

vîrfuri ale lui $g(p)$. Spre exemplu, unghiul reprezentat în fig. 44 se transformă într-un segment prin transformarea Legendre.

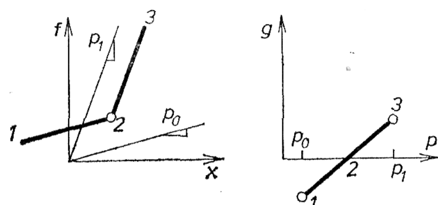


Fig. 44. Transformarea Legendre transformă un unghi într-un segment.

C. Involutivitatea. Vom considera că funcția f este diferențiabilă de numărul necesar de ori, iar $f''(x) > 0$. Se verifică ușor că transformarea Legendre duce funcțiile convexe în funcții convexe. Din acest motiv, ea poate fi aplicată de două ori.

Teoremă. *Transformarea Legendre este involutivă, deci pătratul ei este aplicația identică: dacă f trece în g prin transformarea Legendre, atunci transformata Legendre a lui g este din nou f.*

D e m o n s t r a ț i e . Pentru a efectua transformarea Legendre a funcției g de variabilă p trebuie, conform definiției, să considerăm o nouă variabilă independentă (să o notăm cu x), să formăm funcția

$$G(x, p) = x\,p - g(p),$$

să găsim punctul $p(x)$ în care G are maxim :

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 0, \text{ deci } g'(p) = x.$$

Atunci transformata Legendre a lui $g(p)$ va fi funcția de x egală cu $G(x, p(x))$.

Să arătăm că $G(x, p(x)) = f(x)$. În acest scop, să observăm că $G(x, p) = xp - g(p)$ are o interpretare geometrică simplă : este ordonata tangentei la graficul funcției $f(x)$, care are panta p, corespunzătoare abscisei x (fig. 45). Într-adevăr, pentru p fixat, funcția $G(x, p)$ este liniară în x și $\partial G/\partial x = p$; de asemenea, pentru $x = x(p)$, avem $G(x, p) = x\,p - g(p) = f(x)$, conform definiției lui $g(p)$.

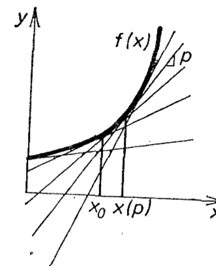


Fig. 45. Caracterul involutiv al transformării Legendre.

Să fixăm acum pe $x = x_0$ și să facem pe p să varieze. Atunci valorile lui $G(x, p)$ vor fi ordonatele punctelor de intersecție ale dreptei $x = x_0$ cu tangentele la graficul lui $f(x)$ care au o înclinare egală cu p. Din convexitatea graficului rezultă că toate aceste tangente se află sub curbă și prin urmare, maximul lui $G(x, p)$ pentru $x(p_0)$ fixat este egal cu $f(x)$ (și se atinge pentru $p_0 = p(x_0) = f'(x_0)$), c.c.t.d.

Corolar*). *Fie dată familia de drepte $y = px - g(p)$. Atunci înfășurătoarea ei are ecuația $y = f(x)$, unde f este transformata Legendre a funcției g.*

D. Inegalitatea lui Young.

D e f i n i ț i e . Două funcții f și g care sînt fiecare transformata Legendre a celeilalte se numesc *duale în sensul lui Young.*

Conform definiției transformării Legendre, $F(x, p) = px - f(x) \leqslant g(p)$ pentru orice x și p. De aici rezultă *inegalitatea lui Young*

$$p \cdot x \leqslant f(x) + g(p).$$

E x e m p l u l 1. Dacă $f(x) = x^2/2$, atunci $g(p) = p^2/2$ și obținem inegalitatea cunoscută :

$$p \cdot x \leqslant \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

pentru orice x și p.

---

*) Recunoaștem aici teoria „ecuației lui Clairault".

Exemplul 2. Dacă $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, atunci $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ şi obţinem inegalitatea lui Young.

$$p \cdot x \leqslant \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

pentru orice $x > 0$, $p > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

E. Cazul mai multor variabile. Fie acum $f(x)$ o funcţie convexă de variabilă vectorială $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (forma pătratică $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$, $\mathrm{d}\mathbf{x}$ este pozitiv definită). Atunci se numeşte transformata Legendre a lui f funcţia $g(\mathbf{p})$ de variabila vectorială $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ definită de o egalitate analoagă cu cea din definiţia unidimensională: $g(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p})) = \max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, $F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$.

Toate raţionamentele precedente şi în particular inegalitatea lui Young se extind fără modificări la acest caz.

Problemă. Fie $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie convexă pe spaţiul liniar $\mathbf{R}^n$. Să notăm cu $\mathbf{R}^{n*}$ spaţiul liniar dual. Să se arate că formulele precedente definesc o funcţie bine determinată $g: \mathbf{R}^{n*} \longrightarrow \mathbf{R}$ (în ipoteza că $df|_{\mathbf{x}}$ parcurge întreg spaţiul $\mathbf{R}^{n*}$ atunci cînd $\mathbf{x}$ parcurge pe $\mathbf{R}^n$).

Problemă. Fie f o formă pătratică: $f(\mathbf{x}) = \Sigma f_{ij} x_i x_j$. Să se arate că transformata Legendre a lui f este o nouă formă pătratică $g(\mathbf{p}) = \Sigma g_{ij} p_i p_j$ şi valorile celor două forme în punctele corespunzătoare coincid (fig. 46):

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = g(\mathbf{p}), \quad g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

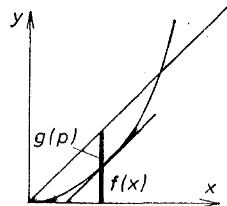


Fig. 46. Transformata Legendre a unei forme pătratice.

§15. ECUAŢIILE LUI HAMILTON

Prin transformarea Legendre, sistemul lagrangean de n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi trece într-un sistem remarcabil simetric de $2n$ ecuaţii de ordinul întîi — *sistemul ecuaţiilor lui Hamilton* (sau al *ecuaţiilor canonice*).

A. Echivalenţa ecuaţiilor Lagrange şi Hamilton. Să considerăm sistemul de ecuaţii Lagrange $\dot{\mathbf{p}} = \partial L/\partial \mathbf{q}$, unde $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$, definit de funcţia Lagrange $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pe care o presupunem convexă*) în raport cu al doilea argument $\dot{\mathbf{q}}$.

Teoremă. *Sistemul de ecuaţii ale lui Lagrange este echivalent cu un sistem de $2n$ ecuaţii de ordinul întîi — ecuaţiile lui Hamilton:*

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}};$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

unde $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ este transformata Legendre a funcţiei lui Lagrange considerată ca funcţie de $\dot{\mathbf{q}}$.

Demonstraţie. Conform definiţiei, transformata Legendre a lui $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ în raport cu variabila $\dot{\mathbf{q}}$ este funcţia $H(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\,\dot{\mathbf{q}} - L(\dot{\mathbf{q}})$ în care $\dot{\mathbf{q}}$ se exprimă prin $\mathbf{p}$ din formula $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ şi care depinde în plus de parametrii $\mathbf{q}, t$. Această funcţie H se numeşte *funcţia lui Hamilton* sau *hamiltonianul* sistemului.

Diferenţiala totală a hamiltonianului

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\mathrm{d}\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

este egală cu diferenţiala totală a lui $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L$ pentru $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$:

$$\mathrm{d}H = \dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{d}\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

*) În aplicaţii, această funcţie convexă este de obicei o formă pătratică pozitiv definită.

Cele două expresii ale lui H trebuie să coincidă. Prin urmare

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ținînd seama de ecuațiile lui Lagrange, $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial q}$, obținem ecuațiile lui Hamilton.

Prin urmare, dacă $\mathbf{q}(t)$ satisface ecuațiile lui Lagrange, atunci $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ satisface ecuațiile lui Hamilton. Reciproca se demonstrează similar. Rezultă echivalența sistemelor Lagrange și Hamilton, c.c.t.d.

O b s e r v a ț i e. Teorema demonstrată se referă la toate problemele variaționale, nu numai la ecuațiile lagrangeene ale mecanicii.

B. Funcția lui Hamilton și energia.

E x e m p l u . Să presupunem totuși că studiem ecuațiile mecanicii și că lagrangeanul se scrie sub forma obișnuită $L = T - U$, unde energia cinetică T este o formă pătratică în raport cu $\dot{\mathbf{q}}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q, t)\,; \quad U = U(\mathbf{q}).$$

Teoremă. *În ipotezele de mai sus, funcția lui Hamilton H este energia totală $H = T + U$.*

Demonstrația se bazează pe o lemă privind transformata Legendre a unei forme pătratice.

Lemă. *Valorile unei forme pătratice $f(\mathbf{x})$ și cele ale transformatei sale Legendre $g(\mathbf{p})$ în punctele corespunzătoare coincid* : $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{p})$.

E x e m p l u . Pentru forma $f(x) = x^2$ obținem o proprietate cunoscută a tangentei la parabolă. Pentru forma $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ avem $p = mx$ și $g(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mx^2}{2} = f(x)$.

D e m o n s t r a ț i a l e m e i . Conform teoremei lui Euler privind funcțiile omogene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}\right) = 2f.$$

Prin urmare, $g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}\right) - f(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, c.c.t.d.

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i . Raționînd la fel ca în lemă, obținem $H = \mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}} - L = 2T - (T - U) = T + U$, c.c.t.d.

E x e m p l u. Pentru mișcarea unidimensională

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

În acest caz $T = \dot{q}^2/2$, $U = U(q)$, $p = \dot{q}$, $H = \frac{p^2}{2} + U(q)$ și ecuațiile lui Hamilton devin

$$\dot{p} = p,$$

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Acest exemplu permite reamintirea rapidă a acelei ecuații care trebuie să aibă semnul minus dintre cele două ecuații ale lui Hamilton.

Din teorema de echivalență a ecuațiilor de mișcare cu ecuațiile hamiltoniene rezultă o serie de concluzii importante. Spre exemplu, legea conservării energiei capătă o formă simplă.

Corolarul 1. *Este adevărată egalitatea* $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = \partial H/\partial t$. *În particular, pentru sistemele pentru care hamiltonianul nu depinde explicit de timp* ($\partial H/\partial t \equiv 0$) *are loc legea conservării hamiltonianului:* $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \text{const.}$

D e m o n s t r a ț i e . Să considerăm modul în care variază H de-a lungul unei traiectorii : $H = H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t)$. Avem, conform ecuațiilor lui Hamilton, $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, c.c.t.d.

C. Coordonate ciclice. Cînd am considerat cazul unui cîmp central, am arătat că prin introducerea coordonatelor polare problema se reduce la una unidimensională. Se dovedește că orice

simetrie a unei probleme, care permite o astfel de alegere a sistemului de coordonate $\mathbf{q}$ încît hamiltonianul să nu depindă de o parte din coordonatele $\mathbf{q}$, conduce la determinarea unor integrale prime și la reducerea problemei la o problemă cu un număr mai mic de coordonate (dimensiuni).

D e f i n i ț i e . Dacă coordonata q_1 nu apare explicit în hamiltonianul $H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1 q_2, \ldots, q_n, t)$ și deci $\frac{\partial H}{\partial q_1} \equiv 0$, atunci această coordonată se numește *ciclică* (termenul provine din cazul particular în care $q_1 = \varphi$ este coordonata unghiulară într-un cîmp central). Evident, coordonata q_1 este ciclică dacă și numai dacă ea nu apare explicit în funcția lui Lagrange ($\partial L/\partial q_1 \equiv 0$). Din caracterul hamiltonian al ecuațiilor de mișcare rezultă

Corolarul 2. *Fie q_1 o coordonată ciclică. Atunci impulsul generalizat p_1 este o integrală primă. Celelalte $2n-2$ coordonate variază la fel ca într-un sistem cu $n-1$ coordonate independente $q_2, \ldots, q_n$ și cu hamiltonianul*

$$H(p_2, \ldots, p_n, q_2, \ldots, q_n, t, c)$$

dependent de parametrul $c = p_1$.

D e m o n s t r a ț i e . Să notăm $\mathbf{p}' = (p_2, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q}' = (q_2, \ldots, q_n)$. Atunci sistemul lui Hamilton se scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}' = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}'}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_1 = 0.$$

Ultima ecuație arată că $p_1 = \text{const}$. Prin urmare, în sistemul de ecuații pentru $\mathbf{p}'$ și $\mathbf{q}'$, mărimea p_1 apare numai ca un parametru în expresia hamiltonianului. După ce acest ultim sistem de $2n-2$ ecuații se rezolvă, ecuația pentru q_1 devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_1 = f(t), \text{ unde } f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H(p_1, \mathbf{p}'(t), \mathbf{q}'(t), t)$$

și se integrează ușor.

Aproape toate problemele de mecanică rezolvate au fost integrate cu ajutorul corolarului 2.

Corolarul 3. *Orice sistem cu două grade de libertate ($n = 2$) care are o coordonată ciclică se integrează.* Într-adevăr, în cazul $n = 2$, sistemul pentru $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ este unidimensional și se integrează imediat cu ajutorul integralei prime $H(p', q') = \text{const}$.

§16. TEOREMA LUI LIOUVILLE

Curentul definit de ecuațiile hamiltoniene conservă volumul în spațiul fazelor. În particular, din acest rezultat se deduce că într-un sistem hamiltonian stabilitatea nu poate fi de tip asimptotic.

Pentru a simplifica, să considerăm cazul în care hamiltonianul nu depinde explicit de timp : $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

A. Curentul în spațiul fazelor.

D e f i n i ț i e . Spațiul de dimensiune $2n$ cu coordonatele $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ se numește *spațiul fazelor*.

E x e m p l u . În cazul $n = 1$ este vorba de planul fazelor sistemului $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, considerat în §4.

La fel ca în acest exemplu simplu, membrul drept al ecuațiilor lui Hamilton definește un cîmp de vectori pe spațiul fazelor : în punctul $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ al spațiului fazelor este definit vectorul $2n$—dimensional $(-\partial H/\partial \mathbf{q}, \partial H/\partial \mathbf{p})$.

Să presupunem că fiecare soluție a ecuațiilor lui Hamilton poate fi prelungită la întreaga axă a timpului*).

D e f i n i ț i e . Se numește *curent* (definit în sistemul cu hamiltonianul H) grupul de transformări cu un parametru ale spațiului fazelor

$$g^t : (\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0)) \mapsto (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)),$$

unde $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ este soluția ecuațiilor lui Hamilton cu condițiile inițiale $\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{q}(0)$.

---

*) Pentru aceasta este suficient, spre exemplu, ca mulțimile de nivel constant ale hamiltonianului H să fie compacte.

P r o b l e m ă . Să se arate că $\{g^t\}_{t\in \mathbf{R}}$ este un grup.

B. Teorema lui Liouville. 1) *Curentul hamiltonian conservă volumul: pentru orice domeniu D din spațiul fazelor avem* (fig. 48)

$$\text{volum } g^t(D) = \text{volum } D.$$

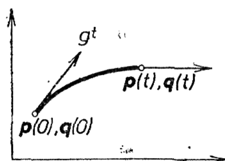


Fig. 47. Curent.

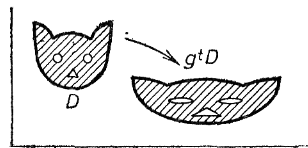


Fig. 48. Conservarea volumului.

Vom demonstra de fapt o afirmație mai generală 2) care îi aparține tot lui Liouville.

Fie dat un sistem de ecuații diferențiale ordinare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ale cărei soluții se prelungesc la întreaga axă a timpului. Fie $\{g^t\}$ grupul de transformări corespunzător:

$$g^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) + O(t^2) \quad (t \to 0). \tag{1}$$

Fie $D(0)$ un domeniu în spațiul $\{x\}$ și $v(0)$ volumul său,

$$v(t) = \text{volum } D(t), \; D(t) = g^t(D(0)).$$

2) *Dacă* $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv 0$, *atunci* g^t *conservă volumul:* $v(t) = v(0)$.

C. Demonstrație.

Lema 1. *Este adevărată relația*

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \int\limits_{D(0)} \operatorname{div} \mathbf{f}\, \mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n).$$

D e m o n s t r a ț i e . Conform definiției jacobianului, pentru orice t avem

$$v(t) = \int\limits_{D(0)} \det \left(\frac{\partial g^t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathrm{d}x.$$

Calculînd pe $\partial g^t(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ după formula (1), obținem, cînd $t \to 0$

$$\frac{\partial g^t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = E + t\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + O(t^2), \; E = (\delta_{ij}).$$

Vom utiliza acum un rezultat cunoscut din algebră:

Lema 2. *Pentru orice matrice* $A = \|a_{ij}\|$ *este adevărată relația*

$$\det(E + tA) = 1 + t\operatorname{tr} A + O(t^2), \; t \to 0,$$

unde $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *este urma matricii A (suma elementelor de pe diagonală).*

(Demonstrația lemei 2 se obține în mod direct din dezvoltarea determinantului: se obține 1, apoi n termeni care îl conțin pe t și ceilalți termeni, care conțin pe t^2, t^3 etc.).

Prin urmare,

$$\det \frac{\partial g^t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 1 + t \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right) + O(t^2).$$

Dar $\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{f}$. Rezultă deci

$$v(t) = \int\limits_{D(0)} [1 + t \operatorname{div} \mathbf{f} + O(t^2)]\, \mathrm{d}x,$$

ceea ce demonstrează lema 1.

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i 2). Deoarece pentru $t = t_0$ se obține același lucru ca și pentru $t = 0$, relație lemei 1 se poate scrie sub forma

$$\left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \int\limits_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{f}\, \mathrm{d}x.$$

Cum însă $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$, rezultă $\mathrm{d}v(t)/\mathrm{d}t = 0$, c. c. t. d.

În particular, pentru sistemul lui Hamilton avem

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{f}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right) \equiv 0.$$

Teorema lui Liouville este deci demonstrată.

Problemă. Să se extindă teorema lui Liouville la cazul sistemelor neautonome ($H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ sau $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$).

Problemă. Să se demonstreze formula lui Liouville

$$W = W_0 e^{\int_0^t \operatorname{tr} A \, dt}$$

pentru wronskianul sistemului liniar $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$.

Teorema lui Liouville are numeroase aplicații.

Problemă. Să se demonstreze că într-un sistem hamiltonian nu pot exista, în spațiul fazelor, poziții de echilibru asimptotic stabile sau ciclii limită asimptotic stabili.

Teorema lui Liouville are aplicații deosebit de importante în mecanica statistică.

De asemenea, teorema lui Liouville permite să se aplice la studierea sistemelor mecanice metodele așa-numitei teorii ergodice *). Vom da aici numai exemplul cel mai simplu.

D. Teorema de recurență a lui Poincaré. *Fie g o transformare continuă bijectivă a spațiului euclidian, care păstrează volumul. Să presupunem că domeniul mărginit D este invariant la g: $g(D) = D$.*

Atunci pentru orice punct $\mathbf{x}_0 \in D$ și orice vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0$ există un punct $\mathbf{x} \in U$ care se reîntoarce în domeniul U: există $n > 0$ astfel încît $g^n\mathbf{x} \in U$.

Această teoremă se aplică, în particular, curentului g^t al unui sistem bidimensional cu un potențial $U(x_1, x_2)$ care crește la

*) Vezi, de exemplu, lucrările lui P. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea, New York, 1958; V. I. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

infinit. În acest caz, un domeniu mărginit invariant din spațiul fazelor este definit de condiția (fig. 49)

$$D = \{\mathbf{p}, \mathbf{q} : T + U \leqslant E\}.$$

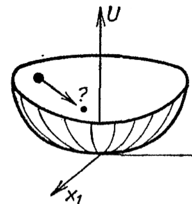


Fig. 49. Nu se știe cum se va mișca bila în ceașca nesimetrică; conform teoremei lui Poincaré, știm însă că bila va reveni în vecinătatea poziției inițiale.

Teorema lui Poincaré poate fi întărită demonstrînd că aproape orice punct mobil se reîntoarce de nenumărate ori în vecinătatea poziției sale inițiale. Acest rezultat constituie una din concluziile generale ce se pot trage cu privire la caracterul mișcării. Detaliile mișcării nu sînt cunoscute nici măcar în cazul simplu

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Următoarea concluzie a teoremelor lui Liouville și Poincaré este oarecum paradoxală: dacă se înlătură peretele care separă o cameră vidată de o cameră plină cu un gaz, atunci după un anumit interval de timp, moleculele gazului se vor strînge din nou în prima cameră (fig. 50).

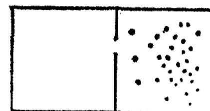


Fig. 50. Moleculele de gaz se reîntorc în prima cameră.

Dezlegarea paradoxului constă în a observa că „anumitul interval de timp'' este mai mare decît vîrsta sistemului solar.

Demonstrația teoremei lui Poincaré. Să considerăm imaginile vecinătății U prin iteratele lui g (fig. 51)

$$U, g(U), g^2(U), \ldots, g^n(U), \ldots$$

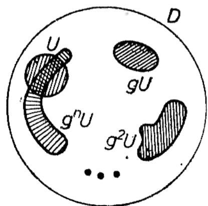


Fig. 51. Teorema de reîntoarcere.

Toate aceste domenii au un volum pozitiv. Dacă ele nu s-ar intersecta de loc, volumul lui D ar fi infinit (ori am presupus că D este mărginit). Prin urmare, există $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $k > l$, astfel încît

$$g^k(U) \cap g^l(U) \neq \emptyset.$$

Rezultă că $g^{k-l}(U) \cap U \neq \emptyset$. Fie $g^{k-l}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in U$. Atunci $\mathbf{x} \in U$, $g^n\mathbf{x} \in U$ $(n = k - l)$ c.c.t.d.

E. Aplicații ale teoremei lui Poincaré.

Exemplul 1. Fie D un cerc și $g: D \to D$ rotația de unghi α. Dacă $\alpha = 2\pi \frac{m}{n}$, atunci g^n este transformarea identică și teorema este evidentă. Dacă α este incomensurabil cu 2π, din teorema lui Poincaré rezultă

$$\forall \delta > 0,\ \exists n : |g^n x - x| < \delta \text{ (fig. 52)}$$

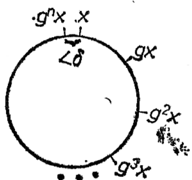


Fig. 52. Imaginile prin iteratele lui g formează o mulțime densă pe cerc.

De aici rezultă ușor următoarea

Teoremă. *Dacă $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$, atunci mulțimea punctelor de forma $g^k x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ este densă*) în cercul D.*

*) Mulțimea A este densă în mulțimea B dacă orice vecinătate a oricărui punct din B intersectează pe A.

Problemă. Demonstrați că în cîmpul central $U = r^4$ fiecare orbită este sau închisă sau densă în inelul mărginit de cele două cercuri $r = r_{\min}$ și $r = r_{\max}$.

Exemplul 2. Fie D torul bidimensional T^2 și φ_1, φ_2 — coordonatele unghiulare pe el (longitudinea și latitudinea) (fig. 53).

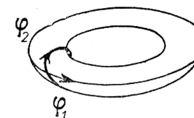


Fig. 53. Tor.

Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale ordinare pe tor

$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1,\ \dot{\varphi}_2 = \alpha_2.$$

Evident, div $\mathbf{f} = 0$ și curentul corespunzător

$$g^t : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1 + \alpha_1 t, \varphi_2 + \alpha_2 t)$$

conservă volumul $d\varphi_1 d\varphi_2$. Din teorema lui Poincaré rezultă ușor următoarea

Teoremă. *Dacă numărul α_1/α_2 este irațional, atunci «înfășurătoarea» torului $t \mapsto g^t(\varphi_1, \varphi_2)$ este densă pe torul D.*

Problemă. Să se demonstreze că dacă frecvența ω este irațională, atunci figura lui Lissajous (x = const, $y = \cos \omega t$) este densă în pătratul $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

Exemplul 3. Fie D torul n-dimensional T^n, deci produsul direct a n cercuri

$$D = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = T^n.$$

Un punct al acestui tor n-dimensional este caracterizat de cele n coordonate unghiulare $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Fie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ și $g^t : T^n \mapsto T^n$ transformarea

$$\varphi \mapsto \varphi + t\alpha;$$

ea conservă volumul $d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$.

Problemă. În ce condiții asupra lui α este densă pe T^n: a) traiectoria $g^t\varphi$, b) traiectoria $g^k\varphi$ ($t \in \mathbf{R}$ aparține grupului numerelor reale $\mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ aparține grupului numerelor întregi $\mathbf{Z}$).

Exemplul 4. Să considerăm șirul dat de prima cifră a numerelor 2^n: 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4,...

Problemă. Apare în acest șir cifra 7? Care cifră apare mai des, 7 sau 8? În ce raport?

CAPITOLUL 4

MECANICA LAGRANGEANĂ PE VARIETĂŢI

În acest capitol se introduc noţiunile de varietate diferenţiabilă şi fibrare tangentă. Funcţia lui Lagrange, dată pe fibrarea tangentă, defineşte pe varietate un „sistem olonom'' lagrangean. Sistemele de puncte materiale supuse la legături—de exemplu, pendulul sau solidul rigid — reprezintă cazuri particulare de astfel de sisteme.

§17. LEGĂTURI OLONOME

În acest paragraf se definesc sistemele de puncte materiale supuse la legături olonome.

A. Un exemplu. Fie γ o curbă netedă în plan. Dacă în vecinătatea lui γ există un cîmp de forţe foarte puternic, îndreptat spre curbă, atunci punctul mobil se va afla tot timpul în vecinătatea lui γ. În cazul limită al unui cîmp de forţe de intensitate infinită, punctul va fi silit să rămînă pe curba γ. În acest caz se spune că sistemul *este supus la o legătură* (fig. 54).

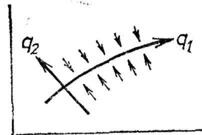


Fig. 54. Interpretarea unei legături ca un cîmp de forţe de intensitate infinită.

Pentru a da o formulare riguroasă, să introducem în vecinătatea lui γ coordonatele unghiulare $q_1, q_2 : q_1$ de-a lungul lui γ, q_2 — distanţa pînă la curba γ.

Să considerăm sistemul cu energia potenţială

$$U_N = N \cdot q_2^2 + U_0 (q_1, q_2)$$

care depinde de parametrul N (care va tinde apoi la infinit) (fig. 55).

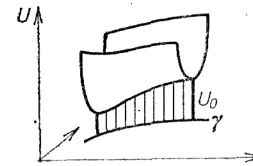


Fig. 55. Energia potenţială U_N.

Să considerăm nişte condiţii iniţiale pe γ :

$$q_1(0) = q_1^0,\ \dot q_1(0) = \dot q_1^0,\ \ q_2(0) = 0,\ \dot q_2(0) = 0.$$

Să notăm cu $q_1 = \varphi(t, N)$ funcţia care descrie variaţia coordonatei q_1 la mişcarea cu aceste condiţii iniţiale în cîmpul U_N.

Teoremă. *Atunci cînd $N \to + \infty$, există limita*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi(t, N) = \Psi(t).$$

Funcţia limită $q_1 = \Psi(t)$ satisface ecuaţia lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot q_1}\right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_1}$$

unde $L_*(q_1, \dot q_1) = T \Big|_{q_2 = \dot q_2 = 0} - U_0 \Big|_{q_2 = 0}$ (T — *energia cinetică de mişcare de-a lungul lui* γ).

Prin urmare, atunci cînd $N \to \infty$, sistemul de ecuaţii Lagrange pentru q_1 şi q_2 generează o ecuaţie Lagrange pentru $q_1 = \Psi(t)$.

Exact acelaşi rezultat se obţine dacă se consideră în locul planului spaţiul de configuraţii de dimensiune $3n$ al unui sistem

de n puncte materiale, cu metrica $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \, d\mathbf{r}_i^2$ (m_i — masele punctelor), iar în locul curbei γ — o suprafaţă (subvarietate) γ a spaţiului de dimensiune $3n$; în loc de q_1 luăm un sistem de coordonate $\mathbf{q}_1$ pe γ; în loc de $\mathbf{q}_2$, un sistem de coordonate $\mathbf{q}_2$ în direcţiile ortogonale la γ. Dacă energia potenţială are forma

$$U = U_0(\mathbf{q}_1) + N\mathbf{q}_2^2,$$

atunci, cînd $N \to \infty$, mişcarea pe γ este definită de ecuaţiile Lagrange cu funcţia lui Lagrange

$$L_* = T\Big|_{\mathbf{q}_2 = \dot{\mathbf{q}}_2 = 0} - \mathbf{U}_0\Big|_{\mathbf{q}_2 = 0}.$$

B. Definiţia sistemelor cu legături. Nu vom demonstra aici teorema formulată*) şi nici nu o vom utiliza. Ea a fost necesară numai pentru a justifica următoarea

Definiţie. Fie γ o subvarietate de dimensiune k în spaţiul de configuraţii $3n$ - dimensional al punctelor $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ cu masele $m_1, \ldots, m_n$. Fie $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_k)$ un sistem oarecare de coordonate pe $\gamma : \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$. Sistemul descris de ecuaţiile

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad L = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + U(\mathbf{q})$$

se numeşte *sistem de n puncte supuse la 3n — k legături olonome ideale.* Subvarietatea (suprafaţa) γ se numeşte *spaţiul configuraţiilor sistemului cu legături.*

Dacă subvarietatea γ este dată de $l = 3n - k$ ecuaţii funcţional independente $f_1(\mathbf{r}) = 0, \ldots, f_l(\mathbf{r}) = 0$, se spune că sistemul este supus la legăturile $f_1 = 0, \ldots f_l = 0$.

Legătura olonomă ar putea fi definită şi ca fiind limită a unui sistem cu energie potenţială mare (în vecinătatea lui γ). Importanţa legăturilor olonome pentru mecanică constă în faptul, demonstrat de experienţă, că multe sisteme mecanice fac parte din această clasă cu o precizie mai mare sau mai mică.

*) Demonstraţia se bazează pe observaţia că, datorită conservării energiei, punctul mobil nu se poate îndepărta de γ la o distanţă mai mare ca const $\times N^{-1/2}$, mărime care tinde la zero cînd $N \to \infty$.

În cele ce urmează, pentru comoditate, vom numi legăturile olonome ideale pur şi simplu legături. În această carte nu vor fi considerate legături de alt tip.

§18. VARIETĂŢI DIFERENŢIABILE

Spaţiul configuraţiilor unui sistem cu legături este o varietate diferenţiabilă. În acest paragraf sînt enumerate cele mai simple date privind varietăţile diferenţiabile*).

A. Definiţia varietăţii diferenţiabile. Pentru a înzestra o mulţime M cu o structură de varietate diferenţiabilă, este necesar ca M să fie „acoperită'' cu o familie finită sau numărabilă de *hărţi*, astfel încît fiecare punct al lui M să fie reprezentat în cel puţin o hartă.

Se numeşte *hartă* pe mulţimea M un domeniu deschis U al spaţiului numeric euclidian $\{\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)\}$ împreună cu o aplicaţie bijectivă φ pe o submulţime a lui M : $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$.

Dacă un punct oarecare al lui M se reprezintă simultan în două hărţi $\varphi : U \to \varphi(U)$ şi $\varphi' : U' \to \varphi'(U')$, atunci acest lucru este valabil şi pentru nişte vecinătăţi V şi V' ale acestui punct în fiecare din hărţi (fig. 56). Prin urmare, apare o aplicaţie $\varphi'^{-1} \cdot \varphi$:

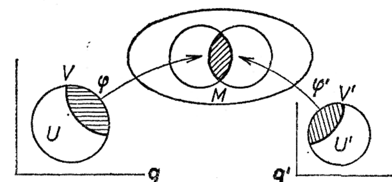


Fig. 56. Hărţi compatibile.

*) Pentru o tratare mult mai amănunţită, cititorul poate consulta lucrările : **A. Albu, D. Papuc,** *Elemente de geometrie diferenţială globală,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
D. Burghelea, Th. Hangan, H. Moscovici, A. Verona, *Introducere în topologia diferenţială,* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.
C. Teleman, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
C. Teleman, *Geometrie diferenţială locală şi globală,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1974. (*N. T.*)

$V \to V'$ a unei părţi $V \subset U$ a primei hărţi pe o parte $V' \subset U'$ a celei de-a doua.

Aceasta este o aplicaţie a unui domeniu V al spaţiului numeric euclidian $\{\mathbf{q}\}$ pe un domeniu V' al spaţiului numeric euclidian $\{\mathbf{q}'\}$ şi este dată de n funcţii de n variabile $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q})$ $(\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}'))$. Hărţile U şi U' se numesc compatibile dacă aceste funcţii sînt diferenţiabile*).

Se numeşte *atlas* pe M o mulţime de hărţi compatibile care acoperă pe M. Două atlase pe M se numesc *echivalente* dacă reuniunea lor este din nou un atlas pe M.

O structură de varietate diferenţiabilă pe M este o clasă de echivalenţă de atlase pe M. Vom considera aici numai varietăţi conexe (o varietate este conexă dacă ea nu este reuniunea a două varietăţi disjuncte). În cazul unei astfel de varietăţi, toate dimensiunile hărţilor coincid; numărul n astfel obţinut se numeşte dimensiunea varietăţii M.

Dacă $x \in M$, se numeşte vecinătate a lui x în M imaginea prin aplicaţia $\varphi : U \to M$ a unei vecinătăţi a reprezentării $\varphi^{-1}(x)$ a punctului x în harta U. (Atît harta, cît şi vecinătatea lui $\varphi^{-1}(x)$ sînt arbitrare; în acest mod se defineşte o bază a unui sistem de vecinătăţi ale lui x şi deci o topologie pe M). Vom presupune că oricare două puncte diferite ale varietăţii M au nişte vecinătăţi disjuncte.

B. Exemple.

Exemplul 1. Spaţiul euclidian $\mathbf{R}^n$ este o varietate; unul din atlase este dat de o singură hartă id : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Exemplul 2. Sfera $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ are o structură de varietate diferenţiabilă; unul din atlase este format din două hărţi (U_i, φ_i), $i = 1,2$, date de proiecţia stereografică din Polul Nord, respectiv Sud (fig. 57). O construcţie similară funcţionează şi în cazul sferei n-dimensionale

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : \sum_{=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}.$$

Exemplul 3. Să considerăm pendulul plan. Spaţiul său de configuraţii — cercul S^1 — este o varietate diferenţiabilă. Atlasul uzual este dat de coordonata unghiulară $\varphi : \mathbf{R}^1 \to S^1$, $U_1 = (-\pi, \pi)$, $U_2 = (0, 2\pi)$ (fig. 58).

*) Prin diferenţiabilitate se înţelege aici diferenţiabilitatea de clasă C^r — funcţii de r ori diferenţiabile. Valoarea exactă a lui r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ nu este esenţială (de exemplu, putem considera tot timpul că $r = \infty$).

Exemplul 4. Spaţiul configuraţiilor unui pendul matematic „sferic" este sfera bidimensională S^2 (fig. 58).

Exemplul 5. Spaţiul configuraţiilor unui „pendul plan dublu" este produsul a două cercuri, deci torul bidimensional $T^2 = S^1 \times S^1$ (fig. 58).

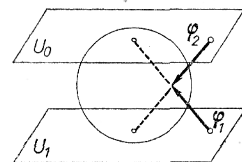


Fig. 57. Un atlas al sferei.

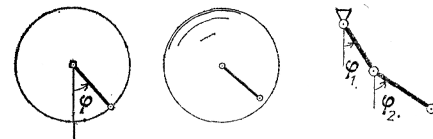


Fig. 58. Pendul plan, sferic şi dublu.

Exemplul 6. Spaţiul configuraţiilor unui „pendul sferic dublu" este produsul direct a două sfere $S^2 \times S^2$.

Exemplul 7. Spaţiul configuraţiilor unui segment rigid din planul q_1, q_2 este varietatea $\mathbf{R}^2 \times S^1$ cu coordonatele q_1, q_2, q_3 (fig. 59). Ea are un atlas din două hărţi.

Exemplul 8. Un triunghi dreptunghic rigid AOB se poate roti în jurul vîrfului O. Poziţia triunghiului este dată de trei numere. Într-adevăr, direcţia $OA \in S^2$ este dată de două numere şi atunci cînd OA este dată, se mai poate roti $OB \in S^1$ în jurul axei OA (fig. 60).

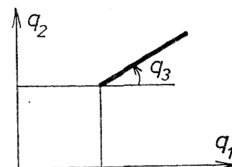


Fig. 59. Spaţiul configuraţiilor unui segment din plan.

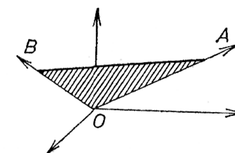


Fig. 60. Spaţiul configuraţiilor unui triunghi.

Poziţiei triunghiului AOB i se poate asocia un reper ortonormat drept (ca orientare): $\mathbf{e}_1 = \frac{OA}{|OA|}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{OB}{|OB|}$, $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$.

Corespondenţa poziţie — reper este bijectivă şi prin urmare poziţia triunghiului este caracterizată de o matrice ortogonală de ordinul trei cu determinantul 1.

Mulţimea tuturor matricilor de ordinul trei este spaţiul de dimensiune 9, $\mathbf{R}^9$. Cele şase condiţii de ortogonalitate definesc două varietăţi tridimensionale de matrici ortogonale, corespunzătoare valorilor $+1$ şi -1 ale determinantului. Rotaţiile spaţiului euclidian tridimensional (care au determinantul $+1$) formează un grup care se notează cu SO(3).

Prin urmare, spaţiul configuraţiilor triunghiului AOB este grupul SO (3).

Problemă. Să se arate că varietatea SO(3) este homeomorfă cu spaţiul proiectiv real tridimensional.

Definiţie. Dimensiunea spaţiului configuraţiilor unui sistem se numeşte numărul de grade de libertate ale sistemului.

Exemplul 9. Să considerăm un sistem alcătuit din k bare unite prin articulaţii astfel încît să formeze un lanţ închis.

Problemă. Cîte grade de libertate are acest sistem?

Exemplul 10. *Varietate scufundată.* Se spune că mulţimea M este o subvarietate de dimensiune k scufundată în spaţiul euclidian E^n (fig. 61) dacă $M \subset E^n$ şi pentru orice punct $x \in M$ există o vecinătate U a lui x în E^n şi $n-k$ funcţii $f_1 : U \to \mathbf{R}, \ldots$ $\ldots, f_{n-k} : U \to \mathbf{R}$ astfel încît vectorii grad $f_1, \ldots,$ grad f_{n-k} sînt liniar independenţi în fiecare punct din U şi $U \cap M =$ $= \{y \in U \mid f_1(y) = \ldots = f_{n-k}(y) = 0\}$.

Se vede uşor (cum?) că pe M se poate defini o structură naturală de varietate diferenţiabilă, deci se pot introduce coordonate locale în vecinătatea fiecărui punct $x \in M$.

Se poate demonstra că orice varietate diferenţiabilă se poate scufunda într-un spaţiu euclidian.

În exemplul 8. SO(3) se poate scufunda în $\mathbf{R}^9$.

Problemă. Să se demonstreze că SO(3) se scufundă în $\mathbf{R}^9$, demonstrînd în acest fel şi că SO(3) este varietate.

C. Spaţiul tangent. Dacă M este o varietate de dimensiune k scufundată în E^n, atunci în fiecare punct $x \in M$ este definit un spaţiu tangent la M în x, TM_x. Şi anume, TM_x este complementul ortogonal la spaţiul generat de grad $f_1(x), \ldots,$ grad $f_{n-k}(x)$ (fig. 62). Vectorii spaţiului tangent TM_x la M în x se numesc *vectori tangenţi* (la M în x). Aceşti vectori pot fi definiţi şi direct, şi anume ca vectorii viteză ai curbelor de pe M (care trec prin x):

$$\dot{\mathbf{x}} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \text{ unde } \varphi(0) = x \text{ şi } \varphi(t) \in M.$$

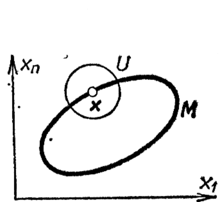


Fig. 61. Subvarietate scufundată.

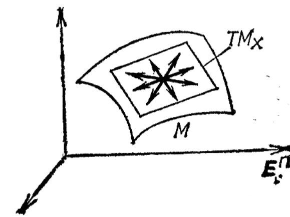


Fig. 62. Spaţiu tangent.

Vectorii tangenţi pot fi definiţi şi intrinsec, fără a utiliza o scufundare a lui M în E^n.

Fie $\gamma(t)$ şi $\tilde{\gamma}(t)$ două curbe pe varietatea diferenţiabilă M, care trec la $t = 0$ printr-un punct dat $x \in M : \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = x$. Spunem că γ şi $\tilde{\gamma}$ sînt curbe *echivalente* dacă există o hartă $\varphi : U \to M$ astfel încît $x \in \varphi(U)$ şi $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(\varphi^{-1} \circ \gamma)(t) - (\varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma})(t)}{t} = 0$. Dacă această ultimă relaţie are loc într-o hartă, atunci ea are loc în toate hărţile (arătaţi!).

Definiţie. Se numeşte *vector tangent* la varietatea M în punctul $x \in M$ o clasă de echivalenţă de curbe $\gamma(t), \gamma(0) = x$.

Operaţiile de înmulţire a unui vector tangent cu un număr şi de adunare a vectorilor tangenţi se definesc cu uşurinţă. Mulţimea vectorilor tangenţi la M în punctul x are o structură de spaţiu liniar TM_x. Acest spaţiu se numeşte spaţiul tangent la M în punctul x.

Pentru varietăţile scufundate, prima definiţie şi cea intrinsecă conduc la acelaşi rezultat. Definiţia intrinsecă are avantajul de a funcţiona şi pentru varietăţile abstracte, care nu sînt scufundate în nici un spaţiu euclidian.

Definiţie. Fie U o hartă a unui atlas pe M, cu coordonatele $q_1, \ldots, q_n$ (acestea sînt de fapt componentele aplicaţiei $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U \subset \mathbf{R}^n$; $\varphi : U \to M$). Dacă $\xi \in TM_x$, $x \in \varphi(U)$, se numesc componentele lui ξ (în coordonatele $q_1, \ldots, q_n$) numerele $\xi_i = d\gamma_i/dt \Big|_{t=0}$ unde $\gamma_i = q_i \circ \gamma$ dau reprezentarea unei curbe γ din clasa ξ.

D. Fibrarea tangentă. Reuniunea tuturor spaţiilor tangente la varietatea M în toate punctele ei, $\bigcup\limits_{x \in M} TM_x$, are o structură naturală de varietate diferenţiabilă de dimensiune de două ori mai mare ca a lui M.

Această varietate se numeşte *fibrarea tangentă* a varietăţii M şi se notează cu TM. Orice punct al lui TM este un vector $\boldsymbol{\xi}$ tangent la M într-un punct x. Pe TM se pot introduce coordonate locale în modul următor. Fie $q_1, \ldots, q_n$ coordonatele locale pe varietatea M şi funcţiile $\xi_1, \ldots, \xi_n$ care dau componentele vectorului tangent în acest sistem de coordonate. Atunci cele $2n$ funcţii $(q_1, \ldots, q_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ definesc pe TM un sistem de coordonate locale.

Aplicaţia $p: TM \to M$ care asociază fiecărui vector tangent $\xi \in TM$ acel punct $x \in M$ pentru care $\xi \in TM_x$ se numeşte *proiecţia canonică* a fibrării tangente. Imaginea reciprocă prin proiecţia p a unui punct $x \in M$ coincide cu spaţiul tangent TM_x. Acest spaţiu se mai numeşte şi *fibra peste* x a fibrării tangente.

E. Varietatea riemanniană. Dacă M este o varietate scufundată în spaţiul euclidian, atunci metrica spaţiului euclidian permite măsurarea pe M a lungimilor curbelor, unghiurilor dintre vectori, a volumelor etc.

Toate aceste mărimi se exprimă prin lungimile vectorilor tangenţi, deci utilizînd o formă pătratică pozitiv definită dată pe fiecare spaţiu tangent TM_x (fig. 63):

$$TM_x \to \mathbf{R},\ \xi \to \langle \xi, \xi \rangle_x.$$

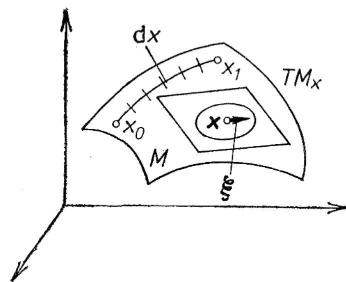


Fig. 63. Metrică riemanniană.

Spre exemplu, lungimea unei curbe γ pe M se exprimă cu ajutorul acestei forme ca $l(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\langle dx, dx \rangle_x}$, sau dacă curba este dată parametric:

$$\gamma : [t_0, t_1] \to M,\ t \to x(t) \in M,$$

atunci

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle_{x(t)}}\ dt.$$

Definiţie. Se numeşte *varietate riemanniană* o varietate diferenţiabilă M pe care este definită, pe fiecare spaţiu tangent TM_x o formă pătratică pozitiv definită $\langle\, ,\rangle_x$ (care depinde diferenţiabil de $x \in M$). Această formă pătratică (de fapt, este vorba de o familie diferenţiabilă, parametrizată de M, de forme pătratice) se numeşte *metrică riemanniană* pe varietate.

Observaţie. Dacă U este o hartă pe M cu coordonatele $q_1, \ldots, q_n$, atunci, în această hartă, metrica riemanniană este dată de formula

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, dq_i\, dq_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

unde $dq_i(\xi) = \xi_i$ sînt coordonatele vectorului tangent $\xi \in TM_x$.

Bineînţeles, funcţiile $a_{ij}(q)$ se presupun diferenţiabile de numărul necesar de ori.

F. Diferenţiala unei aplicaţii. Fie M, N varietăţi diferenţiabile şi $f: M \to N$ o aplicaţie. Aplicaţia f se numeşte *diferenţiabilă* dacă în orice sistem de coordonate locale pe M şi N ea este dată de funcţii diferenţiabile.

Definiţie. Se numeşte diferenţiala aplicaţiei diferenţiabile $f: M \to N$ în punctul $x \in M$ aplicaţia liniară a spaţiilor tangente

$$f_{*x} : TM_x \to TN_{f(x)}$$

definită în felul următor (fig. 64).

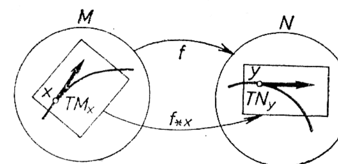


Fig. 64. Diferenţiala unei aplicaţii.

Fie $\mathbf{v} \in TM_x$ şi $\varphi : \mathbf{R} \to M$, $\varphi(0) = x$ o curbă din clasa lui $\mathbf{v} : \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}$. Atunci $f_{*x}(\mathbf{v})$ este vectorul viteză al curbei $f \circ \varphi : \mathbf{R} \to N$:

$$f_{*x}(\mathbf{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\varphi(t)).$$

P r o b l e m ă. Să se arate că vectorul $f_{*x}(\mathbf{v})$ nu depinde de alegerea curbei φ, ci numai de vectorul $\mathbf{v}$.

P r o b l e m ă. Să se arate că aplicaţia $f_{*x}: TM_x \to TNf(x)$ este liniară.

P r o b l e m ă. Fie $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ coordonatele locale pe M în vecinătatea punctului $x \in M$ şi $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ coordonatele locale pe N în vecinătatea punctului $y=f(x)$. Fie $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ ansamblul componentelor vectorului tangent $\mathbf{v}\in TM_x$ în coordonatele x_i şi $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ ansamblul componentelor vectorului $f_{*x}(\mathbf{v})$ în coordonatele y_i. Să se arate că

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}\xi, \text{ deci } \eta_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\xi_j.$$

Toate aplicaţiile f_{*x}, $x\in M$ definesc împreună o aplicaţie unică a fibrărilor tangente la varietăţile M şi N:

$$f_*: TM \to TN, f_*(\mathbf{v}) = f_{*x}(\mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v}\in TM_x.$$

P r o b l e m ă. Să se arate că aplicaţia f_* este diferenţiabilă.

P r o b l e m ă. Fie $f: M\to N$ şi $g: N\to K$ aplicaţii diferenţiabile, $h = g\circ f: M\to K$. Să se arate că $h_* = g_* \circ f_*$.

§19. SISTEMUL DINAMIC LAGRANGEAN

În acest paragraf se defineşte noţiunea de sistem dinamic lagrangean pe o varietate. Sistemul cu legături olonome este un caz particular de astfel de sistem.

A. Definiţia sistemului lagrangean. Fie M o varietate diferenţiabilă, TM fibrarea ei tangentă şi $L: TM \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă. O aplicaţie diferenţiabilă $\gamma: \mathbf{R}\to M$ se numeşte *mişcare descrisă de sistemul lagrangean cu varietatea configuraţiilor* M *şi lagrangeanul (funcţia lui Lagrange)* L, dacă γ este extremală a funcţiei

$$\Phi(\gamma) = \int_{t0}^{t1} L(\dot\gamma)\mathrm{d}t,$$

unde $\dot\gamma$ este vectorul viteză, $\dot\gamma(t)\in TM_{\gamma(t)}$*).

*) Acest vector este formal şi riguros definit astfel: fie $t\in\mathbf{R}$; spaţiul $T\mathbf{R}_t$ se identifică natural cu $\mathbf{R}$ şi deci numărul $1\in\mathbf{R}$ se poate considera ca vector tangent $1\in T\mathbf{R}_t$ la varietatea $\mathbf{R}$ în punctul t. Atunci $\dot\gamma(t)=\gamma_{*t}(1)$, $\gamma_{*t}: T\mathbf{R}_t \to TM_{\gamma(t)}$. (*N. T.*)

E x e m p l u. Fie M un domeniu în spaţiul numeric $\mathbf{R}^n$ cu coordonatele $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$. Lagrangeanul $L: TM\to\mathbf{R}$ se scrie ca o funcţie de cele $2n$ coordonate $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}: L = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$. Aşa cum am arătat în §12, coordonatele punctului mobil variază în timp conform ecuaţiilor lui Lagrange.

Corolar. *În timpul mişcării* $\gamma(t)$ *descrise de sistemul lagrangean pe varietatea* M, *coordonatele locale* $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ *ale punctului* $\gamma(t)$ *satisfac ecuaţiile lui Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}},$$

unde $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},)$ *este expresia lagrangeanului sistemului* $L: TM\to\mathbf{R}$ *în coordonatele locale* $\mathbf{q}$ *şi* $\dot{\mathbf{q}}$ *pe* TM.

Cel mai frecvent apar următoarele cazuri particulare.

B. Sistemul natural. Fie M o varietate riemanniană. *Energia cinetică* asociată metricii riemanniene este, prin definiţie, formă pătratică pe fiecare spaţiu tangent:

$$T = \frac{1}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_x, \ \mathbf{v}\in TM_x, \ x\in M.$$

Se numeşte *energie potenţială* o funcţie diferenţiabilă $U: M\to\mathbf{R}$.

D e f i n i ţ i e. Un sistem lagrangean pe varietatea riemanniană M se numeşte *natural* dacă lagrangeanul său L este diferenţa dintre energia cinetică şi o energie potenţială: $L = T - U$.

E x e m p l u. Să considerăm în planul x, y două puncte de mase m_1 şi m_2, unite printr-un segment de lungime l. Atunci varietatea de configuraţii tridimensională

$$M = \mathbf{R}^2 \times S^1 \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$$

este definită în spaţiul de configuraţii cvadridimensional $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ al sistemului de două puncte materiale libere (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) prin condiţia $[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{1/2}=l$ (fig. 65).

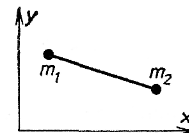


Fig. 65. Segment în plan.

În spaţiul **tangent** la spaţiul cvadridimensional $\{(x_1, x_2, y_1, y_2)\}$ este definită forma pătratică

$$m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2) + m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2).$$

Varietatea M tridimensională, fiind scufundată în spaţiul cvadridimensional, este înzestrată cu metrica indusă de această formă pătratică. Sistemul olonom astfel obţinut se numeşte în mecanică „segmentul de lungime constantă l în planul x, y". Energia cinetică este dată de formula

$$T = m_1 \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{2}.$$

C. Sistemul cu legături olonome. În §17 am definit noţiunea de sistem de puncte materiale supuse la legături olonome. Să arătăm că un sistem de acest tip este natural.

Într-adevăr, să considerăm varietatea configuraţiilor M a sistemului cu legături olonome ca fiind scufundată în spaţiul configuraţiilor sistemului de puncte libere. Metrica în spaţiul $3n$-dimensional este dată de formă pătratică $\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \mathbf{\dot{r}}_i^2$.

Atunci sistemul natural corespunzător varietăţii riemanniene scufundate în M şi energiei potenţiale U coincide cu sistemul definit în §17 sau cu cazul limită al sistemului cu potenţialul $U + N\, \mathbf{q}_2^2$, $N \to \infty$, care creşte rapid în afara lui M.

D. Reţeta de studiere a sistemelor cu legături.

1. Se determină varietatea configuraţiilor M şi se introduc pe ea coordonatele locale $q_1, \dots q_n$ (în vecinătatea fiecărui punct; ele pot diferi, în general, de la un punct la altul).

2. Se exprimă energia cinetică $T = \frac{1}{2} \sum m_i^2 \mathbf{\dot{r}}_i^2$ ca o formă pătratică în raport cu vitezele generalizate

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j.$$

3. Se formează lagrangeanul $L = T - U(\mathbf{q})$ şi se rezolvă ecuaţiile lui Lagrange.

E x e m p l u . Să considerăm mişcarea unui punct material de masă 1 pe o suprafaţă de rotaţie din spaţiul tridimensional. Se poate arăta că orbitele sînt geodezice pe suprafaţă. În coordonate cilindrice r, φ, z suprafaţa este dată (local) sub forma $r = r(z)$ sau $z = z(r)$. Energia cinetică corespunzătoare are forma

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\,[(1 + r_z'^2)\, \dot{z}^2 + r^2(z)\, \dot{\varphi}^2]$$

(în coordonatele φ ; z)

$$= \frac{1}{2}\,[(1 + z_r'^2)\, \dot{r}^2 + r^2\, \dot{\varphi}^2]$$

(în coordonatele φ ; r).
(Se utilizează relaţia $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$).

Lagrangeanul este $L = T$. În ambele sisteme de coordonate, φ este coordonată ciclică. Impulsul corespunzător se conservă ; $p_\varphi = r^2\dot{\varphi}$ nu este altceva decît z-componenta momentului cinetic. Sistemul avînd numai două grade de libertate, cunoaşterea unei coordonate ciclice φ este suficientă pentru integrarea completă a problemei (vezi corolarul 3, §15, p. 91).

O reprezentare explicită despre forma orbitei se poate obţine printr-un raţionament puţin diferit. Avem : $r\,\dot{\varphi} = |\mathbf{v}| \sin\alpha$, unde $|\mathbf{v}|$ este lungimea vectorului viteză (fig. 66).

Conform legii conservării energiei, $H = L = T$ se conservă. Prin urmare, $|\mathbf{v}| =$ const şi legea conservării lui p_φ capătă forma

$$r \sin \alpha = \text{const}$$

(«*teorema lui Clairaut*»).

Această ultimă relaţie arată că mişcarea are loc în domeniul $|\sin\alpha| \leqslant 1$, deci $r \geqslant r_0 \sin\alpha_0$. În plus, înclinarea orbitei faţă de meridian creşte cu micşorarea razei r. Atingînd valoarea minimă $r = r_0 \sin\alpha_0$, orbita este reflectată şi se reîntoarce în domeniul cu valori mai mari ale lui r (fig. 67).

P r o b l e m ă. Să se arate că geodezicele suprafeţei de rotaţie din fig. 67 se împart în trei clase : meridiane, curbe închise şi geodezice care sînt dense în inelul $r \geqslant c$.

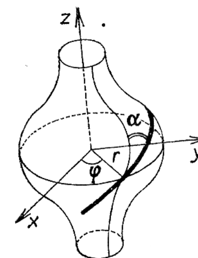


Fig. 66. Suprafaţă de rotaţie.

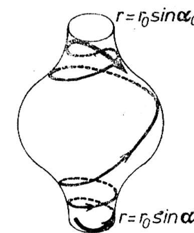


Fig. 67. Geodezice pe o suprafaţă de rotaţie.

P r o b l e m ă . Să se studieze comportarea geodezicelor pe suprafaţa torului $((r - R)^2 + z^2 = \rho^2)$.

E. Sisteme neautonome. Un *sistem lagrangean neautonom* diferă de unul de tipul autonom, care a fost considerat pînă acum, prin faptul că lagrangeanul depinde în plus și de timp:

$$L : TM \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

În particular, într-un sistem natural neautonom, atît energia cinetică cît și cea potențială pot fi dependente de timp:

$$T : TM \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ U : M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$
$$U = U(\mathbf{q}, t).$$

Sistemul de n puncte materiale supuse la legături olonome care depind de timp se definește cu ajutorul unei subvarietăți care variază în timp în spațiul configurațiilor sistemului liber.
O astfel de varietate este definită de o aplicație

$$i : M \times \mathbf{R} \to E^{3n},\quad i(\mathbf{q}, t) = \mathbf{x}$$

care, pentru orice $t \in \mathbf{R}$ fixat, definește o scufundare $M \to E^{3n}$. Metoda de la pct. **D** rămîne valabilă și pentru sistemele autonome.

Exemplu. Mișcarea unei mărgele pe un cerc vertical de rază r (fig. 68) care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale care trece prin centrul O al cercului. Varietatea M este cercul. Notăm cu q coordonata unghiulară pe cerc, măsurată de la punctul extrem superior.

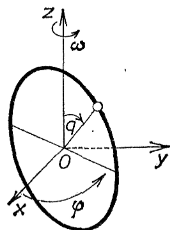


Fig. 68. Mărgea pe un cerc în rotație.

Fie x, y, z coordonate carteziene în E^3 cu originea în O și axa verticală z. Fie φ unghiul dintre planul cercului și planul xOz. Conform ipotezei, $\varphi = \omega t$. Aplicația $i : M \times \mathbf{R} \to E^3$ este dată de formula

$$i(\mathbf{q}, t) = (r \sin q \cos \omega t,\ r \sin q \sin \omega t,\ r \cos q).$$

Din această formulă (și chiar mai simplu — din „triunghiul dreptunghic infinit mic") obținem

$$T = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 \sin q + r^2 \dot{q}^2),\quad U = mgr \cdot \cos q.$$

Spre fericirea noastră, lagrangeanul $L = T - U$ nu depinde de t, deși legătura depinde de timp. În plus, lagrangeanul este același ca pentru sistemul cu energia cinetică

$$T_0 = \frac{M}{2}\dot{q}^2,\ M = mr^2,$$

și energia potențială

$$V = A \cos q - B \sin^2 q,\ A = mgr,\ B = \frac{m}{2}\omega^2 r^2.$$

Aspectul tabloului orbitelor în spațiul fazelor depinde de raportul dintre A și B Pentru $2B < A$ (deci pentru o rotație mai lentă a cercului, caracterizată de $\omega^2 r < g$) poziția inferioară de echilibru a mărgelei ($q = \pi$) este stabilă și caracterul mișcării este în general același ca în cazul pendulului matematic ($\omega = 0$).

Pentru $2B > A$, deci la o rotație suficient de rapidă a cercului poziția inferioară de echilibru a mărgelei devine instabilă, însă apar două poziții stabile ale mărgelei pe cerc: $\cos q = -A/2B = -g/\omega^2 r$. Comportarea mărgelei pentru toate condițiile inițiale posibile este clară din aspectul orbitelor din planul $\{(q, \dot{q})\}$ (fig. 69).

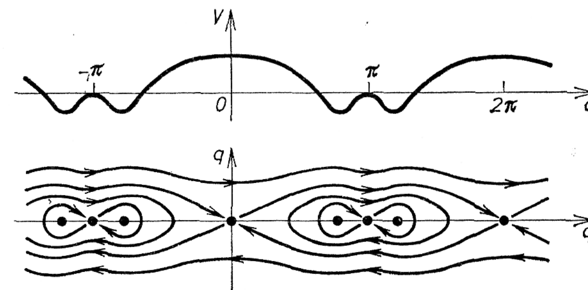


Fig. 69. Energia potențială efectivă și planul fazelor mărgelei.

§20. TEOREMA LUI E. NOETHER

Diversele legi de conservare (a impulsului, a momentului cinetic etc.) nu sînt decît cazuri particulare ale unei singure teoreme generale: oricărui grup cu un parametru de difeomorfisme ale varietății configurațiilor unui sistem lagrangean, care conservă funcția lui Lagrange, îi corespunde o integrală primă a ecuațiilor de mișcare.

A. Formularea teoremei. Fie M o varietate netedă, $L : TM \to \mathbf{R}$ o funcție netedă pe fibrarea tangentă TM a lui M. Fie $h : M \to M$ o aplicație diferențiabilă.

D e f i n i ț i e. Sistemul lagrangean (M, L) *admite (este invariant la)* aplicația h dacă pentru orice vector tangent $\mathbf{v} \in TM$

$$L(h_*(\mathbf{v})) = L(\mathbf{v}).$$

E x e m p l u. Fie $M = \{(x_1, x_2, x_3)\}$, $L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_2, x_3)$. Sistemul lagrangean (M, L) admite translația $h : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1+s, x_2, x_3)$ în direcția axei x_1 și nu admite, în general, translațiile în direcția axei x_2.

Teorema lui Noether. *Dacă sistemul (M, L) este invariant la (admite) grupul cu un parametru de difeomorfisme $h^s : M \to M$, $s \in \mathbf{R}$ $(h^0 = \mathrm{id}, h^{s+t} = h^s \cdot h^t)$ atunci sistemul de ecuații Lagrange corespunzător lagrangeanului L are o integrală primă $I : TM \to \mathbf{R}$.* În coordonatele locale $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ pe TM, integrala primă I are expresia

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \left.\frac{\mathrm{d}h^s(q)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\right).$$

B. Demonstrație. Pentru început, să presupunem că $M = \mathbf{R}^n =$ = spațiul numeric. Fie $\varphi : \mathbf{R} \to M$, $\mathbf{q} = \varphi(t)$ o soluție a ecuațiilor Lagrange. Cum h^s invariază pe L, translatata $h^s \circ \varphi : \mathbf{R} \to M$ a soluției φ este din nou o soluție a ecuațiilor Lagrange, $\forall s \in \mathbf{R}$*). Să considerăm aplicația $\mathbf{\Phi} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}(s, t) = h^s(\varphi(t))$ (fig. 70).

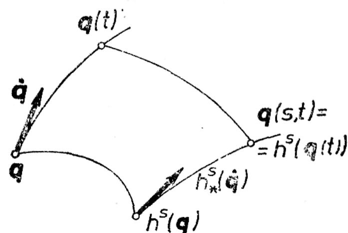


Fig. 70. Pentru teorema lui Noether.

*) Autorii unor manuale afirmă în mod greșit că și afirmația reciprocă este adevărată, deci că din faptul că h^s transformă soluțiile în soluții rezultă că h^s invariază pe L $(L \circ h^s_* = L)$.

Vom nota derivatele în raport cu t cu puncte și derivatele în raport cu s cu prim. Prin ipoteza

$$0 = \frac{\partial L(\mathbf{\Phi}, \dot{\mathbf{\Phi}})}{\partial s} = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{\Phi}'\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{\Phi}}'\right), \tag{1}$$

unde derivatele parțiale ale lui L sînt luate în punctul $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}(s, t)$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{\Phi}}(s, t)$.

Așa cum am subliniat mai sus, pentru orice valoare fixată a lui s, aplicația $\mathbf{\Phi}\big|_{s=\mathrm{const}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ satisface ecuația lui Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{\Phi}(s, t), \dot{\mathbf{\Phi}}(s, t))\right] = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{\Phi}(s, t), \dot{\mathbf{\Phi}}(s, t)).$$

Introducem notația $\mathbf{F}(s, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{\Phi}(s, t), \dot{\mathbf{\Phi}}(s, t))$ și scriem în (1) $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$ în loc de $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$.

Scriind pe $\dot{\mathbf{q}}'$ sub forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}'$, obținem, luînd $s = 0$

$$0 = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\mathbf{\Phi}' + \mathbf{F}\dot{\mathbf{\Phi}}'\right]\Big|_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right), \mathbf{q}'\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}'\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}'\Big|_{s=0}\right) = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \text{ c.c.t.d.}$$

O b s e r v a ț i e. Integrala primă $I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}'\right)$ a fost definită mai sus cu ajutorul coordonatelor locale $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$. Se arată însă că mărimea $I(\mathbf{v})$ nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

Într-adevăr, I este viteza de variație a lui $L(\mathbf{v})$ atunci cînd $\mathbf{v} \in TM_x$ variază în TM_x cu viteza $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} h^s(x)$. Prin urmare,

$\mathbf{v} \mapsto I(\mathbf{v}) : T_xM \to \mathbf{R}$ este o funcţie corect definită de vectorul $\mathbf{v} \in T_xM$ şi prin urmare $I : TM \to \mathbf{R}$ este corect şi global definită. Cu aceasta teorema lui Noether este demonstrată chiar şi în cazul în care M este varietate.

C. Exemple.

E x e m p l u l 1. Să considerăm un sistem de puncte materiale cu masele m_i:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_i = x_i^1 \mathbf{e}_1 + x_i^2 \mathbf{e}_2 + x_i^3 \mathbf{e}_3,$$

supus la legăturile $f_j(x) = 0$. Să presupunem că sistemul este invariant la translaţiile în direcţia axei $\mathbf{e}_1$:

$$h^s : \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i + s\,\mathbf{e}_1, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cu alte cuvinte, legăturile permit translaţia sistemului de-a lungul axei $\mathbf{e}_1$ şi energia potenţială nu se schimbă la o astfel de translaţie.

Din teorema lui Noether deducem:

Dacă sistemul este invariant la translaţiile în direcţia axei $\mathbf{e}_1$, *atunci proiecţia centrului său de inerţie pe axa* $\mathbf{e}_1$ *se mişcă rectiliniu şi uniform.*

Într-adevăr, $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} h^s(\mathbf{x}_i) = \mathbf{e}_1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Conform observaţiei de la sfîrşitul punctului B, se conservă mărimea

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}, \mathbf{e}_1 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_{i_1},$$

deci prima componentă a impulsului. Pentru sistemele fără legături am demonstrat deja acest lucru.

E x e m p l u l 2. *Dacă sistemul de mai sus este invariant la rotaţia în jurul axei* $\mathbf{e}_1$, *atunci se conservă momentul cinetic în raport cu această axă.*

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} ([\mathbf{x}_i, m_i \dot{\mathbf{x}}_i], \mathbf{e}_1).$$

Într-adevăr, se verifică cu uşurinţă că dacă h^s este rotaţia de unghi s în jurul axei $\mathbf{e}_1$, atunci $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} h^s(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ şi deci $I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}, [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i] \right) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\mathbf{x}}_i, [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i]) =$
$= \sum_{i=1}^{n} ([\mathbf{x}_i, m_i \dot{\mathbf{x}}_i], \mathbf{e}_1)$.

P r o b l e m a 1. Să presupunem că o particulă se mişcă în cîmpul unei curbe *elicoidale omogene* $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = c\varphi$. Să se determine legea de conservare corespunzătoare acestei simetrii elicoidale.

Răspuns. În orice sistem invariant în cazul mişcărilor elicoidale care conservă curba elicoidală dată, se conservă mărimea $I = cP_3 + M_3$.

P r o b l e m a 2. Fie un solid rigid care se mişcă în virtutea inerţiei. Să se demonstreze că centrul său de inerţie se mişcă uniform şi rectiliniu. Dacă centrul său de inerţie este în repaus, atunci se conservă momentul cinetic în raport cu acest centru.

P r o b l e m a 3. Ce mărimi se conservă la mişcarea unui solid rigid în jurul unui punct fix O? Să se considere şi cazul particular al unui corp simetric în raport cu o axă care trece prin O.

P r o b l e m a 4. Să se extindă teorema lui Noether la sistemele lagrangeene neautonome.

I n d i c a ţ i e. Fie $M_1 = M \times \mathbf{R}$ varietatea de configuraţii extinsă (produsul cartezian al varietăţii configuraţiilor cu axa timpului $\mathbf{R}$).

Definim funcţia $L_1 : TM_1 \to \mathbf{R}$ ca fiind $L \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$: în coordonatele locale $\mathbf{q}$, t pe M_1, L_1 are expresia

$$L_1\left(\mathbf{q}, t, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}.$$

Aplicăm acum teorema lui Noether sistemului lagrangean (M_1, L_1).

Dacă L_1 este invariant la transformările $h^s : M_1 \to M_1$, obţinem o integrală primă $I_1 : TM_1 \to \mathbf{R}$. Deoarece $\int L\,\mathrm{d}t = \int L_1 \mathrm{d}t$, aceasta conduce la o integrală primă $I : TM \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a sistemului iniţial. Dacă în coordonatele locale $\mathbf{q}$, t pe M_1 avem $I_1 = I_1\left(\mathbf{q}, t, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)$, atunci $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = I_1(\mathbf{q}, t, \dot{\mathbf{q}}, 1)$.

În particular, dacă t nu depinde explicit de timp, atunci L_1 este invariant la translaţiile în timp $h^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}, t+s)$. Integrala I corespunzătoare este integrala energiei.

§21. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

În acest paragraf se dă o nouă definiţie a sistemului de puncte materiale supus la legături şi se demonstrează echivalenţa acestei definiţii cu cea dată la §17.

A. Exemplu. Să considerăm sistemul olonom (M, L), unde M este o suprafaţă în spaţiul tridimensional $\{\mathbf{x}\}$ şi

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}).$$

În terminologie mecanică: „punctul material $\mathbf{x}$ de masă m este obligat să se mişte pe suprafaţa netedă M".

Să considerăm mişcarea punctului $\mathbf{x}(t)$. Dacă ar fi fost satisfăcută ecuaţia lui Newton $m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = 0$, atunci în absenţa forţelor exterioare $(U = 0)$, traiectoria ar fi fost o dreaptă şi (în general) n-ar fi putut fi conţinută în M.

Din punctul de vedere al lui Newton, aceasta indică prezenţa unei noi forţe „care sileşte punctul să rămînă pe suprafaţă".

D e f i n i ţ i e. Mărimea

$$\mathcal{R} = m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$$

se numeşte *forţa de reacţiune a legăturii* (fig. 71).

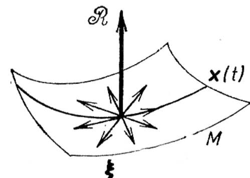


Fig. 71. Reacţia unei legături.

Luînd în considerare forţa de reacţiune $\mathcal{R}(t)$, este evident că ecuaţiile lui Newton sînt satisfăcute:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathcal{R}.$$

Semnificaţia fizică a forţei de reacţiune devine clară dacă considerăm sistemul nostru cu legătură ca limita unor sisteme cu energia potenţială $U + NU_1$, $U_1(\mathbf{x}) = \rho^2(\mathbf{x}, M)$ cînd $N \to \infty$. Pentru valori mari ale lui N potenţialul de legătură NU_1 determină forţa rapid variabilă $\mathbf{F} = -N\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{x}}$; la trecerea la limită $(N \to \infty)$

rămîne valoarea medie $\mathcal{R}$ a forţei $\mathbf{F}$ pe oscilaţiile lui $\mathbf{x}$ în vecinătatea lui M. Forţa $\mathbf{F}$ este perpendiculară pe suprafaţa M. Prin urmare, şi forţa de reacţiune $\mathcal{R}$ este perpendiculară pe M: $(\mathcal{R}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ pentru orice vector $\boldsymbol{\xi}$ tangent la M.

B. Formularea principiului lui d'Alembert-Lagrange. În mecanică, vectorii tangenţi la varietatea configuraţiilor se numesc *deplasări virtuale*. Principiul lui d'Alembert — Lagrange afirmă:

$$\left(m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}\right) = 0,$$

pentru orice deplasare virtuală $\boldsymbol{\xi}$, deci că: *lucrul mecanic efectuat de forţa de reacţiune la orice deplasare virtuală este zero.*

Pentru un sistem de n puncte materiale $\mathbf{x}_i$ cu masele m_i forţele de reacţiune $\mathcal{R}_i$ se definesc ca fiind $\mathcal{R}_i = m_i\ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}$, iar principiul lui d'Alembert are expresia $\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{R}_i, \boldsymbol{\xi}_i) = 0$ sau $\sum_{i=1}^{n}\left(\left(m_i\ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}\right), \boldsymbol{\xi}_i\right) = 0$, deci suma lucrurilor mecanice efectuate de forţele de reacţiune la orice deplasare virtuală $\{\boldsymbol{\xi}_i\} \in TM_x$ este egală cu zero.

Proprietatea indicată mai sus se mai exprimă şi spunînd că *legăturile sînt ideale.*

Dacă se defineşte sistemul cu legătură olonomă ca mai sus, ca o limită cînd $N \to \infty$, atunci principiul lui d'Alembert — Lagrange devine teoremă; demonstraţia sa pentru cazul cel mai simplu a fost dată mai sus.

Se poate însă defini legătura ideală olonomă cu ajutorul principiului lui d'Alembert — Lagrange.

Prin urmare, există trei definiţii ale sistemului cu legături olonome:

1) ca limită a sistemelor cu energia potenţială $U + NU_1$, $N \to \infty$;

2) ca un sistem olonom (M, L) unde M este o subvarietate a spaţiului configuraţiilor şi L este un lagrangean;

3) ca un sistem care satisface principiul lui d'Alembert — Lagrange.

Toate aceste trei definiţii sînt echivalente din punct de vedere matematic.

Demonstraţia implicaţiilor $1 \Rightarrow 2$ şi $1 \Rightarrow 3$ a fost schiţată mai sus şi n u o vom mai efectua aici în detaliu. Vom demonstra în continuare că $2 \Leftrightarrow 3$.

C. Echivalenţa dintre principiul lui d'Alembert-Lagrange şi principiul variaţional. Fie M o subvarietate a spaţiului euclidian, $M \subset \mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{x}: \mathbf{R} \to M$ o curbă cu extremităţile $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ şi $\mathbf{x}(t_1) = x_1$.

D e f i n i ţ i e . Curba $\mathbf{x}(t)$ se numeşte *extremală condiţionată* a integralei de acţiune

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - U(\mathbf{x}) \right] \mathrm{d}t$$

dacă diferenţiala $\delta\, \Phi$ se anulează ($\delta\, \Phi = 0$) pentru toate curbele vecine cu $\mathbf{x}(t)$, care sînt conţinute în M şi unesc pe x_0 cu x_1*).

Vom scrie acest lucru sub forma

$$\delta_M \Phi = 0. \qquad (1)$$

Evident, ecuaţia (1) este echivalentă cu ecuaţiile lui Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad L = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - U(\mathbf{x}), \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$$

în fiecare sistem de coordonate locale $\mathbf{q}$.

Teoremă. *Pentru ca o curbă* $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to M \subset \mathbf{R}^N$ *să fie extremală condiţionată a acţiunii (deci să satisfacă* (1)), *este necesar şi suficient ca ea să satisfacă ecuaţia lui d'Alembert*

$$\left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \xi\right) = 0, \ \forall \xi \in TM_x, \ \forall x \in M. \qquad (2)$$

Lemă. *Fie* $\mathbf{f} : \{t : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \to \mathbf{R}^N$ *o funcţie vectorială continuă. Dacă pentru orice cîmp de vectori* $t \to \xi(t) \in TM_{\mathbf{x}(t)}$ *tangent la* M *de-a lungul lui* $\mathbf{x}(t)$, *care satisface* $\xi(t_0) = 0$, $\xi(t_1) = 0$, *avem*

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{f}(t), \ \xi(t))\, \mathrm{d}t = 0,$$

*) Riguros vorbind, pentru a putea defini variaţia $\delta\Phi$ ar trebui să introducem o structură de domeniu al unui spaţiu liniar pe mulţimea curbelor vecine cu $\mathbf{x}(t)$ pe M. Aceasta se poate face cu ajutorul coordonatelor pe M. Proprietatea lui $\mathbf{x}(t)$ de a fi extremală nu depinde de alegerea coordonatelor locale.

atunci vectorul $\mathbf{f}(t)$ *este ortogonal în fiecare punct* $\mathbf{x}(t)$ *la subvarietatea* M : $(\mathbf{f}(t), \mathbf{h}) = 0$, $\forall \mathbf{h} \in TM_{\mathbf{x}(t)}$ (fig. 72)*).

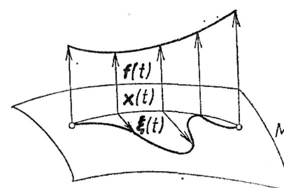


Fig. 72. Lema privind cîmpul normal.

Demonstraţia lemei se bazează pe repetarea raţionamentului cu ajutorul căruia am dedus ecuaţiile Euler — Lagrange la § 12.

D e m o n s t r a ţ i a t e o r e m e i . Să comparăm valorile pe care le ia Φ pe două curbe vecine $\mathbf{x}(t)$ şi $\mathbf{x}(t) + \xi(t)$, $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$. Obţinem, integrînd prin părţi :

$$\delta\, \Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left[(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\xi}) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \xi\right) \right] \mathrm{d}t = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \xi\right) \mathrm{d}t.$$

Din această formulă se vede**) că ecuaţia (1) $\delta_M\, \Phi = 0$ este echivalentă cu familia de ecuaţii

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \xi\right) \mathrm{d}t = 0 \qquad (3)$$

pentru toate cîmpurile de vectori $t \to \xi(t) \in TM_{\mathbf{x}(t)}$, $\xi(t_0) = 0$, $\xi(t_1) = 0$. Conform lemei $\left(\text{în care se ia } \mathbf{f}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\right)$ familia de ecuaţii (3) este echivalentă cu ecuaţia d'Alembert — Lagrange (2), c.c.t.d.

*) Atenţie : aici se utilizează identificarea canonică $T\mathbf{R}^N_{\mathbf{x}} \simeq \mathbf{R}^N$ şi se consideră că $\mathbf{f}(t) \in \mathbf{R}^N \simeq T\mathbf{R}^N_{\mathbf{x}(t)}$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Cum $TM_{\mathbf{x}(t)} \subset T\mathbf{R}^N_{\mathbf{x}(t)}$, relaţia finală se mai scrie

$$\xi(t) \perp TM_{\mathbf{x}(t)}, \ \forall\, t \in \mathbf{R} \cdot (N.T.)$$

**) Distanţa punctului $\mathbf{x}(t) + \xi(t)$ la M este mică de ordinul doi în raport cu $\xi(t)$.

D. Observații.

Observația 1. Să deducem din teorema demonstrată *principiul lui d'Alembert — Lagrange pentru un sistem de n puncte materiale* $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^3$ *cu masele* m_i, $i = 1, \ldots, n$ *și legături olonome.*

În coordonatele $\overline{\mathbf{x}} = \{\overline{\mathbf{x}}_i = \sqrt{m_i}\,\mathbf{x}_i\}$ energia cinetică capătă forma $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\overline{\mathbf{x}}}^2$.

Conform teoremei demonstrate, extremalele principiului minimei acțiuni satisfac ecuația

$$\left(\ddot{\overline{\mathbf{x}}} + \frac{\partial U}{\partial \overline{\mathbf{x}}}, \xi\right) = 0$$

(principiul d'Alembert — Lagrange) în punctele din $\mathbf{R}^{3n}$: forța de reacțiune $3n$ — dimensională este ortogonală la varietatea M în metrica T. Reîntorcîndu-ne la coordonatele $\mathbf{x}_i$, obținem

$$0 = \left(\sqrt{m_i}\ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial U}{\partial(\sqrt{m_i}\mathbf{x}_i)}, \sqrt{m_i}\xi_i\right) = \sum_i \left(m_i\ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}, \xi_i\right)$$

deci principiul lui d'Alembert — Lagrange în forma indicată mai sus : suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele de reacțiune la deplasările virtuale este nulă.

Observația 2. Principiul lui d'Alembert — Lagrange poate fi enunțat și sub o altă formă dacă se recurge la statică. Se numește *poziție de echilibru* un punct $\mathbf{x}_0$ care este o mișcare : $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$.

Fie un punct material care se mișcă pe suprafața netedă M sub acțiunea forței $\mathbf{f} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$.

Teoremă. *Punctul* $\mathbf{x}_0 \in M$ *este poziție de echilibru dacă și numai dacă în acest punct forța* $\mathbf{f}$ *este ortogonală la suprafața* M : $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \xi) = 0$, $\forall \xi \in TM_{\mathbf{x}_0}$.

Acest rezultat se deduce din ecuațiile lui d'Alembert — Lagrange dacă se ține seama că $\dot{\mathbf{x}} = 0$.

Definiție. Termenul $-m\ddot{\mathbf{x}}$ se numește *forță de inerție*. Principiul lui d'Alembert — Lagrange se poate enunța acum sub forma următoarei

Teoreme. *Dacă la forța care acționează asupra punctului se adaugă forța de inerție, atunci* $\mathbf{x}$ *devine poziție de echilibru.*

Într-adevăr, ecuațiile lui d'Alembert

$$(-m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \xi) = 0, \ \forall \xi \in TM_{\mathbf{x}}$$

exprimă, conform teoremei precedente, faptul că $\mathbf{x}$ este poziție de echilibru a sistemului cu forțele $-m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Propoziții complet similare sînt adevărate și pentru sistemele de puncte materiale :

Dacă $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_i\}$ *este o poziție de echilibru, atunci suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele care acționează asupra sistemului este nulă la orice deplasare virtuală.*

Dacă la forțele care acționează asupra sistemului se adaugă forțele de inerție $-m_i\ddot{\mathbf{x}}_i(t)$, *atunci poziția* $\mathbf{x}(t)$ *devine poziție de echilibru.*

Prin urmare, problema studierii mișcării se reduce la problema echilibrului sub acțiunea altor forțe.

Observația 3. Pînă acum nu am considerat și cazul legăturilor care depind de timp. Toate cele de mai sus se extind la acest tip de legături fără modificări.

Exemplu. Să considerăm o mărgea care alunecă pe o tijă înclinată sub unghi constant α față de axa verticală și care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul acestei axe (greutatea se neglijează). Luăm drept coordonată q distanța de la punctul O (fig. 73). Energia cinetică și lagrangeanul sînt

$$L = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\,\omega^2 r^2,$$

$$r = q \sin \alpha.$$

Ecuația lui Lagrange se scrie : $m\ddot{q} = m\,\omega^2 q \sin^2 \alpha$.

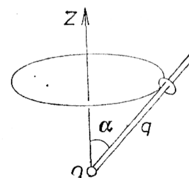


Fig. 73. Mărgea pe o tijă care se rotește.

În fiecare moment, forța de reacțiune este ortogonală la deplasările virtuale (deci la direcția tijei), dar nu este de loc ortogonală la traiectoria reală.

O b s e r v a ț i a 4. Din ecuațiile lui d'Alembert — Lagrange se deduc ușor legile de conservare. Spre exemplu, dacă printre deplasările virtuale se află și translația în direcția axei x_1

$$\xi_i = \mathbf{e}_1,$$

atunci suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele de reacțiune la această deplasare este egală cu zero :

$$\Sigma(\mathcal{R}_i, \mathbf{e}_1) = (\Sigma\, \mathcal{R}_i, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Să considerăm acum forțele de reacțiune ca forțe exterioare. În acest caz deducem că suma primelor componente ale forțelor exterioare este egală cu zero și deci prima componentă P_1 a impulsului se conservă.

Am obținut mai sus același rezultat cu ajutorul teoremei lui Noether.

O b s e r v a ț i a 5. Subliniem încă o dată că faptul dacă o legătură fizică este sau nu olonomă (cu un anumit grad de exactitate) se poate stabili numai pe cale experimentală. Din punct de vedere matematic, caracterul olonom al unei legături este o ipoteză de natură fizică; ea poate fi introdusă în mai multe moduri echivalente, cum ar fi principiul minimei acțiuni (1) sau principiul lui d'Alembert — Lagrange, dar pentru a defini legăturile se recurge totdeauna la fapte experimentale noi în raport cu ecuațiile lui Newton.

O b s e r v a ț i a 6. Terminologia pe care am utilizat-o se deosebește puțin de terminologia uzuală din manualele de mecanică, în care principiul lui d'Alembert — Lagrange se extinde la o clasă de sisteme mai largă („sistemele neolonome cu legături ideale"). În această carte nu vom considera însă sisteme neolonome. Vrem numai să dăm un exemplu de sistem neolonom, și anume o bilă care alunecă fără frecare pe un plan. În spațiul tangent într-un punct oarecare la varietatea configurațiilor sistemului neolonom este fixat un subspațiu la care vectorul viteză în acel punct trebuie să fie tangent.

Observația 7. Dacă sistemul este alcătuit din puncte materiale unite prin tije, articulații etc. atunci poate apărea tentația de a vorbi despre forța de reacțiune a uneia sau alteia din legăturile separate.

Am definit forța totală de reacțiune a tuturor „legăturilor" $\mathcal{R}_i$ pentru fiecare punct material m_i. Noțiunea de forță de reacțiune

a unei singure legături nu poate fi definită, așa cum se vede din exemplul simplu al unei grinzi care se sprijină pe trei coloane. Dacă încercăm să definim forțele de reacție ale coloanelor, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ și $\mathcal{R}_3$ printr-o trecere la limită (considerînd coloanele ca arcuri foarte rigide) atunci ne convingem imediat că rezultatul depinde de distribuția rigidității. Problemele din culegeri sînt alese în așa fel încît să nu apară această dificultate.

P r o b l e m ă. O bară de greutate P, înclinată față de suprafața mesei la un unghi de 60°, începe să cadă fără viteză inițială (fig. 74). Să se determine forța de reacțiune a mesei în momentul inițial, considerînd că masa este : a) absolut netedă, b) absolut rugoasă. (În primul caz, legătura olonomă obligă capătul barei să stea în planul mesei, iar în al doilea caz — în punctul inițial dat.)

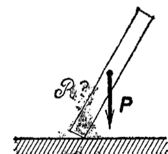


Fig. 74. Forța de reacțiune a mesei.

CAPITOLUL 5

OSCILAȚII

Deoarece ecuațiile liniare se rezolvă și se studiază ușor, teoria oscilațiilor liniare este ramura cea mai elaborată a mecanicii. În multe din problemele neliniare liniarizarea conduce la o soluție aproximativă satisfăcătoare. Chiar și atunci cînd acest lucru nu are loc, studierea problemei liniarizate reprezintă adesea primul pas în analizarea corespondenței care există între mișcările sistemului și cele ale modelului său liniar.

§22. LINIARIZAREA

În acest paragraf se dă definiția oscilațiilor mici.

A. Poziții de echilibru.

Definiție. Se numește *poziție de echilibru* a sistemului

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

orice punct $\mathbf{x}_0$ pentru care $t\to\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{x}_0$ este soluție a sistemului. Cu alte cuvinte, $\mathbf{x}_0$ este poziție de echilibru dacă $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$: cîmpul vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se anulează în punctul $\mathbf{x}_0$.

Exemplu. Să considerăm un sistem dinamic natural cu lagrangeanul $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=T-U,\ T=\frac{1}{2}\sum a_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j\geqslant 0,\ U=U(\mathbf{q})$

și ecuațiile Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}},\ \mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n). \tag{2}$$

Ecuațiile lui Lagrange (2) se pot scrie ca un sistem de $2n$ ecuații de ordinul întîi de forma (1). Să încercăm să determinăm pozițiile de echilibru.

Teoremă. *Punctul* $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0,\ \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_0$ *este poziție de echilibru a sistemului* (2) *dacă și numai dacă* $\dot{\mathbf{q}}_0=0$ *și punctul* $\mathbf{q}_0$ *este punct critic al energiei potențiale* :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0}=0. \tag{3}$$

Demonstrație. Să scriem ecuațiile lui Lagrange sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)=\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}-\frac{\partial U}{\partial\dot{\mathbf{q}}}.$$

Din forma lui T se vede că pentru $\dot{\mathbf{q}}=0$ avem $\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}=0,\ \frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}=0.$ Prin urmare, $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$ este soluție a sistemului dacă și numai dacă ne aflăm în situația (3).

B. Stabilitatea unei poziții de echilibru. Să ne ocupăm acum de studierea mișcărilor care au condițiile inițiale în vecinătatea poziției de echilibru.

Teoremă. *Dacă punctul* $\mathbf{q}_0$ *este un minim local izolat al energiei potențiale* **U**, *atunci poziția de echilibru* $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$ *este stabilă în sens Liapunov.*

Demonstrație. Fie $h=U(\mathbf{q}_0)$. Pentru $\varepsilon>0$ suficient de mic, componenta conexă a mulțimii $\{\mathbf{q}:U(\mathbf{q})\leqslant h+\varepsilon\}$ care conține punctul $\mathbf{q}_0$ reprezintă o vecinătate suficient de mică a acestui punct (fig. 75). În același timp, componenta conexă a domeniu-

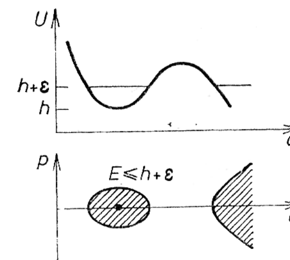


Fig. 75. Poziție de echilibru stabilă.

lui corespunzător $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leqslant h + \varepsilon\}$ ($\mathbf{p} = \partial T/\partial \dot{\mathbf{q}}$ este impulsul, iar $E = T - U$ — energia totală) din spaţiul fazelor $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ reprezintă o vecinătate suficient de mică a punctului $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$.

Domeniul $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : E \leqslant h + \varepsilon\}$ este însă, datorită legii conservării energiei, invariant la curentul din spaţiul fazelor. Prin urmare, pentru condiţii iniţiale $(\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0))$ suficient de apropiate de $(0, \mathbf{q}_0)$, întreaga orbită $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ va rămîne în vecinătatea lui $(0, \mathbf{q}_0)$, c.c.t.d.

Problemă. Poate fi poziţia de echilibru $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ asimptotic stabilă?

Problemă. Să se arate că într-un sistem analitic cu un singur grad de libertate o poziţie de echilibru $\mathbf{q}_0$ care nu este punct de minim local izolat al energiei potenţiale este instabilă în sens Liapunov. Să se dea un exemplu de sistem infinit diferenţiabil pentru care acest lucru nu este valabil.

Observaţie. Pare plauzibil ca şi într-un sistem analitic cu n grade de libertate, o poziţie de echilibru care nu este punct de minim să fie instabilă, dar acest lucru nu a fost încă demonstrat.

C. Liniarizarea unei ecuaţii diferenţiale. Să ne întoarcem acum la sistemul general (1). Pentru a studia soluţiile sistemului (1) din vecinătatea poziţiei de echilibru $\mathbf{x}_0$ se utilizează deseori *liniarizarea*. Să presupunem că $\mathbf{x}_0 = 0$ (cazul general se reduce la aceasta printr-o translaţie a sistemului de coordonate). Atunci primul termen al seriei Taylor al lui f este liniar:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathrm{R}_2(\mathbf{x}),\ A = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{x_0},\ \mathrm{R}_2 = O(\mathbf{x}^2).$$

Operatorul liniar A este definit, în coordonatele $x_1, \ldots, x_n$, de o matrice a_{ij}:

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0}.$$

Definiţie. Trecerea de la sistemul (1) la sistemul

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}\ (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{y} \in T\mathbf{R}^n_0) \qquad (4)$$

se numeşte liniarizarea sistemului (1).

Problemă. Să se demonstreze că liniarizarea este o operaţie corect definită: operatorul A nu depinde de sistemul de coordonate.

Avantajul sistemului liniarizat constă în faptul că el este liniar şi deci se rezolvă imediat:

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\,\mathbf{y}(0),\ \text{unde}\ e^{tA} = E + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \ldots .$$

Cunoscînd soluţiile sistemului liniarizat (4) putem obţine anumite informaţii despre soluţiile sistemului iniţial (1). Pentru $\mathbf{x}$ suficient de aproape de 0, diferenţa $\mathcal{R}_2(\mathbf{x})$ dintre sistemul liniarizat şi cel iniţial este mică în raport cu $|\mathbf{x}|$. Prin urmare, pe un interval de timp suficient de mare, soluţiile $\mathbf{y}(t)$ şi $\mathbf{x}(t)$ ale celor două sisteme, cu aceeaşi condiţie iniţială $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_0$, rămîn apropiate. Mai exact, se demonstrează cu uşurinţă următoarea

Teoremă. *Pentru orice $T > 0$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încît dacă* $|\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0| < \delta$, atunci

$$|\,\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\,| < \varepsilon\,\delta\ \textit{pentru orice}\ t,\ 0 < t < T.$$

D. Liniarizarea unui sistem lagrangean. Să ne îndreptăm din nou atenţia asupra sistemului lagrangean (2) şi să încercăm să-l liniarizăm în vecinătatea poziţiei de echilibru $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Pentru simplificarea formulelor vom alege coordonatele în aşa fel încît $\mathbf{q}_0 = 0$.

Teoremă. *Pentru a liniariza sistemul lagrangean* (2) *în vecinătatea poziţiei de echilibru* $\mathbf{q} = 0$ *este suficient să înlocuim energia cinetică* $T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j$ *cu valoarea ei pentru* $\mathbf{q} = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(0)\dot{q}_i\,\dot{q}_j$$

şi energia potenţială $U(\mathbf{q})$ *cu partea ei pătratică*

$$U_2 = \frac{1}{2}\sum b_{ij}\,q_i\,q_j,\ b_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=0}.$$

D e m o n s t r a ţ i e . Aducem sistemul lui Lagrange la forma (1), utilizînd coordonatele canonice $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T + U.$$

Poziţia de echilibru fiind $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = 0$, dezvoltarea membrului drept în serie Taylor în O începe cu termeni liniari în $\mathbf{p}$ şi $\mathbf{q}$. Cum însă membrul drept este dat de derivate parţiale, aceşti termeni *liniari* sînt definiţi de termenii *pătratici* H_2 ai dezvoltării Taylor a hamiltonianului $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ în 0. Dar H_2 este exact hamiltonianul sistemului cu lagrangeanul $L_2 = T_2 - U_2$; într-adevăr, este evident că $H_2 = T_2(\mathbf{p}) + U_2(\mathbf{q})$. Prin urmare, ecuaţiile de mişcare liniarizate sînt de fapt ecuaţiile de mişcare pentru sistemul descris în enunţul teoremei, cu lagrangeanul $L_2 = T_2 - U_2$, c.c.t.d.

E x e m p l u . Să considerăm un sistem cu un grad de libertate :

$$T = \frac{1}{2} a(q)\,\dot{q}^2, \quad U = U(q).$$

Fie q_0 o poziţie de echilibru stabilă (fig. 76) :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} > 0.$$

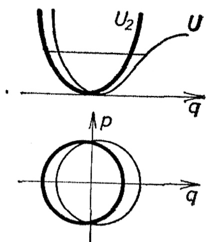


Fig. 76. Liniarizare.

După cum se ştie din tabloul din spaţiul fazelor, pentru condiţii iniţiale apropiate de $q = q_0$, $p = 0$, soluţia este periodică cu o perioadă τ care depinde, în general, de condiţiile iniţiale. Din cele două teoreme precedente rezultă un

Corolar. *În vecinătatea poziţiei de echilibru* $\mathbf{q}_0$, *perioada oscilaţiilor tinde, atunci cînd amplitudinea oscilaţiilor scade, la limita*

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{ unde } \omega_0^2 = \frac{b}{a},$$

$$b = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \partial}{\partial q^2}\right|_{q=q_0}, \quad a = a(q_0).$$

Într-adevăr, pentru sistemul liniarizat $T_2 = \frac{1}{2} a\dot{q}^2$, $U_2 = \frac{1}{2} bq^2$ (considerăm $q_0 = 0$). Soluţiile ecuaţiei lui Lagrange $\ddot{q} = -\omega_0^2 q$ au perioada $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$q = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

pentru orice amplitudine iniţială.

E. Oscilaţii mici.

D e f i n i ţ i e . Mişcările în sistemul lagrangean liniarizat ($L_2 = T_2 - U_2$) se numesc *oscilaţii mici**) în vecinătatea poziţiei de echilibru $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. În problema unidimensională τ_0 şi ω_0 se numesc *perioada oscilaţiilor mici* şi respectiv *frecvenţa oscilaţiilor mici*.

E x e m p l u. Să se determine perioada oscilaţiilor mici ale unei mărgele de masă 1 pe firul definit de ecuaţia $y = U(x)$ în cîmpul gravitaţional cu $g = 1$, în vecinătatea poziţiei de echilibru $x = x_0$ (fig. 77).

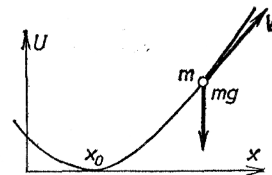


Fig. 77. Mărgea pe un fir.

*) În cazul în care poziţia de echilibru este instabilă, vom vorbi despre „oscilaţii mici instabile'', deşi în acest caz mişcarea nu mai are un caracter oscilatoriu.

Rezolvare. Avem

$$U = mgy = U(x),$$

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right].$$

Fie x_0 poziție de echilibru stabilă: $\partial U/\partial x\,|_{x_0} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$. Atunci frecvența oscilațiilor mici ω este definită de formula

$$\omega^2 = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0};$$

într-adevăr, pentru sistemul liniarizat $T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2$, $U_2 = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ $(q = x - x_0)$.

Problemă. Să se arate că nu numai oscilațiile mici, ci și toate mișcările mărgelei sînt echivalente cu mișcările într-un anumit sistem unidimensional cu lagrangeanul

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q).$$

Indicație. Se ia drept coordonată q lungimea de-a lungul firului.

§23. OSCILAȚII MICI

În paragraful de față se arată că un sistem lagrangean care efectuează oscilații mici, se descompune într-un produs direct de sisteme cu un grad de libertate.

A. Problema reducerii unei perechi de forme. Să analizăm amănunțit problema oscilațiilor mici. Cu alte cuvinte, să considerăm sistemul pentru care atît energia cinetică, cît și cea potențială, sînt forme pătratice:

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}),\quad U = \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}),\quad \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n,\quad \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

((,) — produsul scalar euclidian pe $\mathbf{R}^n$). Energia cinetică este o formă pătratică pozitiv definită.

Pentru a integra ecuațiile lui Lagrange, voi alege niște coordonate adecvate.

După cum se știe din algebra liniară, *o pereche de forme pătratice* $(A\mathbf{q}, \mathbf{q})$, $(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$ *dintre care prima este pozitiv definită, poate fi adusă la axele principale printr-o singură schimbare liniară de coordonate**):

$$\mathbf{Q} = C\mathbf{q},\quad \mathbf{Q} = (q_1, \ldots, q_n).$$

Coordonatele $\mathbf{Q}$ se pot alege în așa fel încît forma $(A\mathbf{q},\mathbf{q})$ să se reducă la suma de pătrate $(\mathbf{Q},\mathbf{Q})$. Fie $\mathbf{Q}$ coordonatele astfel alese. Atunci, deoarece $\dot{\mathbf{Q}} = C\dot{\mathbf{q}}$, avem

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{Q}_i^2,\quad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Q_i^2. \tag{2}$$

Numerele λ_i se numesc *valorile proprii ale formei B relativ la forma A.*

Problemă. Să se demonstreze că *valorile proprii ale lui B relativ la A satisfac ecuația caracteristică*

$$\det(B - \lambda A) = 0,$$

care are toate rădăcinile reale (matricile A și B sînt simetrice, $A > 0$).

B. Oscilațiile proprii. În coordonatele $\mathbf{Q}$ sistemul lui Lagrange se descompune în n ecuații independente

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i. \tag{3}$$

*) Dacă este mai comod, se poate introduce structura euclidiană luînd prima formă drept produs scalar, reducînd apoi a doua formă la axele sale principale printr-o transformare ortogonală în sensul acestei structuri euclidiene.

În acest mod, este demonstrată următoarea

Teoremă. *Un sistem care efectuează oscilaţii mici este un produs direct de n sisteme unidimensionale care efectuează oscilaţii mici.*

Pentru fiecare sistem unidimensional $\ddot{Q} = -\lambda Q$ există trei posibilităţi:

C a z u l 1. $\lambda = \omega^2 > 0$; soluţia este $Q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (oscilaţii).

C a z u l 2. $\lambda = 0$; soluţia este $Q = C_1 + C_2 t$ (echilibru indiferent).

C a z u l 3. $\lambda = -k^2 < 0$; soluţia este $Q = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt$ (instabilitate).

Corolar. *Să presupunem că una din valorile proprii ale sistemului* (3) *este pozitivă*: $\lambda_{i_0} = \omega_{i_0}^2 > 0$. *Atunci sistemul* (1) *poate efectua o oscilaţie periodică de forma*

$$q(t) = (C_1 \cos \omega_{i_0} t + C_2 \sin \omega_{i_0} t)\, \xi_{i_0}, \tag{5}$$

unde ξ_{i_0} *este un vector propriu corespunzător valorii proprii* λ_{i_0} (fig. 78):

$$B \cdot \xi_{i_0} = \lambda_{i_0} A \cdot \xi_{i_0}.$$

Această oscilaţie reprezintă produsul direct al oscilaţiilor unidimensionale $Q_{i_0} = C_1 \cos \omega_{i_0} t + C_2 \sin \omega_{i_0} t$ cu mişcările triviale $Q_i = 0$, $i \neq i_0$.

D e f i n i ţ i e. Mişcarea periodică (5) se numeşte *oscilaţie proprie* a sistemului (1), iar numărul ω_{i_0} se numeşte *frecvenţă proprie*.

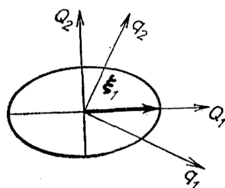


Fig. 78. Oscilaţii proprii.

O b s e r v a ţ i e. Oscilaţiile şi frecvenţele proprii se mai numesc şi *principale* sau *normale*. Valorilor proprii nepozitive λ_j le corespund şi lor vectori proprii; mişcările corespunzătoare le vom denumi, pentru comoditate, tot „oscilaţii proprii", deşi ele nu sînt periodice: „frecvenţele proprii" corespunzătoare sînt imaginare.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că numărul de oscilaţii proprii adevărate liniar independente este egal cu indicele pozitiv de inerţie al energiei potenţiale $\frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$.

Putem reformula acum rezultatul sub forma următoarei

Teoreme. *Sistemul* (1) *are n oscilaţii proprii ale căror direcţii sînt ortogonale două cîte două în raport cu produsul scalar dat de energia cinetică A.*

Într-adevăr, sistemul de coordonate $\mathbf{Q}$ este ortogonal în raport cu produsul scalar $(A\mathbf{q}, \mathbf{q})$, aşa cum rezultă din (2).

C. Descompunerea după oscilaţiile proprii. Din teorema demonstrată rezultă următorul

Corolar. *Fiecare oscilaţie mică este o sumă de oscilaţii proprii.*

În general însă o sumă de oscilaţii proprii nu este periodică (să ne amintim de figurile lui Lissajous!).

Pentru a descompune mişcarea într-o sumă de oscilaţii proprii este suficient să proiectăm condiţiile iniţiale $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ pe direcţiile proprii ξ_i şi să rezolvăm problemele unidimensionale corespunzătoare (4).

Prin urmare, ecuaţiile lui Lagrange pentru sistemul (1) se pot rezolva în modul următor. Pentru început, căutăm oscilaţiile proprii sub forma $\mathbf{q} = e^{i\omega t} \xi$. Introducînd această expresie în ecuaţia lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} A\dot{\mathbf{q}} = B\mathbf{q},$$

obţinem

$$(B - \omega^2 A)\,\xi = 0.$$

Din ecuaţia caracteristică (3) obţinem cele n valori proprii $\lambda_k = \omega_k^2$. Lor le corespund n vectori proprii ξ_k ortogonali doi cîte doi. În cazul $\lambda_k \neq 0$, $\forall\, k$, soluţia generală se scrie

$$\mathbf{q}(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=i}^{n} C_k e^{i\omega_k t} \xi_k .$$

O b s e r v a ţ i e. Acest rezultat este adevărat şi în cazul în care există şi valori proprii λ_k multiple.

Prin urmare, *într-un sistem lagrangean, spre deosebire de un sistem general liniar de ecuaţii diferenţiale, termenii de rezonanţă de forma* $t \sin \omega t$ *ş. a. nu apar nici măcar în cazul valorilor proprii multiple.*

D. Exemple.

Exemplul 1. Să considerăm un sistem format din două pendule matematice de lungimi $l_1 = l_2 = 1$, mase $m_1 = m_2 = 1$, în cîmpul gravitaţional cu $g = 1$. Să presupunem că pendulele sînt legate între ele printr-un arc fără greutate a cărei lungime este egală

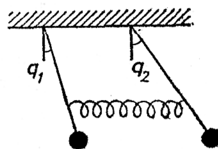


Fig. 79. Pendule identice legate.

cu distanţa dintre punctele de suspendare (fig. 79). Să notăm cu q_1 şi q_2 unghiurile de abatere de la verticală a pendulelor. Atunci, pentru oscilaţiile mici, $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $U = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$, unde $\frac{1}{2}\alpha(q_1 - q_2)^2$ este energia potenţială datorată elasticităţii arcului. Să punem

$$Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}.$$

Atunci

$$q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}$$

şi ambele forme sînt astfel aduse la axele principale:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2), \quad U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2),$$

unde $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$ (fig. 80). Prin urmare, cele două oscilaţii proprii sînt următoarele (fig. 81):

1) $Q_2 = 0$, deci $q_1 = q_2$: ambele pendule se mişcă sincron (cu aceeaşi fază) cu frecvenţa 1; arcul nu acţionează.

2) $Q_1 = 0$, deci $q_1 = -q_2$; pendulele se mişcă cu faze opuse, cu frecvenţa $\omega_2 > 1$ care este mai mare, datorită acţiunii arcului.

Să presupunem acum că arcul este foarte slab: $\alpha \ll 1$. În acest caz, se observă un efect interesant: *pomparea de energie* de la un pendul la celălalt.

Exemplul 2. Să presupunem că la momentul iniţial ambele pendule sînt în repaus şi că unuia dintre ele i se imprimă viteza $\dot{q}_1 = v$. Să se arate că *după un anumit*

timp T primul pendul va fi aproape nemişcat, iar toată energia va fi transmisă celui de-al doilea.

Din condiţiile iniţiale rezultă $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ şi deci $Q_1 = c_1 \sin t$, $Q_2 = c_2 \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{1 + 2\alpha} \approx 1 + \alpha (\alpha \ll 1)$.

Dar $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = v/\sqrt{2}$. Rezultă că $c_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{v}{\omega\sqrt{2}}$ şi soluţia noastră are expresia

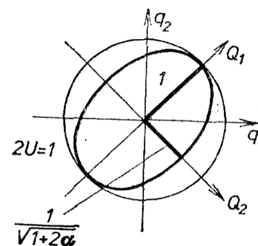


Fig. 80. Spaţiul configuraţiilor pendulelor legate.

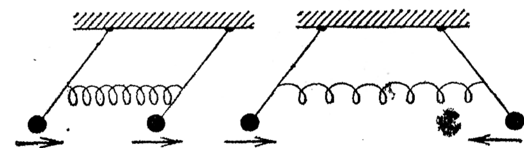


Fig. 81. Oscilaţii proprii ale pendulelor legate.

$$q_1 = \frac{v}{2}\left(\sin t + \frac{1}{\omega}\sin \omega t\right),$$

$$q_2 = \frac{v}{2}\left(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin \omega t\right),$$

sau, neglijînd termenii $v\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\sin \omega t$, care sînt mici împreună cu α

$$q_1 \approx \frac{v}{2}(\sin t + \sin \omega t) = v \cos \varepsilon t \sin \omega' t,$$

$$q_2 \approx \frac{v}{2}(\sin t - \sin \omega t) = -v \sin \varepsilon t \cos \omega' t,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega - 1}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad \omega' = \frac{\omega + 1}{2} \approx 1.$$

Mărimea $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ este mică împreună cu α și deci q_1 efectuează oscilații cu frecvența $\omega' \approx 1$ și cu amplitudinea $v \cos \varepsilon t$ care variază lent (fig. 82).

După timpul $T = \pi/2\varepsilon \approx \pi/\alpha$, va oscila practic numai al doilea pendul, după timpul $2T$ — din nou primul ș.a.m.d. (« *bătăi* ») (fig. 83).

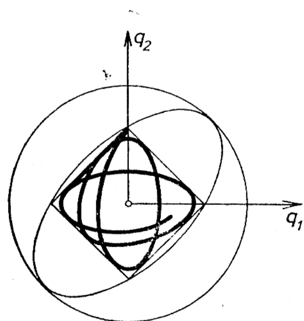


Fig. 82. Bătăi: traiectoriile în spațiul configurațiilor.

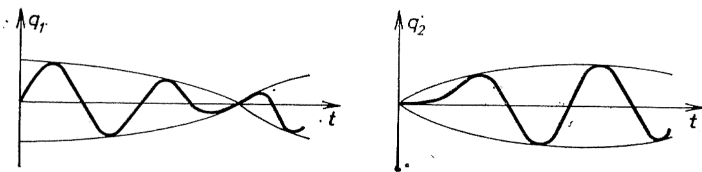


Fig. 83. Bătăi.

Exemplul 3. *Să se studieze oscilațiile proprii a două pendule inegale* ($m_1 \neq m_2$, $l_1 \neq l_2$, $g = 1$) *unite printr-un arc cu energia* $\frac{1}{2}\alpha(q_1 - q_2)^2$ (fig. 84). *Cum se comportă oscilațiile proprii atunci cînd* $\alpha \to 0$ *și cînd* $\alpha \to \infty$?

Avem

$$T = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2),$$

$$U = m_1 l_1 \frac{q_1^2}{2} + m_2 l_2 \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha(q_1 - q_2)^2}{2}.$$

Prin urmare (fig. 85)

$$A = \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} m_1 l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha \end{pmatrix}$$

și ecuația caracteristică are forma

$$\det(B - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} m_1 l_1 + \alpha - \lambda m_1 l_1^2 & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha - \lambda m_2 l_2^2 \end{pmatrix} = 0,$$

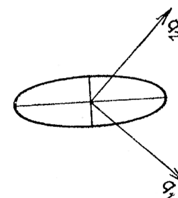


Fig. 84. Pendule legate.

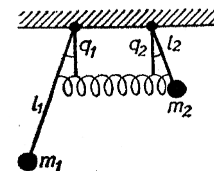


Fig. 85. Energia potențială a pendulelor puternic legate.

sau

$$a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0,$$

unde $a = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2$,

$$b_0 = m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2), \quad b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2,$$

$$c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2, \quad c_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2.$$

Aceasta este ecuația unei hiperbole în planul (α, λ) (fig. 86). Cînd $\alpha \to 0$ (arc slab) frecvențele tind către frecvențele pendulelor libere ($\omega_{1,2}^2 = l_{1,2}^{-1}$); cînd $\alpha \to \infty$ (arc foarte puternic) una din frecvențe tinde la ∞, iar cea de-a doua — la frecvența proprie ω_∞ a unui pendul cu două mase m_1 și m_2 pe aceeași tijă (fig. 87):

$$\omega_\infty^2 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

Problemă. Să se studieze oscilaţiile proprii ale unui pendul dublu plan (fig. 88).

Problemă. Să se determine forma traiectoriilor oscilaţiilor mici ale unui punct din plan care se află în centrul unui triunghi echilateral și este unit prin arcuri identice cu vîrfurile triunghiului (fig. 89).

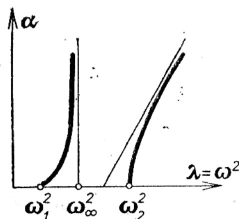


Fig. 86. Dependenţa frecvenţelor proprii de rigiditatea arcului.

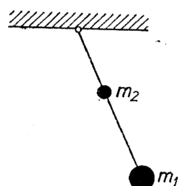


Fig. 87. Cazul limită al pendulelor legate printr-un arc de rigiditate infinită.

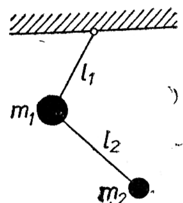


Fig. 88. Pendul dublu.

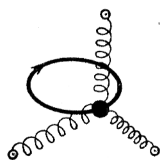


Fig. 89. Un sistem cu o infinitate de oscilaţii proprii.

Rezolvare. Sistemul este invariant la o rotaţie de 120°. Prin urmare, toate direcţiile sînt proprii și cele două frecvenţe proprii sînt egale: $U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$. Rezultă că traiectoriile sînt elipse (vezi fig. 20).

§24. ASUPRA COMPORTĂRII FRECVENŢELOR PROPRII

Aici se demonstrează teoremele lui Rayleigh — Courant — Fischer privind comportarea frecvenţelor proprii la creșterea rigidităţii și la impunerea de legături.

A. Comportarea frecvenţelor proprii la variaţia rigidităţii.

Să considerăm un sistem care efectuează oscilaţii mici cu energia cinetică și energia potenţială date de

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0,\ U = \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0,\ \forall\ \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \neq 0.$$

Definiţie. Un sistem cu aceeași energie cinetică și cu energia potenţială U' este denumit *mai rigid* decît primul dacă

$$U'(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(B'\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geqslant \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) = U, \text{ pentru orice } \mathbf{q}.$$

Vrem să determinăm cum variază frecvenţele proprii ale sistemului atunci cînd rigiditatea acestuia crește.

Problemă. Analizaţi cazul unidimensional.

Teorema 1. *Atunci cînd rigiditatea crește, toate frecvenţele proprii cresc: dacă $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n$ sînt frecvenţele proprii ale sistemului cu rigiditate mai mică și $\omega_1' \leqslant \omega_2' \leqslant \ldots \leqslant \omega_n'$ sînt cele ale sistemului cu rigiditatea mai mare, atunci $\omega_1 \leqslant \omega_1'$, $\omega_2 \leqslant \omega_2'$, ..., $\omega_n \leqslant \omega_n'$.*

Această teoremă are o interpretare geometrică simplă. Fără a pierde din generalitate, putem considera că $A = E$; altfel spus, considerăm structura euclidiană dată de energia cinetică $T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$. Fiecărui sistem îi asociem elipsoidul $\mathcal{E} : \{\mathbf{q} \mid (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1\}$, respectiv $\mathcal{E}' = \{\mathbf{q} \mid (B'\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1\}$. Este evidentă următoarea

Lema 1. *Dacă sistemul U' este mai rigid ca sistemul U, atunci elipsoidul $\mathcal{E}'$ este inclus în interiorul elipsoidului $\mathcal{E}$.*

La fel de clară este demonstraţia următoarei leme.

Lema 2. *Semiaxele principale ale elipsoidului sînt inversele frecvenţelor proprii* ω_i :

$$\omega_i = \frac{1}{a_i}.$$

Prin urmare, teorema 1 este echivalentă cu următoarea propoziţie cu caracter geometric (fig. 90).

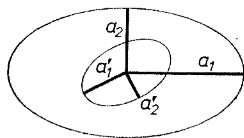


Fig. 90. Semiaxele elipsoidului interior sînt mai mici.

Teorema 2. *Dacă elipsoidul* $\mathcal{E}$ *cu semiaxele* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ *conţine în interiorul său elipsoidul* $\mathcal{E}'$ *cu semiaxele* $a'_1 \geqslant a'_2 \geqslant \ldots \geqslant a'_n$, *care are acelaşi centru, atunci semiaxele elipsoidului din interior sînt mai mici* :

$$a_1 \geqslant a'_1,\ a_2 \geqslant a'_2,\ \ldots,\ a_n \geqslant a'_n.$$

Exemplu. Atunci cînd rigiditatea α a arcului care uneşte pendulele din exemplul 3, §23, creşte, creşte şi energia potenţială şi conform teoremei 1, cresc frecvenţele proprii:

$$\frac{d\omega_i}{d\alpha} > 0.$$

Să considerăm cazul în care rigiditatea arcului $\alpha \to \infty$. În acest caz, la limită pendulele devin rigid legate şi se obţine un sistem cu un grad de libertate; frecvenţa proprie ω_∞ satisface inegalitatea $\omega_1 < \omega_\infty < \omega_2$.

B. Comportarea frecvenţelor proprii la impunerea de legături. Să ne întoarcem la un sistem general cu n grade de libertate care efectuează mici oscilaţii, cu energia cinetică $T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ şi energia potenţială $U = \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$. Fie $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ un

subspaţiu de codimensiune 1 al lui $\mathbf{R}^n$ (fig. 91). Considerăm sistemul cu $n-1$ grade de libertate ($\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{n-1}$), cu energia potenţială şi cu cea cinetică obţinută prin restricţia lui U şi T la $\mathbf{R}^{n-1}$. Se spune că acest sistem a fost obţinut din cel iniţial prin *impunerea unei legături liniare.*

Să notăm cu $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n$ frecvenţele proprii ale sistemului iniţial şi cu $\omega'_1 \leqslant \omega'_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega'_{n-1}$ frecvenţele proprii (sînt numai $n-1$!) ale sistemului cu legătură.

Teorema 3. *Frecvenţele proprii ale sistemului cu legătură separă frecvenţele proprii ale sistemului iniţial* (fig. 92).

$$\omega_1 \leqslant \omega'_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega'_2 \leqslant \ldots \omega_{n-1} \leqslant \omega'_{n-1} \leqslant \omega_n.$$

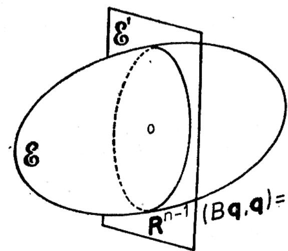


Fig. 91. Legătură liniară.

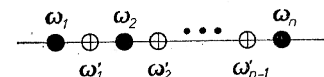


Fig. 92. Separarea frecvenţelor.

Dacă ţinem seama de lema 2, această teoremă este echivalentă cu următoarea afirmaţie cu caracter geometric.

Teorema 4. *Să considerăm secţiunea elipsoidului* $\mathcal{E} = \{\mathbf{q} \mid (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1\}$ *cu semiaxele* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, *cu hiperplanul* $\mathbf{R}^{n-1}$. *Atunci semiaxele elipsoidului* $(n-1)$ *— dimensional de secţiune* $\mathcal{E}'$ *separă semiaxele lui* $\mathcal{E}$ (fig. 93)

$$a_1 \geqslant a'_1 \geqslant a_2 \geqslant a'_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant a'_{n-1} \geqslant a_n.$$

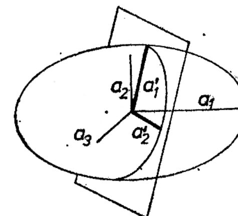


Fig. 93. Semiaxele secţiunii separă semiaxele elipsoidului.

C. Proprietăţile extremale ale frecvenţelor proprii.

Teorema 5. *Pentru orice secţiune a elipsoidului* $\mathcal{E}$ *cu semiaxele* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ *cu un subspaţiu* $\mathbf{R}^k$ *de dimensiune* k *al lui* $\mathbf{R}^n$, *semiaxa cea mai mică a elipsoidului de secţiune este mai mică sau egală cu* a_k :

$$a_k = \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}} \|\mathbf{x}\|.$$

(marginea superioară se obţine pentru subspaţiul generat de direcţiile semiaxelor $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k$).

D e m o n s t r a ţ i e *). Să considerăm subspaţiul $\mathbf{R}^{n-k+1}$ generat de direcţiile semiaxelor $a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Fiind de dimensiune $n-k+1$, el intersectează orice subspaţiu $\mathbf{R}^k$ dat. Fie $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-k+1} \cap \mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}$. Atunci $\|\mathbf{x}\| \leqslant a_k$, deoarece $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-k+1}$. Cum însă lungimea $\|\mathbf{x}\|$ nu este mai mică decît lungimea celei mai mici semiaxe a elipsoidului $\mathcal{E} \cap \mathbf{R}^k$, aceasta din urmă nu este mai mare ca a_k, c.c.t.d.

D e m o n s t r a ţ i a   t e o r e m e i   2. Semiaxa mică a fiecărei secţiuni (de dimensiune k) a elipsoidului interior $\mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}'$ nu este mai mare decît semiaxa mică a secţiunii $\mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}$. Conform teoremei 5,

$$a'_k = \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}'} \|\mathbf{x}\| \leqslant \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}} \|\mathbf{x}\| = a_k, \quad \text{c.c.t.d.}$$

D e m o n s t r a ţ i a   t e o r e m e i   4. Inegalitatea $a'_k \leqslant a_k$ rezultă din teorema 5, deoarece în calculul lui a_k maximul se ia pe o mulţime mai mare. Pentru a demonstra inegalitatea $a'_k \geqslant a_{k+1}$, intersectăm pe $\mathbf{R}^{n-1}$ cu orice subspaţiu $\mathbf{R}^{k+1}$ de dimensiune $k+1$. Dimensiunea intersecţiei nu este mai mică decît k. Cea mai mică semiaxă a elipsoidului $\mathcal{E}' \cap \mathbf{R}^{k+1}$ nu este mai mică decît cea mai mică semiaxă a elipsoidului $\mathcal{E} \cap \mathbf{R}^{k+1}$. Conform teoremei 5

$$a'_k = \max_{\{\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^{n-1}\}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k \cap \mathcal{E}'} \|\mathbf{x}\| \geqslant \max_{\{\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n\}} \min_{x \in \mathbf{R}^{k+1} \cap \mathcal{E}'} \|\mathbf{x}\| \geqslant$$

$$\geqslant \max_{\{\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n\}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{k+1} \cap \mathcal{E}} \|\mathbf{x}\| = a_{k+1}, \quad \text{c.c.t.d.}$$

Teoremele 1 şi 3 rezultă imediat din cele demonstrate.

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că dacă, fără a varia energia potenţială, facem să crească energia cinetică (de exemplu, lăsînd aceleaşi arcuri şi mărind masele) atunci fiecare frecvenţă proprie se micşorează.

*) Este util să avem în minte cazul $n=3$, $k=2$.

P r o b l e m ă. Fie un elipsoid într-un subspaţiu al lui $\mathbf{R}^n$. Să se demonstreze că dacă acest elipsoid se proiectează ortogonal pe un alt subspaţiu, atunci toate semiaxele proiecţiei sînt mai mici.

P r o b l e m ă. Fie $A(\varepsilon)$ o formă pătratică pe spaţiul euclidian $\mathbf{R}^n$ care depinde continuu diferenţiabil de parametrul ε. Să se arate că fiecare valoare proprie a formei depinde diferenţiabil de ε şi să se calculeze derivatele.

Răspuns. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valorile proprii ale *lui* $A(0)$. Fiecărei valori proprii λ_i de multiplicitatea ν_i îi corespunde un subspaţiu $\mathbf{R}^{\nu_i}$. *Derivatele în zero* ($\varepsilon=0$) *ale valorilor proprii ale lui* $A(\varepsilon)$ *sînt egale cu valorile proprii ale restricţiei formei* $B = \left.\dfrac{dA}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ *la* $\mathbf{R}^{\nu_i}$.

În particular, *dacă toate valorile proprii ale lui* $A(0)$ *sînt simple, derivatele lor sînt egale cu elementele diagonale ale matricii lui* B *într-o bază proprie a lui* $A(0)$.

Din aceste ultime afirmaţii rezultă că atunci cînd o formă pătratică creşte, valorile ei proprii cresc. Obţinem în acest mod o nouă demonstraţie a teoremelor 1 şi 2.

P r o b l e m ă. Cum variază înălţimea sunetului unui clopot atunci cînd apare o fisură ?

§25. REZONANŢA PARAMETRICĂ

Dacă parametrii unui sistem variază periodic în timp, atunci poziţia de echilibru poate deveni instabilă, chiar dacă ea este stabilă pentru fiecare valoare fixată a parametrului. Datorită acestei instabilităţi putem să ne dăm în leagăn.

A. Sisteme dinamice ale căror parametrii variază periodic în timp.

E x e m p l u l 1. *Leagănul* pentru care lungimea $l(t)$ a pendulului matematic corespunzător variază periodic în timp : $l(t+T) \equiv \equiv l(t)$ (fig. 94).

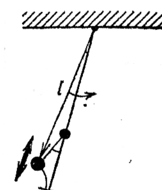


Fig. 94. Leagăn.

E x e m p l u l 2. *Pendulul în cîmpul unei forţe gravitaţionale care variază periodic în timp* (de exemplu, Luna) *este descris de ecuaţia lui Hill*

$$\ddot{q} = -\omega^2(t)\, q, \qquad \omega(t+T) \equiv \omega(t). \tag{1}$$

E x e m p l u l 3. *Pendulul al cărui punct de suspendare oscilează periodic pe verticală în timp este de asemenea descris de ecuaţia* (1).

Pentru sistemele care depind de parametrii care variază periodic în timp, membrul drept al ecuaţiei de mişcare este o funcţie periodică de t. Ecuaţia de mişcare se poate scrie ca un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întîi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t+T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

cu membrul drept periodic. De exemplu, ecuaţia (1) se poate scrie sub forma sistemului

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega(t)\, x_1, \end{aligned}\right\} \omega(t+T) \equiv \omega(t). \tag{3}$$

B. Evoluţia după o perioadă. Reamintim proprietăţile generale ale sistemului (2). Să notăm cu $g^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ aplicaţia care transformă fiecare punct $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ în valoarea $g^t\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, la momentul t, a soluţiei sistemului (2) cu condiţia iniţială $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{x}$ (fig. 95). Aplicaţiile g^t nu formează un grup : în general,

$$g^{t+s} \neq g^t \circ g^s \neq g^s \circ g^t.$$

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că $\{g^t\}$ *este un grup cu un parametru dacă şi numai dacă membrul drept* $\mathbf{f}$ *nu depinde de* t.

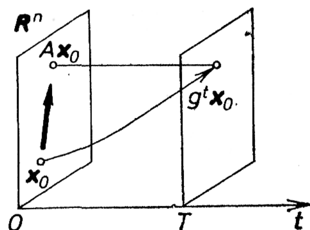


Fig. 95. Evoluţia după o perioadă.

P r o b l e m ă . *Să se demonstreze că dacă T este perioada lui* $\mathbf{f}$, *atunci* $g^{T+s} = g^s \circ g^T$ *şi deci, în particular,* $g^{nT} = (g^T)^n$: *aplicaţiile* $\{g^{nT}\}$ *formează un grup* (n *întreg*).

Aplicaţia $g^T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ joacă un rol important în cele ce urmează ; o vom denumi *evoluţia după o perioadă* şi o vom nota cu

$$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad A(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(T).$$

E x e m p l u. Pentru sistemele

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

care pot fi considerate periodice cu orice perioadă T, aplicaţia A este o rotaţie, respectiv o rotaţie hiperbolică (fig. 96).

Teoremă. 1) *Punctul* $\mathbf{x}_0$ *este punct fix al aplicaţiei* A ($A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$) *dacă şi numai dacă soluţia cu condiţia iniţială* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *este periodică de perioadă* T.

2) *O soluţie periodică (de perioadă T)* $t \to \mathbf{x}(t)$ *este stabilă în sens Liapunov (respectiv asimptotic stabilă) dacă şi numai dacă punctul fix* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ *al aplicaţiei A este stabil în sens Liapunov (respectiv asimptotic stabil)**).

3) *Dacă sistemul* (2) *este liniar, deci* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f(t)\mathbf{x}$, *unde* $f(t) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *este o aplicaţie liniară* $\forall t$, *atunci aplicaţia A este liniară.*

4) *Dacă sistemul* (2) ***este hamiltonian, atunci aplicaţia A conservă*** *volumul* : $\det A = 1$.

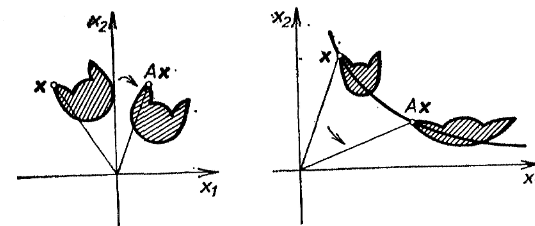


Fig. 96. Rotaţie şi rotaţie hiperbolică.

D e m o n s t r a ţ i e. Afirmaţiile 1) şi 2) rezultă din relaţia $g^{T+s} = g^s A$, $\forall s \in \mathbf{R}$. Pentru 3) se ţine seama că suma a două soluţii

*) Punctul fix $\mathbf{x}_0$ al aplicaţiei A este *stabil în sens Liapunov* (*asimptotic stabil*) dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, astfel încît din $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| < \delta$ rezultă $|A^n\mathbf{x} - A^n\mathbf{x}_0| < \varepsilon$ pentru orice $0 < n < \infty$ (respectiv $A^n\mathbf{x} - A^n\mathbf{x}_0 \to 0$ cînd $n \to \infty$).

ale unui sistem liniar este tot o soluție. Afirmația 4) rezultă din teorema lui Liouville.

Să aplicăm teorema demonstrată aplicației A a planului fazelor $\{(x_1, x_2)\}$ în el însuși, corespunzătoare ecuației (1) și sistemului (3). Sistemul (3) fiind liniar și hamiltonian $\left(H = \frac{x_2^2}{2} + \omega^2 \frac{x_1^2}{2}\right)$ obținem un

Corolar. *Aplicația A este liniară și conservă aria* (det $A = 1$). *Pentru ca soluția nulă a ecuației* (1) *să fie stabilă este necesar și suficient ca aplicația A să fie stabilă* (*adică punctul* (0, 0) *să fie punct fix stabil pentru* A).

Problemă. Să se demonstreze că orice rotație (rotație hiperbolică) în plan este o aplicație stabilă (respectiv instabilă).

C. Aplicații liniare ale planului în plan care păstrează aria.

Teoremă. *Fie A matricea unei transformări liniare a planului care păstrează aria* (det $A = 1$). *Atunci aplicația A este stabilă dacă* $|\text{tr}\, A| < 2$ *și instabilă dacă* $|\text{tr}\, A| > 2$ (tr $A = a_{11} + a_{22}$).

Demonstrație. Fie λ_1, λ_2 cele două valori proprii ale aplicației A. Ele satisfac ecuația caracteristică $\lambda^2 - \text{tr}\, A\, \lambda + 1 = 0$, cu coeficienții reali $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}\, A$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 1$.

Rădăcinile λ_1 și λ_2 ale acestei ecuații sînt reale pentru $|\text{tr}\, A| > 2$ și complex conjugate pentru $|\text{tr}\, A| < 2$.

În primul caz, una din valorile proprii este mai mare în modul ca 1, cealaltă este mai mică în modul ca 1 și aplicația A este o rotație hiperbolică, deci instabilă (fig. 97).

În al doilea caz, valorile proprii se găsesc pe cercul unitate (fig. 97)

$$1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2.$$

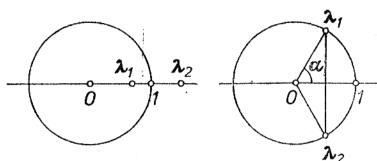


Fig. 97. Valorile proprii ale aplicației A.

Aplicația A este echivalentă cu o rotație de unghi α (unde $\lambda_1 = e^{\pm i\alpha}$): se reduce la această rotație printr-o alegere adecvată a coordonatelor în plan. Prin urmare, ea este stabilă, c.c.t.d.

Rezultă că întreaga problemă a stabilității soluției nule a ecuației (1) se reduce la calculul urmei matricii A. Din păcate, calculul acestei urme poate fi efectuat numai în cazuri speciale. Urma poate fi determinată întotdeauna aproximativ, integrînd numeric ecuația pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant T$. În cazul important în care funcția $\omega(t)$ este apropiată de o constantă, sînt utile considerații simple de ordin general.

D. Stabilitatea tare.

Definiție. Soluția nulă a unui sistem hamiltonian liniar este *tare stabilă* dacă ea este stabilă și pentru fiecare sistem hamiltonian liniar suficient de apropiat de cel dat, soluția nulă este stabilă*).

Din cele două teoreme precedente rezultă un

Corolar. *Dacă* $|\text{tr}\, A| < 2$, *atunci soluția nulă* (*a sistemului* (1)) *este tare stabilă.*

Într-adevăr, dacă $|\text{tr}\, A| < 2$, atunci pentru orice sistem suficient de apropiat operatorul A' corespunzător satisface și el inegalitatea $|\text{tr}\, A'| < 2$.

Să aplicăm acest rezultat unui sistem cu coeficienți aproape constanți (care variază lent). De exemplu, să considerăm ecuația

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon\, a(t))x, \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{4}$$

unde $a(t + 2\pi) \equiv a(t)$, (un exemplu : $a(t) = \cos t$) (fig. 98). (Este deci vorba de un pendul a cărui frecvență oscilează în jurul valorii ω cu amplitudine mică și perioadă 2π)**).

Fiecărui sistem (4) i se asociază un punct în planul parametrilor $\varepsilon, \omega > 0$. Evident, sistemele stabile cu $|\text{tr}\, A| < 2$ formează în planul (ω, ε) o mulțime deschisă, la fel ca și sistemele instabile cu $|\text{tr}\, A| > 2$ (fig. 99).

Frontiera de stabilitate este dată de ecuația $|\text{tr}\, A| = 2$.

Teoremă. *Toate punctele axei* ω, *exceptînd cele întregi și semi-întregi* : $\omega = k/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *corespund la sisteme* (4) *tare stabile.*

Prin urmare, mulțimea sistemelor instabile poate ajunge la axa ω numai în punctele $\omega = k/2$. Cu alte cuvinte, un leagăn poate fi pus în oscilație prin modificarea lentă și periodică a lungimii

*) Distanța dintre sistemele liniare cu coeficienți periodici $\dot{\mathbf{x}} = B_1(t)\mathbf{x}$ și $\dot{\mathbf{x}} = B_2(t)\mathbf{x}$ se definește ca fiind maximul după t al distanței dintre operatorii $B_1(t)$ și $B_2(t)$.

**) Pentru $a(t) = \cos t$, (4) se numește *ecuația lui Mathieu.*

numai atunci cînd o perioadă de variaţie a lungimii este apropiată de un număr întreg de semiperioade ale oscilaţiilor proprii — rezultat cunoscut tuturor din experienţă.

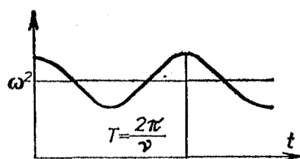


Fig. 98. Frecvenţa instantanee ca funcţie de timp.

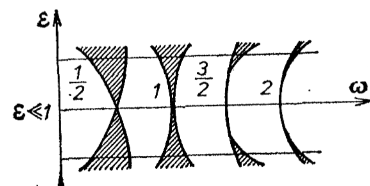


Fig. 99. Zone de rezonanţă parametrică.

Demonstraţia teoremei enunţate se bazează pe faptul că pentru $\varepsilon = 0$ ecuaţia (4) are coeficienţi constanţi şi se rezolvă explicit.

P r o b l e m ă . *Pentru sistemul* (4) *cu* $\varepsilon = 0$ *să se calculeze matricea* A *a evoluţiei după o perioadă* $T = 2\pi$, *în baza* $x, \dot{x}$.

R e z o l v a r e . Soluţia generală este

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Soluţia particulară cu condiţia iniţială $x = 1, \dot{x} = 0$:

$$x = \cos \omega t, \qquad \dot{x} = -\omega \sin \omega t.$$

Soluţia particulară cu condiţia iniţială, $x = 0, \quad \dot{x} = 1$:

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \qquad x = \cos \omega t.$$

Răspuns.

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Prin urmare $|\operatorname{tr} A| = |2 \cos 2\pi\omega| < 2$ dacă $\omega \neq k/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ şi teorema rezultă din corolarul precedent.

O analiză mai atentă *) arată că, în general, (şi pentru $a(t) = \cos t$) domeniul de instabilitate (haşurat în fig. 99) ajunge într-adevăr la axa ω în vecinătatea punctelor $\omega = k/2$, $k = 1, 2, \ldots$.

Prin urmare, pentru $\omega \approx k/2$, $k = 1, 2, \ldots$, poziţia de echilibru inferioară a unui leagăn idealizat (4) este instabilă şi el intră în oscilaţie la o variaţie periodică oricît de mică a lungimii. Acest fenomen se numeşte rezonanţă parametrică. Proprietatea caracteristică a rezonanţei parametrice este aceea că ea se manifestă cel mai puternic în cazul în care frecvenţa ν de variaţie a parametrilor (în ecuaţia (4), $\nu = 1$) este de două ori mai mare decît frecvenţa proprie ω.

O b s e r v a ţ i e . Teoretic, rezonanţa parametrică se observă pentru o infinitate de valori ale raportului $\omega/\nu \approx k/2, k = 1, 2, \ldots$ Practic însă se observă numai cazurile în care k nu este mare ($k = 1$, 2 şi mai rar 3). Motivele sînt următoarele:

a) Pentru valori mari ale lui k, domeniul de instabilitate ajunge la axa ω în forma unei limbi ascuţite şi pentru frecvenţa de rezonanţă ω se obţin limite foarte rigide ($\sim \varepsilon^k$ pentru o funcţie netedă $a(t)$ în (4));

b) Instabilitatea se manifestă şi ea slab pentru valori mari ale lui k, deoarece $|\operatorname{tr} A| - 2$ nu este mare şi valorile proprii sînt apropiate de unitate;

c) O frecare oricît de mică conduce la apariţia unei valori minime $\varepsilon_k \neq 0$ a amplitudinii, necesară pentru apariţia rezonanţei parametrice (pentru valori mai mici ale lui ε, oscilaţiile se amortizează). ε_k creşte rapid cu creşterea lui k (fig. 100).

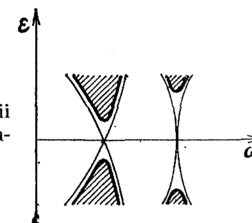


Fig. 100. Influenţa frecării asupra rezonanţei parametrice.

De asemenea, să observăm că pentru ecuaţia (4) în cazul instabil mărimea x creşte nemărginit.

*) Vezi, de exemplu, problema de mai jos.

În sistemele reale oscilaţiile ating numai o amplitudine finită : pentru valori mari ale lui x, chiar şi ecuaţia liniarizată (4) îşi pierde sensul şi trebuie luate în considerare efectele neliniare.

P r o b l e m ă. *Să se determine aspectul zonelor de stabilitate în planul* ω, ε *pentru sistemul descris de ecuaţia*

$$\ddot{x} = -f^2(t)x, \quad f(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon, & 0 < t < \pi, \\ \omega - \varepsilon, & \pi < t < 2\pi, \end{cases} \qquad \varepsilon \ll 1,$$

$$f(t + 2\pi) \equiv f(t).$$

R e z o l v a r e. Din rezolvarea problemei precedente rezultă că $A = A_2 A_1$, unde

$$A_k = \begin{pmatrix} c_k & \dfrac{1}{\omega_k} s_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} c_k &= \cos \pi\omega_k, \\ s_k &= \sin \pi\omega_k, \\ \omega_{1,2} &= \omega \pm \varepsilon. \end{aligned}$$

Frontiera zonei de stabilitate este dată de ecuaţia

$$|\operatorname{tr} A| = \left| 2c_1c_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) s_1 s_2 \right| = 2. \qquad (5)$$

Cum $\varepsilon \ll 1$, avem $\omega_1/\omega_2 = (\omega + \varepsilon)/(\omega - \varepsilon) \approx 1$.
Introducem notaţia

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2(1 + \Delta).$$

După un calcul simplu, obţinem $\Delta = \dfrac{2 \cdot \varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4) \ll 1$. Utilizînd relaţiile $2c_1c_2 = \cos 2\pi\varepsilon + \cos 2\pi\omega$, $2s_1s_2 = \cos 2\pi\varepsilon - \cos 2\pi\omega$, ecuaţia (5) devine

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2 + \Delta)\cos 2\pi\omega = \pm 2,$$

sau

$$\cos 2\pi\omega = \frac{2 + \Delta\cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}, \qquad (6_1)$$

$$\cos 2\pi\omega = \frac{-2 + \Delta\cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}. \qquad (6_2)$$

În primul caz $\cos 2\pi\omega \approx 1$. Putem deci pune

$$\omega = k + a, \ |a| \ll 1, \ \cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4).$$

Ecuaţia (6_1) poate fi pusă sub forma

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta}(1 - \cos 2\pi\varepsilon),$$

sau $2\pi^2 a^2 + O(a^4) = \Delta\pi^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$.

Introducînd valoarea lui $\Delta = 2\varepsilon^2/\omega^2 + O(\varepsilon^4)$, obţinem

$$a = \pm \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^2), \quad \text{deci} \quad \omega = k \pm \frac{\varepsilon^2}{k^2} + O(\varepsilon^2).$$

Ecuaţia (6_2) se rezolvă similar. În final, obţinem

$$\omega = k + \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{\pi\left(k + \dfrac{1}{2}\right)} + O(\varepsilon).$$

Prin urmare, răspunsul la problemă poate fi citit pe fig. 101.

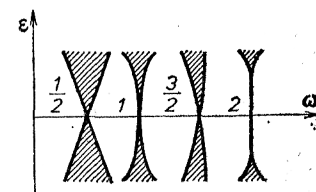


Fig. 101. Zone de rezonanţă parametrică pentru $f = \omega \pm \varepsilon$.

E. Stabilitatea pendulului răsturnat al cărui punct de suspendare oscilează pe verticală.

P r o b l e m ă. *Poate deveni poziţia de echilibru superioară a pendulului, care de obicei este instabilă, stabilă dacă punctul de suspendare oscilează pe verticală* (fig. 102) ?

Să presupunem că pendulul are următoarele date : lungimea l, amplitudinea de oscilaţie a punctului de suspendare $a \ll l$, perioada de oscilaţie a punctului de suspendare 2τ şi în timpul fiecărei semiperioade, acceleraţia punctului de suspendare este *constantă* şi egală cu $\pm c$ (atunci $c = 8a/\tau^2$). Se dovedeşte că pentru osci-

laţii suficient de rapide ale punctului de suspendare ($\tau \ll 1$) poziţia superioară de echilibru devine stabilă.

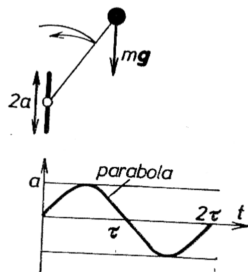


Fig. 102. Pendul răsturnat al cărui punct de suspendare oscilează.

R e z o l v a r e. Ecuaţia de mişcare se poate scrie sub forma $\ddot{x} = (\omega^2 + d^2)x$ (semnul se schimbă după timpul τ) unde $\omega^2 = g/l$, $d^2 = c/l$. Dacă oscilaţiile punctului de suspendare sînt destul de rapide, atunci $d^2 > \omega^2$ ($d^2 = 8a/l\tau^2$).

În analogie cu problema precedentă $A = A_2 A_1$, unde

$$A_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k\tau & \frac{1}{k}\operatorname{sh} k\tau \\ k \operatorname{sh} k\tau & \operatorname{ch} k\tau \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega}\sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix},$$

$$k^2 = d^2 + \omega^2, \quad \Omega^2 = d^2 - \omega^2.$$

Condiţia de stabilitate $|\operatorname{tr} A| < 2$ are deci forma

$$\left|2 \operatorname{ch} k\tau \cos \Omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau\right| < 2. \tag{7}$$

Să arătăm că această condiţie este îndeplinită pentru oscilaţii destul de rapide ale punctului de suspendare, deci pentru $c \gg g$. Să introducem mărimile adimensionale ε şi μ:

$$\frac{a}{l} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1.$$

Atunci

$$k\tau = 2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \qquad \Omega\tau = 2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} = \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = 2\mu^2 + O(\mu^4).$$

Prin urmare, pentru ε şi μ mici, sînt adevărate dezvoltările cu eroarea $O\ (\varepsilon^4 + \mu^4)$

$$\operatorname{ch} k\tau = 1 + 4\varepsilon^2 (1 + \mu^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \ldots,$$

$$\cos \Omega\tau = 1 - 4\varepsilon^2 (1 - \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \ldots,$$

$$\left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau = 16\,\varepsilon^2\mu^2 + \ldots.$$

Condiţia de stabilitate (7) devine

$$2\left(1 - 16\,\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \ldots\right) + 16\,\varepsilon^2\mu^2 < 2,$$

deci neglijînd mărimile de ordin superior,

$$\frac{2}{3}16\varepsilon^4 \geqslant 32\mu^2\varepsilon^2 \quad \text{sau} \quad \mu < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \quad \text{sau încă} \quad \frac{g}{c} < \frac{a}{3l}.$$

Această ultimă condiţie se poate scrie sub forma

$$N > \sqrt{\frac{3}{32}}\,\omega\frac{l}{a} \approx 0{,}31\,\omega\frac{l}{a} \quad \left(\sqrt{\frac{3}{32}} \approx 0{,}31\right),$$

unde $N = 1/2\tau$ este numărul de oscilaţii ale punctului de suspendare în unitatea de timp. De exemplu, dacă lungimea pendulului este $l = 20$ cm şi amplitudinea punctului de suspendare $a = 1$ cm, atunci

$$N > 0{,}31\sqrt{\frac{980}{20}}\,20 \approx 43 \text{ (oscilaţii pe secundă).}$$

Prin urmare, poziţia superioară de echilibru este stabilă dacă, de exemplu, numărul de oscilaţii pe secundă ale punctului de suspendare este mai mare ca 50.

CAPITOLUL 6

SOLIDUL RIGID

În capitolul de față se studiază amănunțit cîteva probleme de mecanică destul de particulare. Acestea sînt incluse în cursurile de mecanică clasică conform unei tradiții bazate pe faptul că au fost rezolvate de Euler și Lagrange cît și pe faptul că trăim în spațiul euclidian tridimensional în care majoritatea sistemelor mecanice pe care le întîlnim sînt alcătuite din corpuri rigide.

§26. MIȘCAREA ÎN RAPORT CU UN SISTEM MOBIL DE COORDONATE

În cele ce urmează se definește noțiunea de viteză unghiulară.

A. Sisteme mobile de coordonate. Să considerăm un sistem lagrangean care este descris în coordonatele $\mathbf{q}$, t de lagrangeanul $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Adesea este util să se treacă la un sistem mobil de coordonate $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$.

Pentru a scrie ecuațiile de mișcare într-un astfel de sistem mobil, este suficient să exprimăm lagrangeanul sistemului în raport cu noile coordonate.

Teoremă. *Dacă traiectoria* $\gamma : \mathbf{q} = \varphi(t)$ *a ecuațiilor Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ *se scrie în coordonatele* $\mathbf{Q}$, t $(\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t))$ *sub forma* $\gamma : \mathbf{Q} = \mathbf{\Phi}(t)$, *atunci funcția* $\mathbf{\Phi}(t)$ *satisface ecuațiile lui Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{Q}}}\right) = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{Q}}$, *unde* $L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

D e m o n s t r a ț i e. Traiectoria γ este o extremală: $\delta \int_\gamma L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, dt = 0$. Prin urmare, $\delta \int_\gamma L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)\, dt = 0$ și $\mathbf{\Phi}(t)$ satisface ecuațiile lui Lagrange, c.c.t.d.

B. Mișcări, rotații, mișcări de translație. Să considerăm, în particular, cazul important în care $\mathbf{q}$ este raza-vectoare a unui punct în raport cu un sistem inerțial de coordonate carteziene k (pe care îl denumim sistemul *fix*) și $\mathbf{Q}$ — raza-vectoare a aceluiași punct în raport cu sistemul mobil de coordonate carteziene K.

D e f i n i ț i e. Fie k și K spații liniare euclidiene orientate. Se numește *mișcare* a lui K în raport cu k o aplicație $D_t : K \to k$ care depinde neted de t și conservă metrica și orientarea (fig. 103).

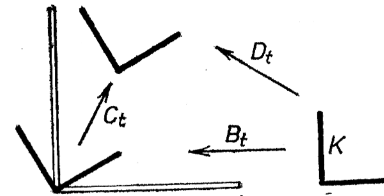


Fig. 103. Mișcarea D_t este produsul unei rotații B_t cu o translație C_t.

D e f i n i ț i e. Mișcarea D_t se numește *rotație* dacă ea transformă originea coordonatelor din K în originea coordonatelor din k, deci dacă D_t este un operator liniar, $\forall t$.

Teoremă. *Fiecare mișcare* D_t *se descompune univoc în produsul unei rotații* $B_t : K \to k$ *cu o translație* $C_t : k \to k$:

$$D_t = C_t B_t,$$

unde $C_t\, \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r}(t)$ $(\mathbf{q}, \mathbf{r} \in k)$.

D e m o n s t r a ț i e. Punem $r(t) = D_t \mathbf{0}$, $B_t = C_t^{-1} D_t$. Atunci $B_t\mathbf{0} = \mathbf{0}$, c.c.t.d.

D e f i n i ț i e. Mișcarea D_t se numește de *translație* dacă aplicația corespunzătoare $B_t : K \to k$ nu depinde de t: $B_t = B_0 = B$, $D_t\, \mathbf{Q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}(t)$ *).

Vom spune că *sistemul de coordonate* k *este fix și că sistemul* K *este mobil*; $\mathbf{q}(t) \in k$ *este raza vectoare a punctului în mișcare în raport cu sistemul fix*; $\mathbf{Q}(t) \in K$ *se numește raza vectoare a punctului în mișcare în raport cu sistemul mobil dacă* (fig. 104)

$$\mathbf{q}(t) = D_t\, \mathbf{Q}((t) = B_t\, \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t). \qquad (1)$$

Atenție! Vectorul $B_t\, \mathbf{Q}(t) \in k$ nu trebuie confundat cu $\mathbf{Q}(t) \in K$ — ei sînt elemente ale unor spații diferite!

*) A nu se confunda cu „translația simplă", de care diferă printr-o rotație constantă B. (*N.T.*).

C. Compunerea vitezelor. Să exprimăm acum „viteza absolută" $\dot{\mathbf{q}}$ prin mişcarea relativă $\mathbf{Q}(t)$ şi mişcarea sistemului de coordonate D_t. Din formula (1) obţinem, derivînd în raport cu t, formula de compunere a vitezelor

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}. \qquad (2)$$

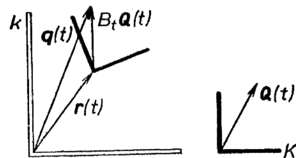


Fig. 104. Raza vectoare a unui punct în raport cu sistemul fix de coordonate ($\mathbf{q}$) şi în raport cu sistemul mobil de coordonate ($\mathbf{Q}$).

Pentru a clarifica sensul celor trei termeni care apar în (2), să considerăm pentru început nişte cazuri particulare.

Cazul mişcării de translaţie ($\dot{B} = 0$). În acest caz ecuaţia (2) se reduce la $\dot{\mathbf{q}} = B\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}$. Cu alte cuvinte, am demonstrat o

Teoremă. *Dacă sistemul mobil K are o mişcare de translaţie în raport cu k, atunci viteza absolută este egală cu suma dintre viteza relativă şi viteza de mişcare a sistemului K:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, \qquad (3)$$

unde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in k$ *este viteza absolută*

$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} \in k$ este viteza relativă (a nu se confunda cu $\dot{\mathbf{Q}} \in K$!)

$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} \in k$ este viteza de mişcare a sistemului mobil.

D. Viteza unghiulară. În cazul unei rotaţii a sistemului K, legătura dintre vitezele relativă şi absolută nu este atît de simplă. Pentru început să considerăm cazul în care punctul nostru este în repaus în raport cu K (deci $\dot{\mathbf{Q}} = 0$) iar sistemul K se roteşte (deci $\mathbf{r} = 0$). În acest caz mişcarea punctului $\mathbf{q}(t)$ se numeşte mişcare de transport.

E x e m p l u. *Rotaţia cu viteză unghiulară constantă* $\omega \in k$. Fie $U(t): k \to k$ rotaţia spaţiului k în jurul axei $\boldsymbol{\omega}$ cu unghiul $|\omega| t$. Atunci $B(t) = U(t)\, B(0)$ se numeşte *rotaţie uniformă a lui K cu viteză unghiulară* $\boldsymbol{\omega}$.

Evident, în acest caz viteza mişcării de transport a punctului $\mathbf{q}$ este dată de formula (fig. 105)

$$\dot{\mathbf{q}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}].$$

Să ne întoarcem la cazul general al rotaţiei lui $K(\mathbf{r} = \dot{\mathbf{Q}} = 0)$.

Teoremă. *În fiecare moment de timp t există un vector $\boldsymbol{\omega}(t) \in k$ în raport cu care viteza de transport se exprimă prin formula*

$$\dot{\mathbf{q}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}], \ \forall \ \mathbf{q} \in k. \qquad (4)$$

Vectorul $\boldsymbol{\omega}$ se numeşte *viteza unghiulară instantanee*; evident, el este definit univoc de egalitatea (4).

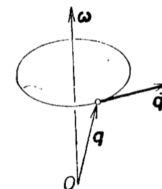


Fig. 105. Viteza unghiulară.

Corolar. *Fie solidul rigid K care se roteşte în jurul punctului fix O al spaţiului k. Atunci în orice moment de timp există o axă instantanee de rotaţie — o dreaptă în solid care trece prin O astfel încît la momentul dat viteza punctelor ei este zero. Vitezele celorlalte puncte sînt perpendiculare pe această dreaptă şi sînt proporţionale cu distanţa pînă la ea.*

Axa instantanee de rotaţie în spaţiul k este definită de vectorul ei $\boldsymbol{\omega}$; în K vectorul corespunzător se notează cu $\boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega} \in K$; $\boldsymbol{\Omega}$ se numeşte *vectorul viteză unghiulară în raport cu corpul.*

E x e m p l u. Viteza unghiulară a Pămîntului este îndreptată dinspre centru spre Polul Nord şi este egală cu $2\pi/3600 \cdot 24 \text{ sec}^{-1} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$.

D e m o n s t r a ţ i a t e o r e m e i. Conform cu (2) avem

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q}.$$

Prin urmare, dacă exprimăm $\mathbf{Q}$ prin $\mathbf{q}$, obţinem $\dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} = A\mathbf{q}$, unde $A = \dot{B}B^{-1}: k \to k$ este un operator liniar în k.

Lema 1. *Operatorul A este antisimetric*: $A' + A = 0$.

D e m o n s t r a ţ i e. Deoarece $B: K \to k$ este un operator izometric dintr-un spaţiu euclidian în altul, operatorul său transpus coincide cu inversul $B' = B^{-1}: k \to K$. Derivînd în raport cu t relaţia $B'B = E$, obţinem

$\dot{B}B' + B\dot{B}' = 0$, $\dot{B}B^{-1} + (\dot{B}B^{-1})' = 0$, c.c.t.d.

Lema 2. *Orice operator antisimetric în spațiul euclidian tridimensional orientat este un operator de înmulțire vectorială cu un vector fixat:*

$$A\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}], \textit{ pentru orice } \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3.$$

D e m o n s t r a ț i e. Mulțimea tuturor operatorilor liniari antisimetrici $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este un spațiu liniar. Dimensiunea acestui spațiu este trei, deoarece orice matrice antisimetrică reală 3×3 este definită de cele trei elemente de deasupra diagonalei.

Operatorul de înmulțire vectorială cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$ este liniar și antisimetric. Mulțimea tuturor operatorilor de acest tip este un subspațiu liniar al spațiului operatorilor antisimetrici.

Dimensiunea acestui subspațiu este egală cu trei și prin urmare el coincide cu întreg spațiul operatorilor antisimetrici, c.c.t.d.

F i n a l u l d e m o n s t r a ț i e i t e o r e m e i. Conform lemelor 1 și 2

$$\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}], \text{ c.c.t.d.}$$

În coordonate carteziene, operatorul A este dat de o matrice antisimetrică; să-i notăm elementele cu $\pm\omega_{1,2,3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cu această notație, vectorul $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ este vector propriu cu valoarea proprie zero. Aplicînd pe A vectorului $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ obținem printr-un calcul direct

$$A\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}].$$

E. Viteza de transport. *Cazul mișcării pure de rotație.* Să presupunem că sistemul K se rotește ($\mathbf{r} = 0$) și că punctul în sistemul K se mișcă ($\dot{\mathbf{Q}} \neq 0$). Din (2) obținem (fig. 106)

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}] + \mathbf{v}'.$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat următoarea

Teoremă. *Dacă sistemul mobil K se rotește în jurul punctului $O \in k$, atunci viteza absolută este suma dintre viteza relativă și viteza de transport (de rotație):*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr},$$

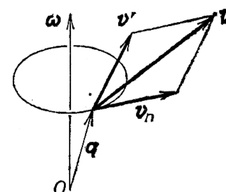


Fig. 106. Compunerea vitezelor.

unde

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in k \text{ — } \textit{viteza absolută}, \\ \mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} \in k \text{ — } \textit{viteza relativă}, \\ \mathbf{v}_{tr} = \dot{B}\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}] \in k \text{ — } \textit{viteza de transport (de rotație)}. \end{cases} \quad (5)$$

În sfîrșit, cazul general se poate reduce la cele două precedente considerînd un sistem mobil ajutător K_1, care are o mișcare de translație în raport cu k și în raport cu care sistemul K se mișcă rotindu-se în jurul punctului $O \in K_1$. Se poate vedea și din formula (2) că

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}_0,$$

unde

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in k$ — *viteza absolută*,

$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$ — viteza relativă,

$\mathbf{v}_{tr} = \dot{B}\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] \in k$ — viteza de transport (de rotație),

$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} \in k$ — viteza mișcării sistemului mobil de coordonate.

P r o b l e m ă. Să se arate că viteza unghiulară a solidului rigid nu depinde de alegerea originei coordonatelor sistemului mobil K legat de solid.

P r o b l e m ă. Să se arate că cea mai generală deplasare a unui solid rigid este deplasarea elicoidală: compunerea rotației de unghi φ în jurul unei axe cu translația h în direcția acestei axe.

P r o b l e m ă. Pe masă este așezat un ceas. Să se determine viteza unghiulară a acului ceasului: a) în raport cu Pămîntul, b) în raport cu un sistem inerțial de coordonate.

I n d i c a ț i e. Dacă se dau trei sisteme de coordonate k, K_1 și K_2, atunci viteza unghiulară a lui K_2 în raport cu k este egală cu suma dintre viteza unghiulară a lui K_1 în raport cu k și cea a lui K_2 în raport cu K_1. Într-adevăr,

$$(E + tA_1 + \ldots)(E + tA_2 + \ldots) = E + t(A_1 + A_2) + \ldots$$

§27. FORȚE DE INERȚIE. FORȚA CORIOLIS

Ecuațiile de mișcare într-un sistem de coordonate care nu este inerțial diferă de ecuațiile într-un sistem inerțial prin termeni suplimentari, numiți forțe de inerție. Aceasta permite să se pună în evidență experimental că un anumit sistem nu este inerțial (de exemplu, rotația Pămîntului în jurul axei sale).

A. Sistemul de coordonate în mișcare de translație.

Teoremă. *Într-un sistem de coordonate K care are o mișcare de translație în raport cu sistemul inerțial k, mișcarea unui sistem mecanic se desfășoară ca și cum sistemul de coordonate ar fi inerțial dar asupra fiecărui punct de masă m ar acționa o «forță de inerție» suplimentară $F = -m\ddot{\mathbf{r}}$, unde $\ddot{\mathbf{r}}$ este accelerația sistemului K.*

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}(t)$, atunci $m\ddot{\mathbf{Q}} = m\ddot{\mathbf{q}} - m\ddot{\mathbf{r}}$. Prin urmare, influența mișcării de translație a sistemului de coordonate se manifestă prin apariția unui cîmp de forțe suplimentar $-m\mathbf{W}$, unde $\mathbf{W}$ este accelerația originei coordonatelor, c.c.t.d.

E x e m p l u l 1. La start, o rachetă are o accelerație $\ddot{\mathbf{r}}$ îndreptată în sus (fig. 107). Prin urmare, sistemul de coordonate K legat de rachetă nu este inerțial și un observator aflat în interiorul rachetei poate descoperi apariția unui cîmp de forțe $-m\mathbf{W}$ și măsura forța de inerție utilizînd, de exemplu, greutăți atîrnate de arcuri. În acest caz, forța de inerție se numește *suprasarcină*.

E x e m p l u l 2. La săritura cu prăjina, săritorul are accelerația $\mathbf{g}$ îndreptată în jos. Prin urmare, suma dintre forța de inerție și greutate este nulă; în sistemul legat de săritor se constată, atîrnînd greutăți de arcuri, că greutatea oricărui obiect este nulă, din care cauză această stare se numește *stare de imponderabilitate*. Analog, la zborul balistic liber al unui satelit se observă starea de imponderabilitate, deoarece forța de inerție este opusă forței de atracție a Pămîntului.

E x e m p l u l 3. Dacă punctul greu al unui pendul se mișcă cu accelerația $\mathbf{W}(t)$, atunci pendulul se mișcă ca și cum accelerația forței gravitaționale g ar fi fost variabilă și egală cu $\mathbf{g} - \mathbf{W}\gamma(t)$.

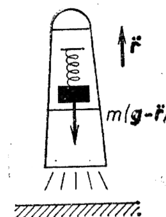


Fig. 107. Suprasarcină.

B. Sistemul de coordonate în rotație.

Fie $B_t: K \to k$ o mișcare de rotație a sistemului de coordonate K în raport cu sistemul fix de coordonate k. Vom nota cu $\mathbf{Q}(t) \in K$ raza vectoare a unui punct care se mișcă în sistemul mobil și cu $\mathbf{q}(t) = B_t\,\mathbf{Q}(t) \in k$ raza vectoare a acestui punct în sistemul fix k. La fel ca în §26, notăm cu $\mathbf{\Omega}$ vectorul vitezei unghiulare de rotație în sistemul mobil de coordonate.

Presupunem că în sistemul de coordonate k mișcarea punctului $\mathbf{q}$ este descrisă de ecuația lui Newton $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Teoremă. *În sistemul de coordonate în rotație mișcarea se desfășoară ca și cum asupra fiecărui punct în mișcare $\mathbf{Q}$ de masă m ar acționa trei forțe «de inerție suplimentare»:*

forța inerțială de rotație $-m\,[\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{Q}]$,

forța Coriolis $-2m\,[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$,

forța centrifugă $-m\,[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$.

Prin urmare,

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - m\,[\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{Q}] - 2m\,[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] - m[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]],$$

unde

$$B\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \mathbf{f}(B\mathbf{Q}, B\dot{\mathbf{Q}}).$$

Prima dintre aceste trei forțe de inerție se observă numai în cazul unei rotații neuniforme; a doua și a treia apar și în cazul rotației uniforme.

Forța centrifugă (fig. 108) este îndreptată totdeauna dinspre axa instantanee de rotație $\mathbf{\Omega}$ și este egală ca mărime cu $|\mathbf{\Omega}|^2 r$, unde r este distanța la această axă. Această forță nu depinde de viteza mișcării relative și acționează chiar și asupra unui corp aflat în repaus în sistemul K.

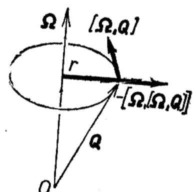


Fig. 108. Forța centrifugă de inerție.

Forța Coriolis depinde de viteza $\dot{\mathbf{Q}}$. În emisfera nordică a Pămîntului ea produce o abatere spre dreapta a oricărui corp în mișcare pe Pămînt și o abatere spre răsărit a oricărui corp în cădere.

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i. Să observăm că pentru orice vector $\mathbf{X} \in K$ avem $\dot{B}\mathbf{X} = B\ [\mathbf{\Omega}, \mathbf{X}]$. Într-adevăr, conform cu §26, $\dot{B}\mathbf{X} = [\omega, \mathbf{x}] = [B\mathbf{\Omega}, B\mathbf{X}]$ și acest ultim termen este egal cu $B[\mathbf{\Omega}, \mathbf{X}]$ deoarece operatorul B conservă metrica și orientarea, deci și produsul vectorial.

Din $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$, obținem $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} = B\ ([\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}] + \dot{\mathbf{Q}})$ și derivînd încă o dată: $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{B}([\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] + \dot{\mathbf{Q}}) + B([\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{Q}] + [\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] + \ddot{\mathbf{Q}}) = B([\mathbf{\Omega}, ([\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}] + \dot{\mathbf{Q}}) + [\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{Q}] + [\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] + \ddot{\mathbf{Q}}) = B(\ddot{\mathbf{Q}} + 2\ [\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] + [\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{Q}] + [\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$, c.c.t.d.

(Am utilizat încă o dată relația $\dot{B}\mathbf{X} = B\ [\mathbf{\Omega}, \mathbf{X}]$, luînd $\mathbf{X} = \dot{\mathbf{Q}} + [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]$).

Să analizăm mai amănunțit influența rotației Pămîntului asupra experiențelor de laborator. Deoarece Pămîntul se rotește practic uniform, putem considera $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$. Forța centrifugă are valoarea maximă la ecuator, unde ea atinge $\frac{\Omega^2 \rho}{g} \approx \approx \frac{(7{,}3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{9{,}8} \approx \frac{3}{1\,000}$ din greutate. În limitele laboratorului această forță variază însă puțin și de aceea, pentru a o observa, trebuie să călătorim.

Prin urmare, în limitele laboratorului rotația Pămîntului se manifestă numai sub forma forței Coriolis : în sistemul de coordonate Q legat de Pămînt, ecuația

$$\frac{d}{dt} m\dot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{g} + 2\,m\ [\dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{\Omega}]$$

este valabilă cu mare precizie (forța centrifugă este inclusă în $\mathbf{g}$).

E x e m p l u l 1. O piatră este lăsată să cadă liber (fără viteză inițială) într-un puț de adîncime egală cu 250 m, la latitudinea Leningradului ($\lambda = 60°$). Care este abaterea de la verticală ?

Rezolvăm ecuația

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{g} + 2\ [\dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{\Omega}]$$

prin aproximații succesive, considerînd că $\mathbf{\Omega} \ll 1$. Punem (fig. 109)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2,$$

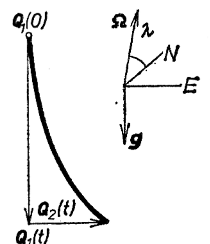


Fig. 109. Abaterea unei pietre în cădere datorate forței Coriolis.

unde $\dot{\mathbf{Q}}_2(0) = \mathbf{Q}_2(0) = 0$ și $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1(0) + \frac{t^2\mathbf{g}}{2}$.

Obținem pentru $\mathbf{Q}_2$ ecuația

$$\ddot{\mathbf{Q}}_2 = 2\ [t\mathbf{g}, \mathbf{\Omega}] + 0\ (\mathbf{\Omega})^2,$$

$$\mathbf{Q}_2 \approx \frac{t^3}{3}\ [\mathbf{g}, \mathbf{\Omega}] \approx \frac{2t}{3}\ [\mathbf{h}, \mathbf{\Omega}],\ \mathbf{h} = \frac{t^2\mathbf{g}}{2}.$$

De aici rezultă că piatra deviază către răsărit cu aproximativ

$$\frac{2t}{3}\ |\mathbf{h}|\ |\mathbf{\Omega}| \cos\lambda \approx \frac{2 \cdot 7}{3}\ 250 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}\ \text{m} \approx 4\ \text{cm}.$$

P r o b l e m ă. Un proiectil tras în direcție verticală, la Leningrad, se ridică la înălțimea de 1 km. Care este abaterea produsă de forța Coriolis față de țeava tunului?

E x e m p l u l 2. *Pendulul lui Foucault.*

Să considerăm oscilațiile mici ale unui pendul matematic ținînd seama de forța Coriolis. Fie $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ versorii axelor unui sistem de coordonate legat de Pămînt : $\mathbf{e}_z$ — vertical, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — în planul orizontal (fig. 110). În aproximația oscilațiilor mici $\dot{z} = 0$ (comparativ cu $\dot{x}$, $\dot{y}$) și deci componenta orizontală a forței Coriolis este $2m\ (\dot{y}\,\Omega_z\,\mathbf{e}_x - \dot{x}\,\Omega_z\,\mathbf{e}_y)$. Obținem deci ecuațiile de mișcare

$$\ddot{x} = -\,\omega^2 x + 2\dot{y}\,\Omega_z, \qquad (\Omega_z = |\mathbf{\Omega}| \sin\lambda_0,\ \text{unde } \lambda_0 \text{ este latitudinea}).$$
$$\ddot{y} = -\,\omega y - 2\dot{x}\,\Omega_z,$$

Dacă punem $x + iy = w$, atunci $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\ddot{w} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ și cele două ecuații se reduc la o singură ecuație complexă

$$\ddot{w} + 2i\,\Omega_z\,\dot{w} + \omega^2 w = 0.$$

Rezolvăm această ecuație: $w = e^{\nu t}$, $\nu^2 + 2i\,\Omega_z\,\nu + \omega^2 = 0$,

$\nu = -i\,\Omega_z \pm i\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2}$. Dar $\Omega_z^2 \ll \omega^2$. Prin urmare,

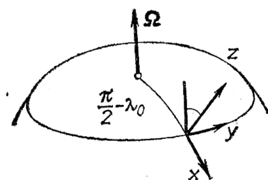


Fig. 110. Sistem de coordonate pentru studierea mișcării pendulului lui Foucault.

$\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2} = \omega + O(\Omega_z^2)$ și deci, neglijînd pe Ω_z^2,

$$\nu \approx -i\Omega_z \pm i\omega$$

sau, cu aceeași aproximație,

$$w = e^{-i\Omega_z t}\,(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{i\omega t}).$$

Cînd $\Omega_z = 0$, se obțin oscilațiile armonice obișnuite. Observăm că influența forței Coriolis se manifestă într-o rotație a întregului tablou cu viteza unghiulară $-\Omega_z$, unde $|\Omega_z| = |\mathbf{\Omega}|\,\sin\,\lambda_0$.

În particular, dacă condițiile inițiale corespund unei mișcări plane ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$), atunci planul oscilației se rotește cu viteza unghiulară $-\Omega_z$ în raport cu sistemul terestru de coordonate (fig. 111).

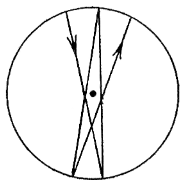


Fig. 111. Traiectoria pendulului lui Foucault.

La pol, planul oscilației efectuează o rotație completă în cursul unei zile (și este fix în raport cu un sistem de coordonate care nu se rotește împreună cu Pămîntul). La latitudinea Moscovei (56°), planul oscilației se rotește cu 0,83 dintr-o rotație completă într-o zi, deci cu 12,5° pe oră.

P r o b l e m ă. Un rîu curge cu viteza de 3 km/oră. Pentru ce rază de curbură a unui cot forța Coriolis produsă de rotația Pămîntului este mai mare decît forța centrifugă datorată rotației rîului?

Răspuns. Raza de curbură nu trebuie să fie mai mică decît o mărime de ordinul a 10 km pentru rîurile de latitudine medie.

Rezolvarea acestei probleme explică de ce rîurile mari din emisfera nordică (de exemplu, Volga în cursul mijlociu) spală în principal malul drept, în timp ce rîurile de tipul Moscovei cu meandrele lor bruște cu raze de curbură mici spală alternativ cînd malul drept, cînd malul stîng (exterior meandrei).

§28. SOLIDUL RIGID

Vom defini aici noțiunile de solid rigid, tensor de inerție, elipsoid de inerție, momente și axe de inerție.

A. Varietatea configurațiilor unui solid rigid.

D e f i n i ț i e. Se numește *solid* rigid un sistem de puncte materiale supuse la legăturile olonome care se exprimă prin faptul că distanțele dintre puncte sînt constante:

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \mathbf{r}_{ij} = \text{const.} \tag{1}$$

Teoremă. *Varietatea configurațiilor unui solid rigid este de dimensiune șase, și anume* $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ (*produsul cartezian al spațiului tridimensional* $\mathbf{R}^3$ *cu grupul rotațiilor sale* $SO(3)$), *exceptînd cazul în care în corp nu există cel puțin trei puncte nesituate pe o aceeași dreaptă.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ și $\mathbf{x}_3$ trei puncte ale corpului care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă. Să considerăm reperul ortonormat drept (ca orientare!) pentru care primul versor este îndreptat în direcția $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, iar al doilea — în direcția lui $\mathbf{x}_3$ în planul generat de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ (fig. 112). Din condițiile $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \mathbf{r}_{ij} = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) rezultă că pozițiile tuturor punctelor corpului sînt univoc definite de pozițiile lui $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ și $\mathbf{x}_3$, ultimele fiind determinate de poziția reperului. În sfîrșit, mulțimea reperelor din $\mathbf{R}^3$ este $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, deoarece fiecare reper se obține dintr-un reper fixat printr-o rotație și o translație*).

P r o b l e m ă. Să se determine spațiul configurațiilor unui solid rigid ale cărui puncte sînt toate coliniare.

Răspuns. $\mathbf{R}^3 \times S^2$.

*) Riguros vorbind, spațiul configurațiilor unui solid rigid este $\mathbf{R}^3 \times O(3)$, $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ fiind numai una din cele două componente conexe ale acestei varietăți, corespunzătoare unei alegeri a orientării solidului.

Definiție. Se numește *solid rigid cu punct fix* un sistem de puncte materiale, care în plus față de legăturile (1), este supus la legătura $\mathbf{x}_1 = 0$.

Evident, varietatea configurațiilor unui astfel de sistem este grupul tridimensional al rotațiilor SO(3).

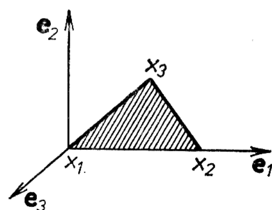


Fig. 112. Varietatea configurațiilor unui solid rigid.

B. Legile de conservare. Să considerăm problema mișcării inerțiale a unui solid rigid (în absența unor forțe exterioare). Un exemplu (cu aproximație) îl constituie evoluția unui aparat cosmic.

Sistemul este invariant la toate deplasările prin translație: acestea nu modifică lagrangeanul. Conform teoremei lui E. Noether, există trei integrale prime: cele trei componente ale vectorului impuls. Am demonstrat deci o

Teoremă. *La mișcarea liberă a unui solid rigid, centrul său de inerție se mișcă rectiliniu și uniform.*

Putem deci considera un sistem inerțial de coordonate în care centrul de inerție este fix. Obținem un

Corolar. *Un solid rigid liber se rotește în jurul centrului său de inerție, ca și cum acest centru de inerție ar fi un punct fixat O.*

În acest mod, problema s-a redus la una cu trei grade de libertate — problema mișcării unui solid rigid în jurul unui punct fix O. Vom studia mai amănunțit această problemă (fără să presupunem neapărat că O este centrul de inerție al solidului).

Lagrangeanul este invariant la rotațiile în jurul punctului O. Conform teoremei lui Noether, există trei integrale prime corespunzătoare: cele trei componente ale vectorului moment cinetic. Se conservă evident și energia totală $E = T$ a sistemului (care se reduce aici la energia cinetică).

Teoremă. *În problema mișcării unui solid rigid în jurul unui punct fix O în absența forțelor exterioare, există patru integrale prime:* M_x, M_y, M_z *și* E.

Din această teoremă se pot obține (fără nici un fel de calcule) informații calitative cu privire la caracterul mișcării.

Poziția și viteza solidului sînt definite de un punct al varietății de dimensiune șase TSO(3) — fibrarea tangentă a varietății configurațiilor SO(3). Integralele prime M_x, M_y, M_z și E sînt patru funcții diferențiabile pe varietatea de dimensiune șase TSO(3) și se poate verifica în cazul general (dacă solidul nu are o simetrie specială) că aceste patru funcții sînt independente*). Prin urmare, cele patru ecuații

$$M_x = C_1, \quad M_y = C_2, \quad M_z = C_3, \quad E = C_4 > 0$$

definesc o subvarietate bidimensională V_c a varietății de dimensiune șase TSO(3).

Această subvarietate este invariantă: dacă condițiile inițiale ale mișcării definesc un punct al varietății V_c, atunci în tot timpul mișcării, punctul din TSO(3) corespunzător poziției și vitezei solidului se va afla în V_c.

Prin urmare, varietatea V_c are un cîmp de vectori tangenți (și anume cîmpul vitezelor mișcărilor din TSO(3)); pentru $C_4 > 0$, acest cîmp nu poate avea puncte singulare. De asemenea, se verifică ușor că V_c este compactă (utilizați funcția E) și orientabilă (TSO(3) este orientabilă)**).

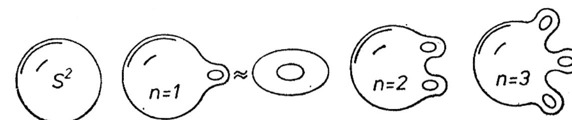


Fig. 113. Varietăți compacte, conexe și orientabile bidimensionale.

În topologie se demonstrează că oricare varietate bidimensională compactă și orientabilă este o sferă cu n mînere, $n \geqslant 0$ (fig.113).

---

*) În majoritatea punctelor lui TSO(3). (*N.T.*)

**) Se demonstrează ușor următoarele afirmații:

1. Fie $f_1, \ldots, f_k : M \to \mathbf{R}$ funcții netede definite pe varietatea orientată M. Să considerăm mulțimea V_c definită de ecuațiile $f_1 = c_1, \ldots, f_k = c_k$ și să presupunem că în fiecare punct al lui V_c diferențialele lui $f_1, \ldots, f_k$ sînt liniar independente. Atunci V_c este orientabilă.

2. Un produs cartezian de varietăți orientabile este o varietate orientabilă.

3. Fibrarea tangentă TSO(3) este produsul cartezian $\mathbf{R}^3 \times$ SO(3).

4. O varietate a cărei fibrare tangentă este un produs cartezian (al varietății cu un spațiu liniar) se numește *paralelizabilă*. Grupul SO(3) (și orice grup Lie) este paralelizabil.

5. O varietate paralelizabilă este orientabilă.

Din 1 și 5 rezultă orientabilitatea lui SO(3), TSO(3) și V_c.

Dintre aceste varietăţi, numai torul ($n = 1$) admite un cîmp de vectori tangenţi fără singularităţi.

Prin urmare, subvarietatea invariantă V_c este un tor bidimensional (sau o reuniune disjunctă a unui număr finit de tori).

Vom vedea mai tîrziu că pe acest tor se pot alege coordonatele unghiulare φ_1 şi φ_2 (mod 2π) astfel încît mişcarea punctului pe V_c să fie descrisă de ecuaţiile

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(c).$$

Cu alte cuvinte, rotaţia unui solid rigid reprezintă o suprapunere a două mişcări periodice care au, în general, perioade diferite : dacă frecvenţele ω_1 şi ω_2 sînt incomensurabile, atunci solidul nu se mai întoarce niciodată într-o stare prin care a mai trecut. Valorile frecvenţelor ω_1 şi ω_2 depind de condiţiile iniţiale.

C. Operatorul de inerţie. Să trecem acum la o teorie cantitativă şi să introducem următoarele notaţii. Fie k un sistem fix de coordonate şi K un sistem mobil de coordonate care se roteşte împreună cu solidul în jurul punctului O : în raport cu el, solidul este în repaus. Fiecare vector din spaţiul K este transformat într-un vector din spaţiul k de operatorul B. Vectorii din spaţiile K şi k care se corespund prin B vor fi notaţi cu aceeaşi literă, dar majusculă pentru K şi minusculă pentru k. De exemplu, (fig. 114) :

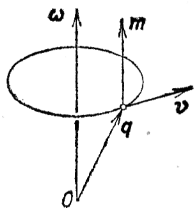


Fig. 114. Raza vectoare, vectorul viteză, vectorul viteză unghiulară şi vectorul moment cinetic ai unui punct al corpului în raport cu spaţiul.

$\mathbf{q} \in k$ — raza vectoare a unui punct în spaţiu ;
$\mathbf{Q} \in K$ — aceeaşi rază vectoare în solid, $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$;
$\mathbf{v} \in k$ — vectorul viteză al punctului în spaţiu ;
$\mathbf{V} \in K$ — acelaşi vector în solid, $\mathbf{v} = B\mathbf{V}$;

$\boldsymbol{\omega} \in k$ — viteza unghiulară în spaţiu ;

$\boldsymbol{\Omega} \in K$ — viteza unghiulară în solid, $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$;

$\mathbf{m} \in k$ — momentul cinetic în spaţiu ;

$\mathbf{M} \in K$ — momentul cinetic în solid, $\mathbf{m} = B\mathbf{M}$.

Cum operatorul $B : K \to k$ conservă metrica şi orientarea, el păstrează şi produsele scalare şi vectoriale.

Conform definiţiei vitezei unghiulare (§26)

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}].$$

Conform definiţiei momentului cinetic al unui punct de masă μ relativ la punctul O

$$\mathbf{m} = [\mathbf{q}, \mu\mathbf{v}] = \mu\,[\mathbf{q}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]].$$

Prin urmare

$$\mathbf{M} = \mu\,[\mathbf{Q}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]].$$

În acest fel apare un operator liniar, care transformă pe $\boldsymbol{\Omega}$ în $\mathbf{M}$:

$$A : K \to K, A\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}.$$

Acest operator depinde şi de punctul solidului ($\mathbf{Q}$) şi de masa acestui punct (μ).

Lemă. *Operatorul A este simetric.*

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru orice $\mathbf{X} \in K$, $\mathbf{Y} \in K$ avem (utilizînd relaţia $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = ([\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b})$)

$$(A\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mu\,([\mathbf{Q}, [\mathbf{X}, \mathbf{Q}]], \mathbf{Y}) = \mu\,([\mathbf{Y}, \mathbf{Q}], [\mathbf{X}, \mathbf{Q}])$$

şi această ultimă expresie este simetrică în $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{Y}$, c.c.t.d.

Punînd în locul lui $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{Y}$ vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\Omega}$ şi remarcînd că $([\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}], [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^2$, obţinem următorul

Corolar. *Energia cinetică a unui punct al solidului este o formă pătratică în raport cu vectorul viteză unghiulară* $\mathbf{\Omega}$, *și anume*

$$T = \frac{1}{2}(A\,\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}).$$

Operatorul simetric A se numește *operatorul* (sau *tensorul*) *de inerție* al punctului $\mathbf{Q}$.

Dacă solidul rigid este format din mai multe puncte $\mathbf{Q}_i$ cu masele μ_i, obținem prin sumare:

Teoremă. *Momentul cinetic* $\mathbf{M}$ *al solidului rigid în raport cu punctul fix* O *depinde liniar de viteza unghiulară* $\mathbf{\Omega}$: *există un operator* $A : K \to K$, $A\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}$. *Operatorul* A *este simetric.*

Energia cinetică a corpului este o formă pătratică în raport cu viteza unghiulară $\mathbf{\Omega}$:

$$T = \frac{1}{2}(A\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}).$$

D e m o n s t r a ț i e. Conform definiției, momentul cinetic al corpului este suma momentelor cinetice ale punctelor sale:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i A_i\,\mathbf{\Omega} = A\mathbf{\Omega}, \text{ unde}$$

$$A = \sum_i A_i.$$

Conform lemei de mai sus, operatorul de inerție al fiecărui punct A_i este liniar și simetric. Rezultă că și A este liniar și simetric. Pentru energia cinetică obținem, prin definiție, expresia

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}(\mathbf{M}_i, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}), \text{ c.c.t.d.}$$

D. Axele de inerție. La fel ca orice alt operator simetric, A are trei direcții proprii reciproc ortogonale. Fie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in K$ versorii acestor direcții și I_1, I_2, I_3 valorile proprii corespunzătoare.

În baza $\mathbf{e}_i$, operatorul de inerție și energia cinetică au expresiile deosebit de simple:

$$M_i = I_i\,\Omega_i,$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).$$

Axele $\mathbf{e}_i$ se numesc *axele principale de inerție* prin punctul O ale solidului.

Evident, dacă nu toate numerele I_1, I_2, I_3 sînt diferite, axele de inerție $\mathbf{e}_i$ nu sînt univoc definite. Să clarificăm semnificația valorilor proprii I_1, I_2, I_3.

Teoremă. *Atunci cînd un solid rigid cu punctul fix* O *se rotește în jurul unei axe* $\mathbf{e}$ *cu viteza unghiulară* $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}$ ($\Omega = |\mathbf{\Omega}|$), *energia sa cinetică are expresia*

$$T = \frac{1}{2}I_{\mathbf{e}}\,\Omega^2, \text{ unde } I_{\mathbf{e}} = \sum_i \mu_i r_i^2,$$

r_i *fiind distanța de la punctul* i *la axa* $\mathbf{e}$ (fig. 115).

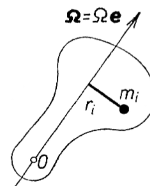


Fig. 115. Energia cinetică a unui corp care se rotește în jurul unei axe.

D e m o n s t r a ț i e. Prin definiție, $T = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i \mathbf{v}_i^2$ dar $|\mathbf{v}_i| = \Omega r_i$ și deci $T = \frac{1}{2}(\sum_i \mu_i r_i^2)\Omega^2$, c.c.t.d.

Numărul $I_{\mathbf{e}}$ depinde de direcția $\mathbf{e}$ a axei de rotație $\mathbf{\Omega}$ în raport cu sistemul K.

D e f i n i ț i e. $I_{\mathbf{e}}$ se numește *momentul de inerție al solidului relativ la axa* $\mathbf{e}$:

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_i \mu_i r_i^2.$$

Comparînd cele două expresii obținute pentru T, obținem un

Corolar. *Valorile proprii I_i ale operatorului de inerție A sînt momentele de inerție ale solidului în raport cu axele principale de inerție $\mathbf{e}_i$.*

E. Elipsoidul de inerție. Pentru a studia dependența momentului de inerție $I_\mathbf{e}$ de direcția axei $\mathbf{e}$ în solid, să considerăm vectorii $\mathbf{e}/\sqrt{I_\mathbf{e}}$, unde versorul $\mathbf{e}(|\mathbf{e}| = 1)$ parcurge sfera unitate.

Teoremă. *Vectorii $\mathbf{e}/\sqrt{I_\mathbf{e}}$ formează un elipsoid în K.*

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{e}/\sqrt{I_\mathbf{e}}$, atunci forma pătratică $T = \frac{1}{2}(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})$ ia valoarea 1/2. Prin urmare, $\{\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{e}/\sqrt{I_\mathbf{e}}\}$ este mulțimea de nivel constant 1/2 a unei forme pătratice, deci un elipsoid, c.c.t.d. Putem spune că acest elipsoid este format din vectorii viteză unghiulară pentru care energia cinetică este egală cu 1/2.

D e f i n i ț i e. Elipsoidul $\{\boldsymbol{\Omega} : A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = 1\}$ se numește *elipsoidul de inerție al solidului rigid în punctul O* (fig. 116).

În raport cu axele principale de inerție $\mathbf{e}_i$, ecuația acestui elipsoid este

$$I_1\,\Omega_1^2 + I_2\,\Omega_2^2 + I_3\,\Omega_3^2 = 1.$$

Prin urmare, *axele principale ale elipsoidului sînt îndreptate după axele principale de inerție, lungimile lor fiind invers proporționale cu $\sqrt{I_i}$.*

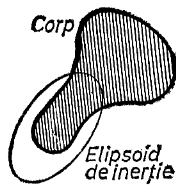


Fig. 116. Elipsoid de inerție.

O b s e r v a ț i e. Dacă solidul este alungit de-a lungul unei anumite axe, atunci momentul de inerție relativ la această axă este mic și prin urmare, elipsoidul de inerție al solidului este și el alungit de-a lungul acestei axe; prin urmare, elipsoidul de inerție copiază anumite caracteristici ale solidului.

Dacă solidul are o axă de simetrie de ordin k care trece prin punctul O (astfel încît solidul se suprapune peste el însuși după o rotație cu $2\pi/k$ în jurul axei), atunci și elipsoidul de inerție are aceeași axă de simetrie de același ordin. Dar elipsoizii cu trei axe nu pot avea axe de simetrie de ordin $k > 2$. Prin urmare, fiecare axă de simetrie a solidului de ordin $k > 2$ este o axă de rotație a elipsoidului de inerție și prin urmare, o axă principală a acestuia.

E x e m p l u. Elipsoidul de inerție a trei puncte de masă m situate în vîrfurile unui triunghi echilateral, în centrul O al triunghiului, este un elipsoid de rotație în jurul normalei la planul triunghiului (fig. 117).

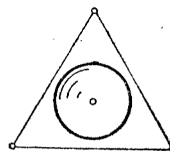


Fig. 117. Elipsoidul de inerție al unui triunghi echilateral.

Dacă există mai multe asemenea axe de simetrie, atunci elipsoidul de inerție este o sferă și orice axă este principală.

P r o b l e m ă. Să se determine o dreaptă care trece prin centrul unui cub astfel încît suma pătratelor distanțelor vîrfurilor cubului la dreaptă să fie: a) maximă, b) minimă.

Să observăm acum că elipsoidul de inerție (sau operatorul de inerție sau momentele principale de inerție I_1, I_2, I_3) definesc complet proprietățile de rotație ale solidului rigid: dacă se consideră două solide rigide cu aceiași elipsoizi de inerție, atunci, pentru condiții inițiale egale, ele se vor mișca la fel (deoarece lagrangeenii lor $L_1 = T_1$ și $L_2 = T_2$ coincid).

Prin urmare, *spațiul tuturor solidelor rigide cu punct fix O este*, din punctul de vedere al dinamicii, *tridimensional*, indiferent de numărul de puncte din care este format fiecare solid.

Putem chiar să considerăm un „solid rigid continuu de densitate $\rho(\mathbf{Q})$", înțelegînd prin aceasta un proces de trecere la limită, cînd $\Delta\mathbf{Q} \to 0$, a unui șir de solide formate dintr-un număr finit de puncte $\mathbf{Q}_i$ cu masele $\rho(\mathbf{Q}_i)\,\Delta\mathbf{Q}_i$ (fig. 118), sau, echivalent, orice corp cu momentele de inerție

$$I_\mathbf{e} = \iiint \rho\,(\mathbf{Q})\;r^2(\mathbf{Q})\,\mathrm{d}\mathbf{Q},$$

unde $r(\mathbf{Q})$ este distanța de la $\mathbf{Q}$ la axa $\mathbf{e}$.

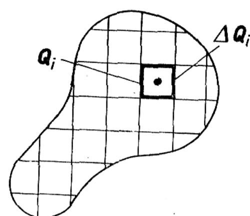


Fig. 118. Solid rigid continuu.

E x e m p l u. Să se găsească axele și momentele principale de inerție ale plăcii omogene plane $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $z = 0$, relativ la punctul $O = (0, 0, 0)$.

R e z o l v a r e. Datorită faptului că placa are trei plane de simetrie, elipsoidul de inerție are și el aceleași plane de simetrie și deci axele de inerție sînt x, y, z. Continuînd

$$I_x = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} x^2 \rho \, dx \, dy = \frac{ma^2}{3}$$

și, analog,

$$I_y = \frac{mb^2}{3};$$

evident, $I_z = I_x + I_y$.

P r o b l e m ă. Să se arate că momentele principale de inerție ale unui solid rigid arbitrar satisfac inegalitățile triunghiului :

$$I_3 \leqslant I_1 + I_2, \; I_2 \leqslant I_1 + I_3, \; I_1 \leqslant I_2 + I_3,$$

o egalitate putînd avea loc numai pentru un corp plan.

P r o b l e m ă. Să se determine axele și momentele principale de inerție ale unui elipsoid omogen de masă m cu semiaxele a, b, c, relativ la centrul O.

I n d i c a ț i e. Considerați pentru început o bilă.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze teorema lui Steiner : *Momentele de inerție ale oricărui solid rigid relativ la două axe paralele, dintre care una trece prin centrul de inerție, sînt legate prin relația*

$$I = I_0 + mr^2,$$

unde m este masa solidului, r — distanța dintre axe și I_0— momentul de inerție relativ la axa care trece prin centrul de inerție.

Prin urmare, momentul de inerție relativ la o axă care trece prin centrul de inerție este mai mic ca momentul de inerție relativ la orice altă axă paralelă cu aceasta.

P r o b l e m ă. Să se determine axele și momentele de inerție ale unui tetraedru omogen relativ la un vîrf al său.

P r o b l e m ă. Să se deseneze vectorul moment cinetic **M** pentru un corp cu elipsoid de inerție dat care se rotește cu viteza unghiulară dată $\mathbf{\Omega}$.

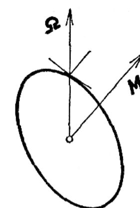


Fig. 119. Viteza unghiulară, elipsoidul de inerție și momentul cinetic.

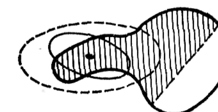


Fig. 120. Comportarea momentelor de inerție la micșorarea corpului.

Răspuns. **M** are direcția normalei la elipsoidul de inerție în punctul în care acesta intersectează axa Ω (fig. 119).

P r o b l e m ă. Dintr-un solid rigid fixat în punctul O, s-a tăiat o bucată (fig. 120). Cum se schimbă momentele principale de inerție ?

Răspuns. Toate cele trei momente principale de inerție se micșorează.

I n d i c a ț i e. Vezi §24.

P r o b l e m ă. Unui solid rigid cu momentele de inerție $I_1 > I_2 > I_3$ i s-a adăugat o masă mică ε în punctul $\mathbf{Q} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Să se determine variația lui I_1 și $\mathbf{e}_1$ cu aproximația $O(\varepsilon^2)$.

R e z o l v a r e. Centrul de inerție se deplasează cu o distanță de ordinul ε. Prin urmare, momentele de inerție ale solidului inițial relative la axe paralele care trec prin centrele de inerție inițial și nou diferă printr-o mărime de ordinul ε^2. În același timp, adăugarea masei ε modifică momentul de inerție relativ la o axă dată cu o mărime de ordinul ε. Prin urmare, pentru un calcul cu aproximația $O(\varepsilon^2)$ putem neglija deplasarea centrului de inerție.

Prin urmare, energia cinetică capătă, după adăugarea masei ε mici, forma

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \varepsilon [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]^2 + O(\varepsilon^2),$$

unde $T_0 = \frac{1}{2}(I_1 \Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$ este energia cinetică a solidului inițial. Căutăm valoarea proprie $I_1(\varepsilon)$ și vectorul propriu $\mathbf{e}_1(\varepsilon)$ al noului operator de inerție sub forma

unor serii Taylor în ε. Egalînd coeficienţii lui ε în egalitatea $A(\varepsilon)\mathbf{e}_1(\varepsilon) = I_1(\varepsilon)\,\mathbf{e}_1(\varepsilon)$ obţinem, cu aproximaţia $O(\varepsilon^2)$:

$$I_1(\varepsilon) \approx I_1 + \varepsilon(x_2^2 + x_3^2);$$

$$\mathbf{e}_1(\varepsilon) \approx \mathbf{e}_1 + \varepsilon\left(\frac{x_1 x_2}{I_2 - I_1}\,\mathbf{e}_2 + \frac{x_1 x_3}{I_3 - I_1}\,\mathbf{e}_3\right).$$

Din formula pentru $I_1(\varepsilon)$ se vede că variaţia momentelor principale de inerţie (în prima aproximaţie în raport cu ε) este astfel încît centrul de inerţie şi axele de inerţie nu suferă nici o modificare. Formula pentru $\mathbf{e}_1(\varepsilon)$ arată cum se modifică direcţia axelor principale: semiaxa mare a elipsoidului de inerţie cea mai apropiată se apropie de punctul adăugat, în timp ce semiaxa mică se îndepărtează de acesta. De asemenea, adăugarea unei mase mici în unul din planele principale ale elipsoidului de inerţie roteşte cele două axe conţinute în acest plan, dar nu modifică direcţia celei de-a treia axe. Apariţia la numitor a diferenţelor dintre momentele de inerţie este legată de faptul că la un elipsoid de rotaţie axele principale nu sînt univoc definite. Dacă elipsoidul de inerţie este apropiat de un elipsoid de rotaţie (să presupunem, de exemplu, că $I_1 \approx I_2$), atunci adăugarea unei mase mici poate roti puternic axele principale $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ în planul generat de acestea.

§29. ECUAŢIILE LUI EULER. DESCRIEREA MIŞCĂRII DATĂ DE POINSOT

În acest paragraf se studiază mişcarea unui solid rigid în jurul unui punct fix *în absenţa forţelor exterioare şi deci şi mişcarea unui solid rigid liber*. Se dovedeşte că mişcarea este caracterizată de două frecvenţe.

A. Ecuaţiile lui Euler. Să considerăm mişcarea unui solid rigid în jurul unui punct fix O. Fie $\mathbf{M}$ vectorul moment cinetic al solidului, relativ la O, în solid, $\mathbf{\Omega}$ — vectorul vitezei unghiulare în solid şi A — operatorul de inerţie ($A\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}$); vectorii $\mathbf{\Omega}$ şi $\mathbf{M}$ aparţin sistemului mobil de coordonate K (§26). Vectorul moment cinetic al solidului relativ la O în spaţiu, $\mathbf{m} = B\mathbf{M}$, se conservă în timpul mişcării (§28, B).

Prin urmare, vectorul $\mathbf{M}(t)$ în solid ($\mathbf{M}(t) \in K$) trebuie să se mişte în aşa fel încît vectorul $\mathbf{m} = B_t\mathbf{M}(t)$ să nu varieze cu t.

Teoremă. *Are loc relaţia*

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]. \tag{1}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să aplicăm formula (5) §26 pentru viteza mişcării relative la sistemul fix k a „punctului" $\mathbf{M}(t) \in K$. Obţinem

$$\dot{\mathbf{m}} = B\dot{\mathbf{M}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}] = B(\dot{\mathbf{M}} + [\mathbf{\Omega}, \mathbf{M}]).$$

Cum însă momentul cinetic în spaţiu, $\mathbf{m}$, se conservă ($\dot{\mathbf{m}} = 0$), rezultă $\dot{\mathbf{M}} + [\mathbf{\Omega}, \mathbf{M}] = 0$, c.c.t.d.

Relaţia (1) se numeşte *ecuaţia lui Euler*. Cum însă $\mathbf{M} = A\mathbf{\Omega}$, (1) poate fi considerată o ecuaţie diferenţială în raport cu $\mathbf{M}$ (sau în raport cu $\mathbf{\Omega}$). Dacă

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3,\ \mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$$

sînt expresiile lui $\mathbf{\Omega}$ şi $\mathbf{M}$ în raport cu axele de inerţie prin O, atunci $M_i = I_i\,\Omega_i$ şi (1) se scrie ca un sistem de trei ecuaţii

$$\frac{dM_1}{dt} = a_1 M_2 M_3,\ \frac{dM_2}{dt} = a_2 M_3 M_1,\ \frac{dM_3}{dt} = a_3 M_1 M_2, \tag{2}$$

unde $a_1 = (I_2 - I_3)/I_2I_3$, $a_2 = (I_3 - I_1)/I_3I_1$, $a_3 = (I_1 - I_2)/I_1I_2$. Se poate considera şi sistemul echivalent pentru componentele vitezei unghiulare

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\,\Omega_2\Omega_3,$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\,\Omega_3\Omega_1,$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\,\Omega_1\Omega_2.$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă asupra solidului acţionează forţe exterioare al căror moment rezultant relativ la punctul O este $\mathbf{n}$ în sistemul fix şi $\mathbf{N}$ în cel mobil ($\mathbf{n} = B\mathbf{N}$), atunci

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{n}$$

și ecuația lui Euler se scrie

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{M}] + \mathbf{N}.$$

B. Studierea soluțiilor ecuației lui Euler.

Lemă. *Ecuația lui Euler* (2) *are două integrale prime pătratice*

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \text{ și}$$

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Demonstrație. E se conservă conform legii conservării energiei iar M^2 — conform legii conservării momentului cinetic **m**, deoarece $\mathbf{m}^2 = (\mathbf{m},\mathbf{m}) = (B\mathbf{M}, B\mathbf{M}) = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = M^2$, $M = |\mathbf{M}|$. Lema este astfel demonstrată.

Prin urmare, vectorul **M** se află pe intersecția unui elipsoid cu o sferă. Pentru a determina construcția curbelor de intersecție, fixăm elipsoidul $E > 0$ și facem să varieze raza **M** a sferei (fig. 121).

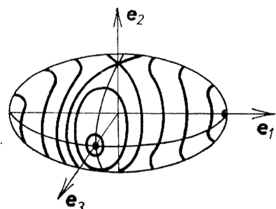


Fig. 121. Traiectoriile ecuațiilor lui Euler pe o suprafață de nivel constant al energiei.

Pentru concretizare, să presupunem că $I_1 > I_2 > I_3$. Semiaxele elipsoidului sînt $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$. Dacă raza **M** a sferei este mai mică decît semiaxa minimă sau mai mare decît semiaxa maximă ($M < \sqrt{2EI_3}$ sau $M > \sqrt{2EI_1}$) atunci intersecția este vidă și deci nu există mișcări cu astfel de valori ale lui E și M. Dacă raza sferei este egală cu semiaxa minimă, intersecția este formată din două puncte. Cu creșterea razei ($\sqrt{2EI_3} < M < \sqrt{2EI_2}$) se obțin două curbe în jurul extremităților semiaxei minime. Similar, dacă $M = \sqrt{2EI_1}$ se obțin cele două capete ale semiaxei maxime,

iar pentru $\sqrt{2EI_2} < M < \sqrt{2EI_1}$ — două curbe închise în vecinătatea acestor capete. În sfîrșit, pentru $M = \sqrt{2EI_2}$, intersecția este formată din două cercuri (care trec prin capetele semiaxei mijlocii).

Fiecare din cele șase capete ale semiaxelor elipsoidului este o traiectorie a ecuației lui Euler (2) — o poziție staționară a vectorului **M**. Ei îi corespunde o valoare constantă a vectorului viteză unghiulară care este îndreptat după una din axele principale de inerție $\mathbf{e}_i$; la o astfel de mișcare, $\mathbf{\Omega}$ este tot timpul coliniar cu **M**. Prin urmare, vectorul viteză unghiulară în spațiu își conservă poziția coliniară cu **m** : solidul rigid se rotește pur și simplu cu viteză unghiulară constantă în jurul axei de inerție $\mathbf{e}_i$, care este fixă în spațiu.

Definiție. O mișcare a solidului în timpul căreia viteza sa unghiulară rămîne constantă ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, $\mathbf{\Omega} = \text{const}$) se numește *rotație staționară*.

Am demonstrat deci următoarea

Teoremă. *Un solid rigid cu punctul fix O admite rotații staționare în jurul fiecăreia din cele trei axe principale de inerție* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Dacă rămînem în ipoteza $I_1 > I_2 > I_3$, atunci membrul drept al ecuației lui Euler nu se mai anulează în alte puncte — nu există alte rotații staționare.

Să analizăm acum stabilitatea soluțiilor staționare ale ecuației lui Euler (în sens Liapunov).

Teoremă. *Soluțiile staționare* $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1$ și $\mathbf{M} = M_3\mathbf{e}_3$ *ale ecuației lui Euler, corespunzătoare axelor de inerție minimă și maximă sînt stabile, iar soluția corespunzătoare axei mijlocii* ($\mathbf{M} = M_2\mathbf{e}_2$) *este instabilă.*

Într-adevăr, pentru o abatere mică a condiției inițiale față de $M_1\mathbf{e}_1$ sau $M_3\mathbf{e}_3$, traiectoria va fi o curbă închisă, în timp ce pentru o abatere mică față de $M_2\mathbf{e}_2$ — o curbă închisă mare (care nu rămîne în vecinătatea lui $M_2\mathbf{e}_2$).

Problemă. Sînt oare stabile în sens Liapunov *rotațiile staționare ale solidului rigid* în jurul axelor de inerție minimă și maximă?

Răspuns. Nu.

C. Descrierea mișcării. dată de Poinsot Putem să ne reprezentăm foarte bine mișcările vectorilor moment cinetic și viteză unghiulară în solid (**M** și $\mathbf{\Omega}$) — acestea sînt periodice (dacă $\mathbf{M} \neq \sqrt{2EI_i}$).

Pentru a vedea cum se roteşte solidul în spaţiu, să considerăm elipsoidul său de inerţie

$$\mathcal{E} = \{\Omega : (A\Omega, \ \Omega) = 1\} \subset K,$$

unde $A : \Omega \to \mathbf{M}$ este operatorul (simetric) de inerţie al solidului fixat în punctul O.

În fiecare moment t, elipsoidul $\mathcal{E}$ ocupă în sistemul de coordonate fix k poziţia $B_t\mathcal{E}$.

Teoremă (Poinsot). *În timpul mişcării, elipsoidul de inerţie se rostogoleşte fără alunecare pe un plan fix ortogonal pe vectorul moment cinetic* $\mathbf{m}$ (fig. 122).

D e m o n s t r a ţ i e. Să considerăm un plan π, rotogonal pe vectorul moment $\mathbf{m}$ şi tangent la elipsoidul de inerţie $B_t\mathcal{E}$. Există de fapt două astfel de plane şi în punctul de tangenţă normala la elipsoid este paralelă cu $\mathbf{m}$.

Dar elipsoidul de inerţie $\mathcal{E}$ are în punctul Ω normala grad $(A\Omega, \Omega) = \text{grad}\, 2T = 2A\,\Omega = 2\mathbf{M}$. Prin urmare, în punctele $\pm\xi = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2T}}$ de intersecţie ale axei ω cu $B_t\mathcal{E}$, normala la $B_t\mathcal{E}$ este coliniară cu $\mathbf{m}$.

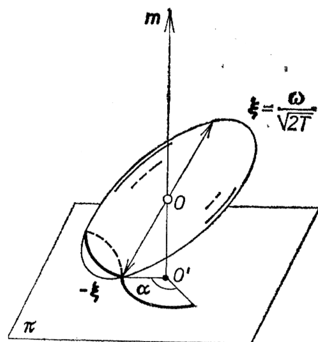


Fig. 122. Elipsoidul de inerţie se rostogoleşte pe un plan fix.

Rezultă că planul π este tangent la $B_t\mathcal{E}$ în punctul $+\xi$ (sau $-\xi$) de pe axa instantanee de rotaţie. Dar produsul scalar al lui ξ cu vectorul fix $\mathbf{m}$ este egal cu $\pm \frac{1}{\sqrt{2T}}(\mathbf{m}, \omega) = \pm\sqrt{2T}$ şi deci este constant. Deducem că distanţele de la punctul O la planul π nu variază, **deci** că planul π este fix.

Cum punctul de tangenţă este aşezat pe axa instantanee de rotaţie, viteza sa este nulă şi deci elipsoidul $B_t\mathcal{E}$ se rostogoleşte pe planul π fără alunecare, c.c.t.d.

Corolar. *Pentru condiţii iniţiale apropiate de rotaţia staţionară în jurul axei maxime (sau minime) de inerţie, viteza unghiulară rămîne totdeauna apropiată de valoarea sa iniţială nu numai în corp* (Ω), *ci şi în spaţiu* (ω).

Să considerăm traiectoria punctului de tangenţă în planul fix π. Cînd acest punct descrie pe elipsoid o rotaţie completă, condiţiile iniţiale se repetă cu diferenţa că solidul se roteşte cu un anumit unghi α în jurul axei $\mathbf{m}$. A doua rotaţie va fi exact la fel ca prima. Dacă $\alpha = 2\pi\, p/q$, atunci mişcarea este în întregime periodică; dacă însă α nu este comensurabil cu 2π, solidul nu se întoarce niciodată în poziţia iniţială.

În acest ultim caz, punctul de tangenţă descrie în planul π o curbă densă într-un inel cu centrul în O' (fig. 123).

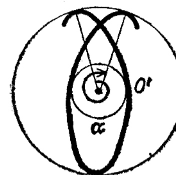


Fig. 123. Traiectoria punctului de tangenţă pe planul fix.

P r o b l e m ă. Să se arate că componentele conexe ale subvarietăţilor invariante bidimensionale V_c (§28, B) în spaţiul cu şase dimensiuni $TSO(3)$ sînt tori pe care se pot alege coordonatele unghiulare φ_1 şi φ_2 (mod 2π) astfel încît $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c)$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$.

I n d i c a ţ i e. Se ia drept φ_1 faza mişcării periodice lui $\mathbf{M}$.

Să considerăm cazul particular important în care elipsoidul de inerţie este un elipsoid de rotaţie:

$$I_2 = I_3 \neq I_1.$$

În acest caz axa $B_t\mathbf{e}_1$ a elipsoidului, axa instantanee de rotaţie ω şi vectorul $\mathbf{m}$ sînt conţinute întotdeauna în acelaşi plan. Unghiurile dintre ele şi mărimea vectorului ω se conservă, iar punctul de tangenţă descrie atît pe elipsoid cît şi pe planul π cercuri; axele de rotaţie (ω) şi de simetrie $(B_t\mathbf{e}_1)$ descriu, cu aceeaşi viteză unghiulară, conuri în jurul vectorului moment $\mathbf{m}$ (fig. 124).

Acest tip de mişcare în jurul lui $\mathbf{m}$ se numeşte *precesie.*

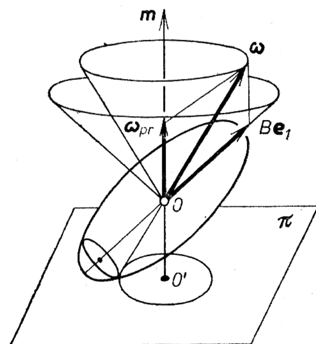


Fig. 124. Rostogolirea unui elipsoid de rotație pe un plan fix.

P r o b l e m ă. Să se determine viteza unghiulară a mișcării de precesie.

Răspuns. Descompunem vectorul viteză unghiulară ω după direcțiile vectorului **m** și axei $B_t\mathbf{e}_1$. Prima componentă este aceea care dă viteza de precesie $\omega_{pr} = M/I_2$.

I n d i c a ț i e. Se reprezintă mișcarea corpului sub forma unei compuneri dintre o rotație în jurul axei momentului și o rotație în jurul axei corpului $B_t\mathbf{e}_1$. Viteza unghiulară a compunerii ambelor mișcări este egală cu suma vectorilor vitezelor unghiulare individuale.

O b s e r v a ț i e. Un solid rigid fixat în punctul O reprezintă, în absența forțelor exterioare, un sistem lagrangean al cărui spațiu de configurații este un grup, și anume SO(3), lagrangeanul fiind invariant la translații la stînga.

Se poate arăta că o parte importantă a teoriei euleriene a solidului rigid utilizează numai această ipoteză și deci își păstrează valabilitatea și în cazul unui sistem lagrangean invariant la stînga arbitrar pe un grup Lie arbitrar.

În particular, aplicînd această teorie la grupul difeomorfismelor unui domeniu riemannian D, care conservă volumele, se pot obține teoremele fundamentale ale hidrodinamicii fluidelor ideale.

§30. TITIREZUL LUI LAGRANGE

În acest paragraf se studiază mișcarea unui solid rigid cu simetrie axială, fixat într-un punct într-un cîmp de forțe omogen. Această mișcare este compusă din trei procese periodice : o rotație, o precesie și o nutație.

A. Unghiurile lui Euler. Să considerăm un solid rigid cu punct fix O și supus la acțiunea forței de greutate $m\mathbf{g}$. Problema mișcării unui astfel de „solid rigid greu" nu a fost rezolvată în cazul general nici pînă astăzi și într-un anumit sens este insolubilă.

În această problemă cu trei grade de libertate se cunosc numai două integrale prime : integrala energiei $E = T + U$ și proiecția momentului cinetic pe verticală, M_z.

Există un caz particular în care problema se poate rezolva complet — cazul unui *titirez simetric*. Se numește *titirez simetric* sau *lagrangean* un solid rigid greu cu punct fix O al cărui elipsoid de inerție în O este un elipsoid de rotație și al cărui centru de greutate este așezat pe axa de rotație (inerție) $\mathbf{e}_3$ (fig. 125).

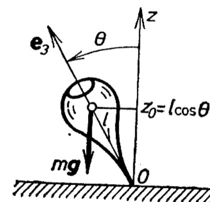


Fig. 125. Titirezul lui Lagrange.

În acest caz, rotația în jurul axei $\mathbf{e}_3$ invariază lagrangeanul și conform teoremei lui Noether, există o integrală primă suplimentară în raport cu E și M_z (după cum vom vedea, această integrală este proiecția $\mathbf{M}_3$ a vectorului moment pe axa $\mathbf{e}_3$).

Dacă se reușește introducerea a trei coordonate astfel încît printre ele să se afle unghiul de rotație în jurul axei verticale z și unghiul de rotație în jurul axei $\mathbf{e}_3$ a titirezului, atunci aceste două coordonate vor fi ciclice și problema cu trei grade de libertate inițială se va reduce la o problemă cu un singur grad de libertate (pentru cea de-a treia coordonată).

O asemenea alegere a coordonatelor în spațiul configurațiilor SO(3) este posibilă ; coordonatele astfel obținute φ, ψ, θ se numesc *unghiurile lui Euler* și formează un sistem de coordonate locale pe SO(3), asemănător cu coordonatele geografice pe sferă ; cu singularități la poli și multiform pe unul din meridiane.

Introducem următoarele notații (fig. 126) :

$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — versorii sistemului fix cartezian de coordonate, cu orientarea dreaptă și originea în punctul fix O.

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — versorii sistemului mobil drept de coordonate legat de solid, îndreptați după axele principale de inerție în punctul O.

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$ — momentele de inerție ale solidului relativ la punctul O.

$\mathbf{e}_N$ — versorul axei $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_3]$, numită «*linia nodurilor*». (Toți vectorii sînt elemente ale „spațiului fix" k).

Pentru a suprapune reperul fix ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) peste reperul mobil ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) trebuie efectuate trei rotații :

1) *o rotație de unghi* φ *în jurul axei* $\mathbf{e}_z$. Atunci $\mathbf{e}_z$ rămîne pe loc, iar $\mathbf{e}_x$ trece în $\mathbf{e}_N$;

2) *o rotație de unghi* θ *în jurul axei* $\mathbf{e}_N$. Atunci $\mathbf{e}_N$ rămîne pe loc și $\mathbf{e}_z$ trece în $\mathbf{e}_3$;

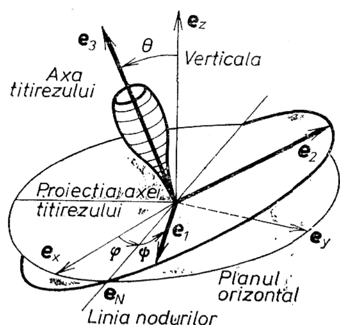


Fig. 126. Unghiurile Euler.

3) *o rotație de unghi* ψ *în jurul axei* $\mathbf{e}_3$. Atunci $\mathbf{e}_3$ rămîne pe loc și $\mathbf{e}_N$ trece în $\mathbf{e}_1$.

În final, $\mathbf{e}_x$ trece în $\mathbf{e}_1$ și $\mathbf{e}_z$ trece în $\mathbf{e}_3$. Prin urmare și $\mathbf{e}_y$ trece în $\mathbf{e}_2$.

Unghiurile φ, ψ, θ se numesc *unghiuri Euler*. Se demonstrează imediat următoarea

Teoremă. *Fiecărui triplet de numere* φ, θ, ψ *din construcția precedentă i se asociază o rotație* $B(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$ *care suprapune reperul* ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) *peste reperul* ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). *În acest caz explicația* $(\varphi, \theta, \psi) \to B(\varphi, \theta, \psi)$ *definește un sistem de coordonate locale*

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi$$

în spațiul de configurații SO(3) *al titirezului.*

La fel ca longitudinea geografică, φ și ψ se pot considera unghiuri mod 2π ; pentru $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$, aplicația $(\varphi, \theta, \psi) \to B$ are o singularitate de tipul unui pol.

B. Calculul lagrangeanului. Să exprimăm lagrangeanul sistemului prin coordonatele φ, θ, ψ și derivatele acestora.

Evident, energia potențială este

$$U = \iiint zg\, \mathrm{d}m = mgz_0 = mgl \cos\theta,$$

unde z_0 este înălțimea față de O a centrului de greutate (fig. 125).

Să determinăm expresia energiei cinetice. Este util acum să folosim un mic truc : considerăm *cazul particular* $\varphi = \psi = 0$.

Lemă. *Viteza unghiulară a titirezului se exprimă prin derivatele unghiurilor lui Euler prin formula*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin\theta)\,\mathbf{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\,\mathbf{e}_3,$$

dacă $\varphi = \psi = 0$.

D e m o n s t r a ț i e. Să considerăm viteza unui punct al titirezului care ocupă la momentul t poziția $\mathbf{r}$. După timpul $\mathrm{d}t$, acest punct va ocupa (cu eroarea $(\mathrm{d}t^2)$) poziția

$$B(\varphi + \mathrm{d}\varphi, \theta + \mathrm{d}\theta, \psi + \mathrm{d}\psi)\, B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\mathbf{r},$$

unde $\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\theta = \dot{\theta}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\psi = \dot{\psi}\,\mathrm{d}t$.

Prin urmare, cu aceeași precizie, vectorul deplasării este suma a trei componente :

$$B(\varphi + \mathrm{d}\varphi, \theta, \psi)\, B^{-2}(\varphi, \theta\psi,)\, \mathbf{r} - \mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega}_\varphi, \mathbf{r}]\, \mathrm{d}t;$$

$$B(\varphi, \theta + \mathrm{d}\theta, \psi)\, B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\, \mathbf{r} - \mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega}_\theta, \mathbf{r}]\, \mathrm{d}t;$$

$$B(\varphi, \theta, \psi + \mathrm{d}\psi)\, B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\, \mathbf{r} - \mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega}_\psi, \mathbf{r}]\, \mathrm{d}t$$

(vitezele unghiulare $\boldsymbol{\omega}_\varphi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\psi$ fiind definite de aceste formule).

Rezultă că viteza punctului $\mathbf{r}$ este $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi, \mathbf{r}]$ și deci viteza unghiulară a solidului are expresia

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi,$$

în care componentele sînt definite de formulele precedente.

Rămîne să descompunem vectorii $\boldsymbol{\omega}_\varphi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$ și $\boldsymbol{\omega}_\psi$ după reperul $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Pînă acum nu am utilizat condiția $\varphi = \psi = 0$. Dacă $\varphi = \psi = 0$.

$$B(\varphi + d\varphi, \theta, \psi)B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$$

este pur și simplu o rotație de unghi $d\varphi$ în jurul axei $\mathbf{e}_z$ și deci

$$\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z.$$

De asemenea, în cazul $\varphi = \psi = 0$, $B(\varphi, \theta + d\theta, \psi)B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ este rotația în jurul axei $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1$ cu unghiul $d\theta$ și deci

$$\omega_\theta = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_1.$$

În sfîrșit, $B(\varphi, \theta, \psi + d\psi)\,B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ este o rotație de unghi $d\psi$ în jurul axei $\mathbf{e}_3$ și deci

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3.$$

În final, pentru $\varphi = \psi = 0$, obținem

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_z + \dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 + \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3.$$

Este însă evident că, pentru $\varphi = \psi = 0$,

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta \cdot \mathbf{e}_3 + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_2.$$

Prin urmare, componentele vitezei unghiulare în raport cu axele de inerție $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sînt

$$\omega_1 = \dot{\theta},\ \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta,\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta, \text{ c.c.t.d.}$$

Cum $T = \frac{1}{2}(I_1\,\omega_1^2 + I_2\,\omega_2^2 + I_3\,\omega_3^2)$, energia cinetică pentru $\varphi = \psi = 0$ este dată de formula

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2.$$

Dar energia cinetică nu poate depinde de φ și $\dot{\psi}$ — acestea sînt coordonate ciclice și putem, fără a schimba pe T, să alegem mereu pe $\varphi = \dot{\psi} = 0$ schimbînd originea de la care se măsoară φ și $\dot{\psi}$.
În final, obținem lagrangeanul

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta.$$

D. Studierea mișcării. Coordonatelor ciclice φ, $\dot{\psi}$ le corespund integralele prime

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = M_z = \dot{\varphi}\,(I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + \dot{\psi}\,I_3\cos\theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = M_3 = \dot{\varphi}\,I_3\cos\theta + \dot{\psi}\,I_3.$$

Teoremă. *Înclinarea față de verticală θ a titirezului variază în timp la fel ca în sistemul unidimensional cu energia*

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}_1 + U_{\text{ef}}(\theta),$$

unde energia potențială efectivă este dată de formula

$$U_{\text{ef}} = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta.$$

D e m o n s t r a ț i e. În concordanță cu teoria generală, exprimăm pe $\dot{\varphi}$ și $\dot{\psi}$ prin M_3 și M_z. Obținem energia totală a sistemului sub forma

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

și

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}.$$

Termenul constant în θ, $\frac{M_3^2}{2I_3} = E - E'$ nu influențează ecuațiile de mișcare. Teorema este astfel demonstrată.

Pentru a studia sistemul unidimensional obținut, este comod să efectuăm schimbarea de variabile $\cos\theta = u(-1 \leqslant u \leqslant 1)$. Introducînd și notațiile

$$\frac{M_z}{I_1} = a, \quad \frac{M_3}{I_1} = b, \quad \frac{2E'}{I_1} = \alpha, \quad \frac{2mgl}{I_1} = \beta > 0,$$

putem scrie legea conservării energiei E' sub forma

$$\dot{u}^2 = f(u), \text{ unde } f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2,$$

iar legea de variație a azimutului φ sub forma

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

Să observăm că $f(u)$ este un polinom de gradul trei și că $f(+\infty) = +\infty$, $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$, dacă $a \neq \pm b$. Pe de altă parte, unei mișcări reale îi corespund niște constante a, b, α, β pentru care $f(u) \geqslant 0$ pentru niște valori $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

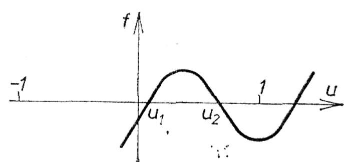


Fig. 127. Graficul funcției $f(u)$.

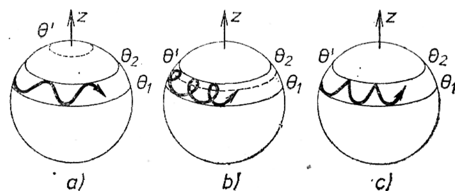


Fig. 128. Urma axei titirezului pe sfera unitate.

Prin urmare, $f(u)$ are exact două rădăcini reale u_1 și u_2 pe segmentul $-1 \leqslant u \leqslant 1$ (și una pentru $u > 1$, fig. 127).

Prin urmare, înclinarea θ a axei titirezului variază periodic între două valori limită θ_1 și θ_2 (fig. 128).

Această variație periodică a înclinării se numește *nutație*.

Să considerăm acum mișcarea azimutală a axei titirezului. Punctul de intersecție al axei cu sfera unidimensională se mișcă în inelul cuprins între paralelele θ_1 și θ_2. Variația azimutului φ al axei este descrisă de ecuația

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

Dacă rădăcina u' a ecuației $a = bu$ nu este cuprinsă în intervalul (u_1, u_2), atunci unghiul φ variază monoton și axa trasează pe sfera unitate o curbă de tipul unei sinusoide (fig. 128, *a*).

Dacă rădăcina u' a ecuației $a = bu$ este în intervalul (u_1, u_2), atunci viteza de variație a lui φ are semne contrare pe paralelele θ_1 și θ_2 și axa descrie pe sferă o curbă cu ochiuri (fig. 128, *b*).

Dacă rădăcina u' a ecuației $a = bu$ coincide cu u_1 sau u_2 (de exemplu, $u' = u_2$), atunci axa descrie o curbă cu vîrfuri (fig. 128, *c*).

Ultimul caz, deși este excepțional, se observă de fiecare dată cînd lăsăm să pornească titirezul cu axa înclinată sub unghiul θ_2, fără viteză inițială : la început titirezul cade, dar pe urmă se ridică din nou.

Mișcarea azimutală a axei titirezului se numește *precesie*. Mișcarea finală a titirezului este compusă din rotația în jurul propriei sale axe, nutația și precesia. Fiecare din cele trei mișcări are propria sa frecvență. Dacă aceste frecvențe sînt incomensurabile, atunci titirezul nu revine niciodată în poziția inițială, deși se apropie de ea oricît de mult.

§ 31. TITIREZUL ADORMIT ȘI TITIREZUL RAPID

Formulele obținute în §30 reduc rezolvarea ecuațiilor de mișcare ale titirezului la cvadraturi eliptice. Se pot însă obține informații calitative privind mișcarea fără a recurge la cvadraturi.

În acest paragraf se studiază stabilitatea unui titirez care stă vertical și se dau formulele aproximative pentru mișcarea unui titirez care pornește rapid.

A. Titirezul adormit. Pentru început, să considerăm soluția particulară a ecuațiilor de mișcare, pentru care axa titirezului este tot timpul verticală ($\theta = 0$) și viteza unghiulară este constantă (titirezul „adormit"). În acest caz avem, evident, $M_z = M_3 = I_3 \omega_3$ (fig. 129).

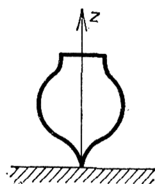


Fig. 129. Titirezul adormit.

Problemă. Să se arate că o rotație staționară în jurul axei verticale este totdeauna instabilă în sens Liapunov.

Vom analiza mișcarea *axei titirezului* și nu aceea a titirezului. Este această mișcare stabilă: rămîne axa titirezului mereu în vecinătatea verticalei? Altfel spus, rămîne unghiul θ mereu mic? Să dezvoltăm energia potențială efectivă a sistemului

$$U_{ef} = \frac{(M_z - M_3 \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + mgl \cos\theta$$

în serie în raport cu θ. Obținem

$$U_{ef} = \frac{I_3^2 \cdot \omega_3^2 \cdot \theta^4/_4}{2I_1\, \theta^2} + \ldots - mgl\frac{\theta^2}{2} + \ldots = C + A \cdot \theta^2 + \ldots,$$

$$A = \frac{\omega_3^2 I_3^2}{8I_1} - \frac{mgl}{2}.$$

Dacă $A > 0$, poziția de echilibru $\theta = 0$ a sistemului unidimensional este stabilă, iar dacă $A < 0$ — instabilă. Prin urmare, condiția de stabilitate are expresia

$$\omega_3^2 > \frac{4\, mgl\, I_1}{I_3^2}.$$

Cînd frecarea micșorează viteza titirezului adormit sub această valoare limită, titirezul se trezește.

Problemă. Să se demonstreze că pentru $\omega_3^2 > \dfrac{4mglI_1}{I_3^2}$ axa titirezului adormit este stabilă și în raport cu acele perturbații care modifică și valorile M_z și M_3, nu numai pe cele ale lui θ.

B. Titirezul rapid. Un titirez se numește *rapid* dacă energia sa cinetică este mare în raport cu energia potențială

$$\frac{1}{2} I_3\, \omega_3^2 \gg mgl.$$

Din considerente de asemănare este clar că mărirea de N ori a vitezei unghiulare este echivalentă cu micșorarea greutății de N^2 ori.

Teoremă. *Dacă, conservînd poziția inițială a titirezului, se mărește de N ori viteza unghiulară, atunci traiectoria titirezului va coincide cu aceea care se obține lăsînd viteza unghiulară la valoarea inițială, dar micșorînd de N^2 ori accelerația g a forței gravitaționale. Se înțelege că, prin acest proces, în cazul vitezei unghiulare mărite, traiectoria este parcursă de N ori mai repede*)*.

Prin urmare, putem studia cazul $g \to 0$ și aplica rezultatele obținute la cazul $\omega \to \infty$.

Pentru început, vom analiza cazul $g = 0$, deci mișcarea unui titirez simetric în absența forței de greutate. Să comparăm cele două descrieri ale acestei mișcări — cea a lui Lagrange (§ 30, D) și cea a lui Poinsot (§ 29, C).

Pentru început, să considerăm ecuația lui Lagrange care descrie variația unghiului θ de înclinare a axei titirezului.

Lemă. *În absența forței de greutate, unghiul θ_0 pentru care $M_z = M_3 \cos\theta_0$ este poziție de echilibru pentru ecuația de mișcare a axei titirezului. Frecvența oscilațiilor mici ale lui θ în vecinătatea acestei poziții de echilibru este egală cu*

$$\omega_{nut} = \frac{I_3\, \omega_3}{I_1}.$$

Demonstrație. În absența forței de greutate, energia potențială efectivă se reduce la

$$U_{ef} = \frac{(M_z - M_3 \cos\theta)^2}{2\, I_1 \sin^2\theta}.$$

*) Să notăm cu $\varphi_g(t, \xi)$ poziția titirezului la momentul t corespunzătoare condiției inițiale $\xi \in TSO(3)$ și accelerației forței gravitaționale g. Atunci teorema afirmă că

$$\varphi_g(t, N\xi) = \varphi_{N^{-2}g}(Nt, \xi).$$

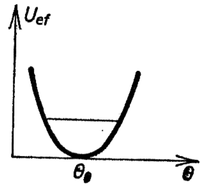


Fig. 130. Energia potențială efectivă a titirezului.

Această funcție nenegativă are un punct de minim cu valoarea zero pentru unghiul $\theta = \theta_0$ definit de condiția $M_z = M_3 \cos\theta_0$ (fig. 130).

Prin urmare, unghiul de înclinare θ_0 față de verticală al axei titirezului este staționar și stabil: pentru o abatere mică a înclinării inițiale θ de la θ_0, θ efectuează oscilații mici în jurul lui θ_0 (nutație). Frecvența acestor oscilații se determină ușor din formula generală: frecvența oscilațiilor mici într-un sistem unidimensional cu energia

$$E = \frac{a\dot{x}^2}{2} + U(x), \quad U(x_0) = \min U(x)$$

este dată de formula (§22, D)

$$\omega^2 = \frac{U''(x_0)}{a}.$$

Energia sistemului unidimensional care descrie oscilațiile înclinării axei titirezului este

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{ef}.$$

Pentru $\theta = \theta_0 + x$, obținem $M_z - M_3\cos\theta = M_3 [\cos\theta_0 - \cos(\theta_0 + x)] =$

$$= M_3 x \sin\theta_0 + O(x^2),$$

$$U_{ef} = \frac{M_3^2 x^2 \sin^2\theta_0}{2I_1 \sin^2\theta_0} + o(x^2) = \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}x^2 + \ldots,$$

de unde obținem pentru frecvența de nutație expresia

$$\omega_{nut} = \frac{I_3\omega_3}{I_1}, \text{ c.c.t.d.}$$

Din formula $\dot{\varphi} = \dfrac{M_z M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$ rezultă că pentru $\theta = \theta_0$ azimutul nu variază în timp: axa titirezului este imobilă. Mișcarea

azimutală a axei pentru abateri mici ale lui θ față de θ_0 se poate studia și ea cu ajutorul acestei formule, dar noi vom proceda altfel.

Mișcarea titirezului în absența forței de greutate poate fi considerată ca o mișcare în sensul lui Poinsot. Prin urmare, axa titirezului se rotește uniform, în jurul vectorului moment cinetic, conservîndu-și poziția în spațiu.

Prin urmare, axa titirezului descrie pe sferă un cerc cu centrul în punctul corespunzător momentului cinetic (fig. 131).

Observație. În acest mod, mișcarea axei titirezului care este denumită, după Lagrange — *nutație* — este denumită, în descrierea dată de Poinsot, *precesie*.

Se înțelege că formula obținută mai sus pentru frecvența unei nutații mici: $\omega_{nut} = I_3\omega/I_1$, coincide cu formula frecvenței de precesie $\omega = M/I_1$ în descrierea dată de Poinsot mișcării: cînd amplitudinea nutației tinde la zero, $I_3\omega_3 \to M$.

C. Titirezul într-un cîmp slab. Să trecem acum la cazul în care forța de greutate nu este nulă, dar este foarte mică (considerăm că valorile lui M_z și M_3 sînt fixate). În acest caz, la energia potențială efectivă se adaugă termenul $mgl \cos\theta$, care este mic împreună cu derivatele sale. Să arătăm că acest termen modifică foarte puțin frecvența de nutație.

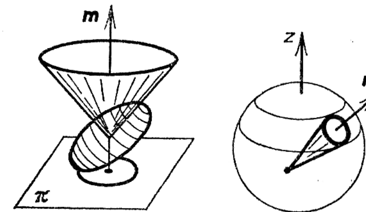


Fig. 131. Comparație între descrierea mișcărilor titirezului după Lagrange și după Poinsot.

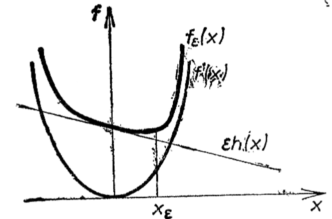


Fig. 132. Deplasarea minimului la o variație mică a funcției.

Lemă. *Să presupunem că funcția $f(x)$ are un minim în $x = 0$ și dezvoltarea Taylor $f(x) = A\dfrac{x^2}{2} + \ldots$, $A > 0$. Să presupunem că funcția $h(x)$ are dezvoltarea Taylor în 0, $h(x) = B + Cx + \ldots$ Atunci pentru ε suficient de mic, funcția $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon h(x)$ are un minim într-un punct apropiat de 0* (fig. 132)

$$x_\varepsilon = -\frac{C\varepsilon}{A} + O(\varepsilon^2).$$

În acest punct, $f''_\varepsilon(x) = A + O(\varepsilon)$.

Într-adevăr, avem $f'(x) = Ax + C\varepsilon + o(x^2)$ și rezultatul se obține aplicînd lui f''_ε teorema funcției implicite.

Conform lemei, energia potențială efectivă are, pentru g mic, un minim θ_g în vecinătatea punctului θ_0; valoarea lui U'' în θ_g diferă puțin de $U''(\theta_0)$. Prin urmare, frecvența unei nutații mici în vecinătatea lui θ_0 este apropiată de valoarea corespunzătoare lui $g = 0$:

$$\lim_{g\to 0} \omega_{\text{nut}} = \frac{I_3}{I_1}\omega_3.$$

D. Titirezul lansat rapid. Să considerăm acum condițiile inițiale speciale în care dăm drumul axei titirezului fără un impuls inițial dintr-o poziție înclinată sub unghiul θ_0 față de verticală.

Teoremă. *Dacă la momentul inițial axa titirezului este fixă* ($\dot\varphi = \dot\theta = 0$) *și titirezul se rotește rapid în jurul axei sale* ($\omega_3 \to \infty$), *fiind înclinat față de verticală sub unghiul* θ_0 ($M_z = M_3 \cos\theta_0$) *atunci, asimptotic pentru* $\omega_3 \to \infty$:

1) *frecvența nutației este proporțională cu viteza unghiulară;*
2) *amplitudinea nutației este invers proporțională cu pătratul vitezei unghiulare;*
3) *frecvența precesiei este invers proporțională cu viteza unghiulară;*
4) *sînt valabile formulele asimptotice*

$$\omega_{\text{nut}} \sim \frac{I_3}{I_1}\omega_3,\quad a_{\text{nut}} \sim \frac{I_1 mgl}{I_3^2\omega_3^2}\sin\theta_0,$$

$$\omega_{\text{prec}} \sim \frac{mgl}{I_3\omega_3}$$

$$\left(\textit{aici } f(\omega_3) \sim g(\omega_3) \textit{ dacă } \lim_{\omega_3\to\infty}\frac{f}{g} = 1\right).$$

Pentru demonstrație, să trecem la cazul în care viteza unghiulară inițială este fixată, dar $g \to 0$.

Traducînd apoi formulele obținute cu ajutorul considerațiilor de asemănare (vezi pct. B) obținem teorema formulată.

Știm din § 30, D că pentru condițiile noastre inițiale axa titirezului descrie pe sferă o curbă cu vîrfuri.

Să aplicăm lema de mai sus pentru a găsi punctul de minim θ_g al energiei potențiale efective. Punem (fig. 133)

$$\theta = \theta_0 + x,\ \cos\theta = \cos\theta_0 - x\sin\theta_0 + \dots$$

și obținem, ca și mai sus, dezvoltarea Taylor în raport cu x:

$$U_{\text{ef}}\Big|_{g=0} = \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}x^2 + \dots,$$

$$mgl\cos\theta = mgl\cos\theta_0 - mglx\sin\theta_0 + \dots .$$

Aplicînd lema funcțiilor $f = U_{\text{ef}}|_{g=0}$ și $h = mgl\cos(\theta_0 + x)$ cu $\varepsilon = g$, obținem că punctul de minim al energiei potențiale U_{ef} este atins pentru unghiul de înclinare

$$\theta_g = \theta_0 + x_g,\quad x_g = \frac{I_1 ml\sin\theta_0}{I_3^2\omega_3^2}g + O(g^2).$$

Prin urmare, înclinarea θ a axei titirezului va oscila în jurul valorii θ_g (fig. 134). Dar la momentul inițial, $\theta = \theta_0$ și $\dot\theta = 0$. Prin urmare, θ_0 corespunde poziției celei mai coborîte a axei titirezului și deci, pentru g mic, amplitudinea nutației este asimptotic egală cu

$$a_{\text{nut}} \sim x_g \sim \frac{I_1 ml\sin\theta_0}{I_3^2\omega_3^2}g\quad (g\to 0).$$

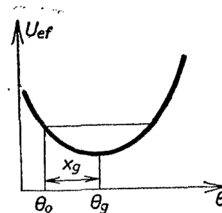


Fig. 133. Determinarea amplitudinii de nutație.

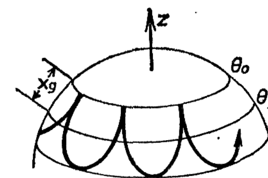


Fig. 134. Mișcarea axei titirezului.

Să determinăm mișcarea de precesie a axei. Din formula generală

$$\dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},$$

obținem, pentru $M_z = M_3\cos\theta_0$, $\theta = \theta_0 + x$,

$$M_z - M_3\cos\theta = M_3 x\sin\theta_0 + \dots$$

şi deci

$$\overline{\dot{\varphi}} = \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x + \ldots .$$

Dar x oscilează armonic de la 0 la $2x_g$ (cu eroarea $O(g^2)$). Rezultă că media pe o perioadă de nutaţie a valorii vitezei de precesie este asimptotic egală cu

$$\overline{\dot{\varphi}} \sim \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x_g \sim \frac{mgl}{I_3 \omega_3} \quad (g \to 0).$$

Problemă. Să se arate că

$$\lim_{g \to 0} \lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\frac{mgl}{I_3 \omega_3}} = 1$$

Partea a III-a

MECANICA HAMILTONIANĂ

Mecanica hamiltoniană reprezintă o geometrie în spațiul fazelor. Spațiul fazelor are o structură de varietate simplectică. Pe orice varietate simplectică acționează grupul difeomorfismelor simplectice. Noțiunile și teoremele fundamentale ale mecanicii hamiltoniene sînt invariante (chiar dacă ele sînt formulate în termeni de coordonate locale simplectice) în raport cu acest grup (și chiar în raport cu un grup de transformări mai larg care angajează și timpul).

Un sistem mecanic hamiltonian este definit de o varietate de dimensiune pară („spațiul fazelor"), de o structură simplectică pe această varietate („invariantul integral al lui Poincaré") și de o funcție definită pe varietate („funcția lui Hamilton"). Orice grup cu un parametru de difeomorfisme simplectice ale spațiului fazelor, care conservă funcția lui Hamilton, este asociat unei integrale prime a ecuațiilor de mișcare.

Mecanica lagrangeană este cuprinsă în mecanica hamiltoniană ca un caz particular (în acest caz spațiul fazelor este fibrarea cotangentă a spațiului configurațiilor iar funcția lui Hamilton este transformata Legendre a funcției lui Lagrange).

Punctul de vedere hamiltonian permite studierea pînă la capăt a unei serii de probleme ale mecanicii, care nu se supun rezolvării prin alte mijloace (de exemplu, problema atracției de către două centre fixe și problema geodezicelor pe un elipsoid cu trei axe inegale). Punctul de vedere hamiltonian are o importanță și mai mare pentru metodele aproximative ale teoriei perturbațiilor (mecanica cerească), pentru înțelegerea caracterului general al mișcării în sistemele mecanice complicate (teoria ergodică, mecanica statistică) și în legătură cu alte domenii ale fizicii matematice (optica, mecanica cuantică etc.).

CAPITOLUL 7

FORME DIFERENȚIALE

Formele diferențiale apar în mod natural atunci cînd se încearcă generalizarea la cazul dimensiunilor superioare a unor noțiuni ca lucrul mecanic efectuat de un cîmp de-a lungul unui drum și fluxul unui fluid printr-o suprafață.

Mecanica hamiltoniană nu poate fi înțeleasă fără aparatul formelor diferențiale. Noțiunile și rezultatele privind formele diferențiale care ne sînt necesare sînt cele privind produsul exterior, diferențiala exterioară, integrarea și formula lui Stokes.

§ 32. FORME EXTERIOARE

În cele ce urmează se definesc formele exterioare din algebră.

A. 1-forme. Fie $\mathbf{R}^n$ spațiul liniar real de dimensiune n*). Vectorii acestui spațiu vor fi notați cu $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$*)

D e f i n i ț i e. Se numește *formă de grad* 1 (sau, pe scurt, 1-*formă*) orice funcție liniară de vectorii spațiului $\mathbf{R}^n$, $\omega : \mathbf{R}^n \to R$, $\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2)$, $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n$.

Reamintim rezultatele fundamentale privitoare la 1-forme cunoscute din algebra liniară. Mulțimea tuturor 1-formelor se transformă într-un spațiu liniar real, dacă se definește suma a două forme prin formula

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

*) Este important să subliniem aici faptul că nu fixăm în $\mathbf{R}^n$ nici o structură euclidiană specială. În unele exemple apare o astfel de structură; atunci însă acest lucru se pune în evidență în mod explicit — („spațiul euclidian $\mathbf{R}^n$").

iar înmulțirea cu un număr — prin formula

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda \cdot \omega(\xi).$$

Spațiul 1-formelor definite pe $\mathbf{R}^n$ este și el de dimensiune n și se numește spațiul dual, $(\mathbf{R}^n)^*$, al spațiului $\mathbf{R}^n$.

Să presupunem că în $\mathbf{R}^n$ a fost ales un sistem liniar de coordonate $x_1, \ldots, x_n$. Fiecare dintre coordonatele x_i este chiar ea o 1-formă. Aceste n 1-forme constitue o bază a lui $(\mathbf{R}^n)^*$. Prin urmare, orice 1-formă ω se poate scrie ca

$$\omega = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

Valoarea pe care o ia ω pe vectorul ξ este egală cu

$$\omega(\xi) = a_1x_1(\xi) + \ldots + a_nx_n(\xi),$$

unde $x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi)$ sînt componentele vectorului ξ în sistemul de coordonate ales.

E x e m p l u. Dacă în spațiul euclidian $\mathbf{R}^3$ este definit un cîmp de forțe omogen $\mathbf{F}$, atunci lucrul mecanic A efectuat în deplasarea ξ este o 1-formă în variabila ξ (fig. 135)

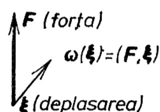


Fig. 135. Lucrul mecanic efectuat de o forță este o 1-formă în deplasări.

B. 2-forme.

D e f i n i ț i e. Se numește *formă exterioară de gradul* 2 (sau, pe scurt, 2-*formă*), orice funcție care are ca argument perechile de vectori din $\mathbf{R}^n$, $\omega^2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to R$, care este biliniară și antisimetrică :

$$\omega^2(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \boldsymbol{\eta}) = \lambda_1\omega^2(\xi_1, \boldsymbol{\eta}) + \lambda_2\omega^2(\xi_2, \boldsymbol{\eta});$$

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = -\omega^2(\xi_2, \xi_1);$$

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ \xi_1, \xi_2, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n.$$

E x e m p l u l 1. Fie $S(\xi_1, \xi_2)$ aria orientată a paralelogramului construit pe vectorii ξ_1, ξ_2 în planul euclidian orientat $\mathbf{R}^2$:

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \text{ unde } \begin{matrix} \xi_1 = \xi_{11}\mathbf{e}_1 + \xi_{12}\mathbf{e}_2, \\ \xi_2 = \xi_{21}\mathbf{e}_1 + \xi_{22}\mathbf{e}_2, \end{matrix}$$

iar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ este baza care determină orientarea lui $\mathbf{R}^2$.

Se observă ușor că $S(\xi_1, \xi_2)$ este o 2-formă (fig. 136).

E x e m p l u l 2. Fie $\mathbf{v}$ un cîmp omogen de viteze ale unui fluid în spațiul euclidian tridimensional orientat $\mathbf{R}^3$ (fig. 137). Atunci fluxul fluidului prin suprafața

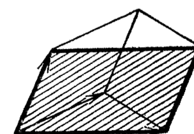


Fig. 136. Aria orientată este o 2-formă.

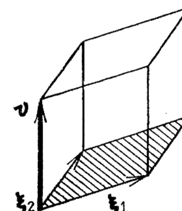


Fig. 137. Fluxul unui fluid printr-o suprafață este o 2-formă.

paralelogramului determinat de vectorii ξ_1 și ξ_2 este o funcție biliniară antisimetrică de ξ_1 și ξ_2, deci o 2-formă :

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = (\mathrm{v}, \xi_1, \xi_2)^*).$$

E x e m p l u l 3. Aria orientată a proiecției pe planul x_1, x_2 a paralelogramului determinat de vectorii ξ_1, ξ_2 în spațiul euclidian $\mathbf{R}^3$ este o 2-formă.

P r o b l e m a 1. Să se demonstreze că pentru orice 2-formă ω^2 pe $\mathbf{R}^n$ avem

$$\omega^2(\xi, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

R e z o l v a r e. Datorită antisimetriei, $\omega^2(\xi, \xi) = -\omega^2(\xi, \xi)$.

Mulțimea tuturor 2-formelor pe $\mathbf{R}^n$ se transformă într-un spațiu liniar real, dacă se definește suma a două forme prin formula

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1, \xi_2) + \omega_2(\xi_1, \xi_2)$$

și înmulțirea unei forme cu un număr real prin formula

$$(\lambda\omega)(\xi_1, \xi_2) = \lambda \cdot \omega(\xi_1, \xi_2).$$

---

*) Produsul mixt. (*N. T.*).

P r o b l e m a 2. Să se demonstreze că acest spaţiu liniar este de dimensiune finită şi să se determine dimensiunea.

Răspuns. $\frac{n(n-1)}{2}$; o bază este indicată mai jos.

C. k-forme.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *formă exterioară de gradul k* sau *k-formă* o funcţie de k vectori care este k-liniară şi antisimetrică:

$$\omega(\lambda'\xi_1' + \lambda''\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k) = \lambda'\omega(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_k) +$$

$$+ \lambda''\omega(\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k), \quad \forall\lambda', \lambda'' \in \mathbf{R},$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) = (-1)^{\nu}\,\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k), \text{ unde}$$

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{dacă permutarea } i_1, \ldots, i_k \text{ este pară,} \\ 1, & \text{dacă permutarea } i_1, \ldots, i_k \text{ este impară.} \end{cases}$$

E x e m p l u l 1. Volumul orientat al paralelipipedului cu muchiile $\xi_1, \ldots, \xi_k$ din spaţiul euclidian orientat $\mathbf{R}^n$ este o k-formă (fig. 138):

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_{11} \ldots \xi_{1n} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \ldots \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

unde $\xi_i = \xi_{i_1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_{in}\mathbf{e}_n$ şi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ este o bază în $\mathbf{R}^n$.

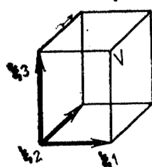


Fig. 138. Volumul orientat este o 3-formă.

E x e m p l u l 2. Fie $\mathbf{R}^k$ un k-plan orientat în spaţiul euclidian de dimensiune n, $\mathbf{R}^n$. În acest caz volumul k-dimensional orientat al proiecţiei paralelipipedului cu muchiile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in \mathbf{R}^n$ pe $\mathbf{R}^k$ este o k-formă pe $\mathbf{R}^n$.

Mulţimea tuturor k-formelor definite pe $\mathbf{R}^n$ devine un spaţiu liniar real dacă se definesc pe ea operaţiile de adunare

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_k) + \omega_2(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

şi înmulţire cu un număr real

$$(\lambda\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \lambda \cdot \omega(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

P r o b l e m a 3. Să se demonstreze că acest spaţiu liniar este de dimensiune finită şi să se calculeze dimensiunea.

Răspuns. C_n^k; o bază este indicată mai jos.

D. Produsul exterior a două 1-forme. Să introducem acum o nouă operaţie: produsul exterior al formelor. Dacă ω^k este o k-formă iar ω^l este o l-formă, definite pe $\mathbf{R}^n$, atunci produsul lor exterior $\omega^k \wedge \omega^l$ va fi o $(k+l)$-formă. Pentru început vom defini produsul exterior al 1-formelor, asociind fiecărei perechi de 1-forme ω_1, ω_2 în $\mathbf{R}^n$ o 2-formă $\omega_1 \wedge \omega_2$ în $\mathbf{R}^n$.

Fie ξ un vector din $\mathbf{R}^n$. Avînd la dispoziţie două 1-forme ω_1 şi ω_2, se poate defini o aplicaţie a lui $\mathbf{R}^n$ în planul $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, care pune în corespondenţă lui $\xi \in \mathbf{R}^n$ vectorul $\omega(\xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ cu componentele $\omega_1(\xi)$ şi $\omega_2(\xi)$, în planul cu coordonatele ω_1, ω_2 (fig. 139).

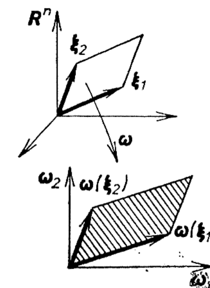


Fig. 139. Determinarea produsului exterior a două 1-forme.

D e f i n i ţ i e. *Produsul exterior* $\omega_1 \wedge \omega_2$ *ia pe perechile de vectori* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n$ *valoarea egală cu aria orientată a imaginii paralelogramului cu laturile* ξ_1 *şi* ξ_2 *în planul* ω_1, ω_2:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

P r o b l e m a 4. Să se demonstreze că $\omega_1 \wedge \omega_2$ este într-adevăr o 2-formă.

P r o b l e m a 5. Să se demonstreze că aplicaţia

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2$$

este biliniară și antisimetrică:

$$(\lambda'\omega_1'+\lambda''\omega_1'')\wedge\omega_2=\lambda'\omega_1'\wedge\omega_2+\lambda''\omega_1''\wedge\omega_2,\quad \omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1.$$

Indicație. Determinantul este biliniar și antisimetricatît în raport cu liniile, cît și cu coloanele.

Să presupunem că s-a ales în $\mathbf{R}^n$ un sistem de coordonate liniare, deci că s-au ales n 1-forme liniar independente $x_1,\ldots,x_n$. Vom numi formele x_i forme *bazice*.

Produsele exterioare ale formelor bazice sînt 2-formele $x_i\wedge x_j$. Datorită asimetriei, $x_i\wedge x_i=0$, $x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i$. Forma $x_i\wedge x_j$ are o interpretare geometrică foarte simplă: valoarea ei pe o pereche de vectori ξ_1, ξ_2 este egală cu aria orientată a proiecției paralelogramului determinat de ξ_1 și ξ_2 pe planul de coordonate x_i și x_j, paralel cu direcțiile celorlalte coordonate.

Problema 6. Să se demonstreze că cele $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 2-forme $x_i\wedge x_j\ (i<j)$ sînt liniar independente.

În particular, în spațiul tridimensional (x_1,x_2,x_3) aria proiecției pe planul (x_1,x_2) (respectiv (x_2,x_3) și (x_3,x_1)) este $x_1\wedge x_2$ (respectiv $x_2\wedge x_3$ și $x_3\wedge x_1$).

Problema 7. Să se demonstreze că orice 2-formă în spațiul tridimensional (x_1,x_2,x_3) se poate scrie ca

$$Px_2\wedge x_3+Qx_3\wedge x_1+Rx_1\wedge x_2.$$

Problema 8. Să se demonstreze că orice 2-formă în spațiul de dimensiune n cu coordonatele $x_1,\ldots,x_n$ se reprezintă unic sub forma

$$\omega^2=\sum_{i<j}a_{ij}\,x_i\wedge x_j,\quad a_{ij}\in\mathbf{R}.$$

Indicație. Fie $\mathbf{e}_i$ vectorul din bază corespunzător indicelui i: $x_i(\mathbf{e}_i)=1$, $x_j(\mathbf{e}_i)=0$, $j\neq i$. Să considerăm valoarea luată de forma ω^2 pe perechea $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$. Atunci

$$a_{ij}=\omega^2(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

E. Monoame exterioare. Fie date k 1-forme $\omega_1,\ldots,\omega_k$. Definim produsul lor exterior $\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k$.

Definiție. Să punem

$$(\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k)(\xi_1,\ldots,\xi_k)=\begin{vmatrix}\omega_1(\xi_1)\ldots\omega_k(\xi_1)\\ \vdots\qquad\vdots\\ \omega_1(\xi_k)\ldots\omega_k(\xi_k)\end{vmatrix}.$$

Cu alte cuvinte, *valoarea produsului 1-formelor pe paralelipipedul $\xi_1,\ldots,\xi_k$ este egală cu volumul orientat al imaginii paralelipipedului prin aplicația $\xi\to(\omega_1(\xi),\ldots,\omega_k(\xi))$, cu valori în spațiul numeric euclidian orientat $\mathbf{R}^k$.*

Problema 9. Demonstrați că $\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k$ este o k-formă.

Problema 10. Demonstrați că operația de înmulțire exterioară a formelor definește o aplicație multiliniară antisimetrică

$$(\omega_1,\ldots,\omega_k)\to\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k.$$

Cu alte cuvinte,

$$(\lambda'\omega_1'+\lambda''\omega_1'')\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_k=\lambda'\omega_1'\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_k+\lambda''\omega_1''\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_k,$$

$$\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k}=(-1)^\nu\,\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k,\ \text{unde}$$

$$\nu=\begin{cases}0, & \text{dacă permutarea } i_1,\ldots,i_k \text{ este pară},\\ 1, & \text{dacă permutarea } i_1,\ldots,i_k \text{ este impară}.\end{cases}$$

Să considerăm în $\mathbf{R}^n$ sistemul de coordonate definit de formele din bază $x_1,\ldots,x_n$. Produsul exterior a k-forme din bază

$$x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_k},\quad 1\leqslant i_m\leqslant n,$$

reprezintă volumul orientat al proiecției k-paralelipipedelor pe k-planul $(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, paralel cu celelalte axe de coordonate.

Problema 11. Să se demonstreze că dacă printre indicii $i_1,\ldots,i_k$ există doi care coincid, atunci forma $x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_k}$ este egală cu zero.

Problema 12. Să se demonstreze că formele

$$x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_k},\ \text{unde } 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$$

sînt liniar independente.

Evident, numărul acestor forme este C_n^k. Le vom denumi k-forme *bazice*.

Problema 13. Să se demonstreze că orice k-formă pe $\mathbf{R}^n$ se reprezintă unic ca o combinație liniară de forme bazice:

$$\omega^k=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}a_{i_1\ldots i_k}\,x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_k}.$$

Indicație. $a_{i_1\ldots i_k}=\omega^k(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_k})$.

Din rezultatul acestei probleme rezultă că dimensiunea spațiului liniar al k-formelor pe $\mathbf{R}^n$ este C_n^k. În particular, pentru $k = n$, $C_n^k = 1$ și se obține un

Corolar. *Fiecare n formă pe* $\mathbf{R}^n$ *este fie volumul orientat al paralelipipedului pentru o anumită alegere a unității de volum, fie* 0 :

$$\omega^n = a \cdot x_1 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

P r o b l e m a 14. Să se demonstreze că pentru $k > n$, orice k-formă pe $\mathbf{R}^n$ este egală cu zero.

Să trecem acum la produsul exterior al unei k-forme ω^k cu o l-formă ω^l. Pentru început, să considerăm două monoame

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k, \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{k+l},$$

unde $\omega_1, \ldots, \omega_{k+l}$ sînt 1-forme. Definim produsul lor $\omega^k \wedge \omega^l$ ca fiind monomul

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{k+l}) = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \wedge \ldots \wedge \omega_{k+l}.$$

P r o b l e m a 15. Să se demonstreze că produsul exterior al monoamelor este asociativ

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$$

și anticomutativ

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k.$$

I n d i c a ț i e. Pentru a transporta în față fiecare din cei l factori din ω^l sînt necesare k inversări de poziție cu cei k factori din ω^k.

O b s e r v a ț i e. Este util să ținem minte că „anticomutativitatea" înseamnă comutativitate dacă cel puțin unul din gradele k, l este par și anticomutativitate dacă ambele grade k, l sînt impare.

§ 33. PRODUSUL EXTERIOR

În acest paragraf se definește produsul exterior al formelor și se demonstrează că el este anticomutativ, distributiv și asociativ.

A. Definiția produsului exterior. Vom defini acum produsul exterior al unei k-forme arbitrare ω^k cu o l-formă arbitrară ω^l.

Rezultatul $\omega^k \wedge \omega^l$ va fi o $(k+l)$-formă. Operația de înmulțire va fi

1) anticomutativă $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$;
2) distributivă $(\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda_1 \omega_1^k \wedge \omega^l + \lambda_2 \omega_2^k \wedge \omega^l$;
3) asociativă $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$.

D e f i n i ț i e. Se numește *produsul exterior* al k-formei ω^k pe $\mathbf{R}^n$ cu l-forma ω^l pe $\mathbf{R}^n$ $(k+l)$-forma $\omega^k \wedge \omega^l$ pe $\mathbf{R}^n$ a cărei valoare pe $k+l$ vectori arbitrari $\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+l}$ din $\mathbf{R}^n$ este

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \quad (\xi_1, \ldots, \xi_{k+l})$$

$$\sum (-1)^\nu \omega^k(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_l}), \tag{1}$$

unde $i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_l$, $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$ este o permutare a numerelor $(1, 2, \ldots, k+l)$ și

$$\nu = \begin{cases} 1, \text{ dacă această permutare este impară,} \\ 0, \text{ dacă această permutare este pară.} \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, *fiecare partiție a celor $k+l$ vectori $\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}$ în două grupuri (de k și respectiv l vectori) generează unul din termenii sumei* (1). *Acest termen este egal cu produsul dintre valoarea k-formei ω^k pe cei k vectori ai primului grup și valoarea l-formei ω^l pe cei l vectori ai celui de-al doilea grup; acest produs are semnul + sau — în funcție de ordonarea vectorilor în cele două grupuri. Dacă ordonarea este de așa natură încît scrierea consecutivă a celor k vectori din primul grup și celor l vectori din cel de-al doilea conduce la o permutare pară (impară) a vectorilor $\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}$, atunci se ia semnul + (respectiv —).*

E x e m p l u. Dacă $k = 2$, există numai două partiții: ξ_1; ξ_2 și ξ_2; ξ_1. Rezultă $(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\, \omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\, \omega_1(\xi_2)$, în concordanță cu definiția produsului 1-formelor dată la § 32.

P r o b l e m a 1. Să se demonstreze că în definiția dată mai sus se obține într-adevăr o $(k+l)$-formă (cu alte cuvinte, că valoarea $(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \ldots, \xi_{k+l})$ depinde de vectorii $\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}$ multiliniar și antisimetric).

B. Proprietățile produsului exterior.

Teoremă. *Produsul exterior al formelor definit mai sus este anticomutativ, distributiv și asociativ. Pentru monoame el coincide cu produsul definit la* § 32.

Demonstraţia anticomutativităţii se bazează pe proprietăţile elementare ale permutărilor pare şi impare (vezi problema de la sfîrşitul § 32) şi este lăsată pe seama cititorului.

Distributivitatea rezultă din faptul că fiecare termen din (1) depinde liniar de ω^k şi ω^l.

Pentru a demonstra asociativitatea sînt necesare ceva mai multe raţionamente combinatorice; dat fiind însă faptul că aceste raţionamente sînt făcute de obicei în cursurile de algebră, în cadrul demonstraţiei teoremei lui Laplace privitoare la dezvoltarea unui determinant după minori, putem utiliza această teoremă*).

Începem cu următoarea observaţie: *Dacă asociativitatea este demonstrată pentru termeni separaţi, atunci ea este adevărată şi pentru sume; mai precis*

$$\left.\begin{array}{l}(\omega_1'\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1'\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)\\ \text{şi}\quad(\omega_1''\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1''\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)\end{array}\right\}\ \text{implică}$$

$$((\omega_1'+\omega_1'')\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=(\omega_1'+\omega_1'')\wedge(\omega_2\wedge\omega_3).$$

Într-adevăr, dacă utilizăm proprietatea de distributivitate demonstrată mai înainte, avem

$$((\omega_1'+\omega_1'')\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=((\omega_1'\wedge\omega_2)\wedge\omega_3)+((\omega_1''\wedge\omega_2)\wedge\omega_3),$$

$$(\omega_1'+\omega_1'')\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)=(\omega_1'\wedge(\omega_2\wedge\omega_3))+(\omega_1''\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)).$$

Am văzut însă la § 32 (problema 12) că orice formă pe $\mathbf{R}^n$ este sumă de monoame. Rezultă că este suficient să demonstrăm asociativitatea produsului direct de monoame.

Cum nu am arătat încă echivalenţa dintre definiţia produsului a k 1-forme de la § 32 şi definiţia generală (1), vom nota temporar

*) Demonstraţia imediată a asociativităţii (care generalizează şi pe aceea a teoremei lui Laplace) constă în verificarea concordanţei semnelor în identitatea

$$((\omega^k\wedge\omega^l)\wedge\omega^m)(\xi_1,\ldots,\xi_{k+l+m})=\Sigma\pm\,\omega^k(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k})\,\omega^l(\xi_{j_1},\ldots,\xi_{j_l})\,\omega^m(\xi_{h_1},\ldots\xi_{h_m})$$

unde $i_1<\ldots<i_k$, $j_1\ldots<j_l$, $h_1<\ldots<h_m$; $(i_1,\ldots,h_m)$ este o permutare a numerelor $(1,\ldots,k+l+m)$.

produsul exterior a k 1-forme cu simbolul $\overline{\wedge}$, astfel încît monoamele despre care vorbim sînt de forma

$$\omega^k=\omega_1\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_k,\ \omega^l=\omega_{k+1}\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_{k+l},$$

unde $\omega_1,\ldots,\omega_{k+l}$ sînt 1-forme.

Lemă. *Produsul exterior a două monoame este un monom:*

$$(\omega_1\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_k)\wedge(\omega_{k+1}\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_{k+l})=$$

$$=\omega_1\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_k\overline{\wedge}\,\omega_{k+1}\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_{k+l}.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să calculăm valorile membrilor stîng şi drept pe un ansamblu de $k+l$ vectori $\xi_1,\ldots,\xi_{k+l}$. Valoarea membrului drept este aceea a determinantului de ordin $k+l$ $\det(\omega_i(\xi_j))$. Valoarea membrului stîng este, conform formulei (1), o sumă de produse

$$\sum\pm\det_{1\leqslant i\leqslant k}(\omega_i(\xi_{i_m}))\cdot\det_{k+1\leqslant i\leqslant k+l}(\omega_i(\xi_{j_m}))$$

de minorii formaţi din primele k coloane ale determinantului de ordin $k+l$ cu minorii complementari. Teorema lui Laplace de dezvoltare după minorii formaţi din primele k coloane afirmă exact faptul că această sumă, cu aceeaşi regulă de alegere a semnelor ca şi cea din definiţia (1), este egală cu $\det(\omega_i(\xi_j))$. Lema este astfel demonstrată.

Din lemă rezultă că operaţiile $\overline{\wedge}$ şi $\wedge$ coincid. Într-adevăr, obţinem succesiv

$$\omega_1\overline{\wedge}\,\omega_2=\omega_1\wedge\omega_2,$$

$$\omega_1\overline{\wedge}\,\omega_2\overline{\wedge}\,\omega_3=(\omega_1\overline{\wedge}\,\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$\omega_1\overline{\wedge}\,\omega_2\overline{\wedge}\ldots\overline{\wedge}\,\omega_k=(\ldots((\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3)\wedge\ldots\wedge\omega_k).$$

Asociativitatea $\overline{\wedge}$-produsului de k 1-forme fiind evidentă, rezultă şi asociativitatea $\wedge$-produsului de monoame. În acelaşi timp, ţinînd seama de observaţia de mai sus, asociativitatea este demonstrată şi în cazul general.

P r o b l e m a 2. Să se demonstreze că pătratul exterior al unei 1-forme şi, în general, al unei forme de grad impar, este egal cu 0 :

$$\omega^k \wedge \omega^k = 0 \text{ dacă } k \text{ este impar.}$$

E x e m p l u l 1. Să considerăm în $\mathbf{R}^{2n}$ sistemul de coordonate

$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ şi 2-forma $\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$.

(Din punct de vedere geometric, forma ω^2 reprezintă suma ariilor proiecţiilor orientate ale unui paralelogram pe cele n 2-plane de coordonate $(p_1, q_1), \ldots, (p_i, q_i)$. În cele ce urmează vom vedea că 2-forma ω^2 are o importanţă fundamentală pentru mecanica hamiltoniană. Se poate arăta că orice 2-formă nedegenerată*) pe $\mathbf{R}^{2n}$ se scrie ca ω^2 într-un anumit sistem de coordonate $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$).

P r o b l e m a 3. Să se calculeze a doua putere exterioară a 2-formei ω^2.

Răspuns. $\omega^2 \wedge \omega^2 = -\sum_{i>j} p_i \wedge p_j \wedge q_i \wedge q_j$.

P r o b l e m a 4. Să se calculeze puterea exterioară de ordin k a formei ω^2.

Răspuns. $\underbrace{\omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^2}_{k} = \pm k! \sum_{i_1 < \ldots < i_k} p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k} \wedge q_{i_1} \wedge \ldots \wedge q_{i_k}$.

În particular,

$$\underbrace{\omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^2}_{n} = \pm n!\, p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_n,$$

deci coincide, pînă la un factor numeric, cu volumul paralelipipedului $2n$-dimensional din $\mathbf{R}^{2n}$.

E x e m p l u l 2. Să considerăm acum spaţiul euclidian orientat $\mathbf{R}^3$. Fiecărui vector $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^3$ îi asociem 1-forma $\omega^1_{\mathbf{A}}$, punînd

$$\omega^1_{\mathbf{A}}(\xi) = (\mathbf{A}, \xi) \qquad \text{(produsul scalar),}$$

şi 2-forma $\omega^2_{\mathbf{A}}$, punînd

$$\omega^2_{\mathbf{A}}(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{A}, \xi_1, \xi_2) \text{ (produsul mixt).}$$

P r o b l e m a 5. Să se demonstreze că aplicaţia $\mathbf{A} \mapsto \omega^1_{\mathbf{A}}$, respectiv $\mathbf{A} \mapsto \omega^2_{\mathbf{A}}$, defineşte un izomorfism al spaţiului liniar $\mathbf{R}^3$ al vectorilor $\mathbf{A}$ pe spaţiul liniar al 1-formelor pe $\mathbf{R}^3$, respectiv 2-formelor pe $\mathbf{R}^3$. Dacă în $\mathbf{R}^3$ s-a ales un sistem de coordonate ortonormat şi orientat (x_1, x_2, x_3), atunci

$$\omega^1_{\mathbf{A}} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3,$$

$$\omega^2_{\mathbf{A}} = A_1 x_2 \wedge x_3 + A_2 x_3 \wedge x_2 + A_3 x_1 \wedge x_2.$$

---

*) O formă biliniară ω^2 este nedegenerată dacă $\forall \xi \neq 0, \exists \eta : \omega^2(\xi, \eta) \neq 0$.

O b s e r v a ţ i e. După cum se observă, izomorfismele puse în evidenţă mai sus nu depind de alegerea sistemului de coordonate ortonormat şi orientat (x_1, x_2, x_3). Ele depind însă de alegerea structurii euclidiene a lui $\mathbf{R}^3$, iar izomorfismul $\mathbf{A} \mapsto \omega^2_{\mathbf{A}}$ depinde în plus şi de alegerea orientării (care apare implicit în definiţia produsului mixt).

P r o b l e m a 6. Să se demonstreze că prin intermediul izomorfismelor stabilite mai sus, produsul exterior al 1-formelor se transformă în produsul vectorial al vectorilor din $\mathbf{R}^3$, deci că avem

$$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}} = \omega^2_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}, \text{ pentru orice } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^3.$$

Prin urmare, *produsul exterior al formelor poate fi considerat ca generalizarea la cazul dimensiunilor superioare a produsului vectorial din* $\mathbf{R}^3$, cu deosebirea că în cazul cu mai multe dimensiuni, produsul nu mai este un vector al aceluiaşi spaţiu; spaţiul liniar al 2-formelor pe $\mathbf{R}^n$ este izomorf cu $\mathbf{R}^n$ numai pentru $n = 3$.

P r o b l e m a 7. Demonstraţi că prin intermediul izomorfismelor stabilite, produsul exterior al unei 1-forme cu o 2-formă se transformă în produsul scalar al vectorilor din $\mathbf{R}^3$:

$$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^2_{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

C. Comportarea în raport cu aplicaţiile. Fie $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ o aplicaţie liniară şi ω^k o k-formă exterioară pe $\mathbf{R}^n$. Atunci se defineşte o k-formă $f^*\omega^k$ pe $\mathbf{R}^m$, care pe k vectorii $\xi_1, \ldots, \xi_k$ din $\mathbf{R}^m$ ia valoarea pe care o ia ω^k pe imaginile acestor vectori prin f:

$$(f^*\omega^k)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega^k(f(\xi_1), \ldots, f(\xi^k)).$$

P r o b l e m a 8. Să se verifice că $f^*\omega^k$ este o formă exterioară.

P r o b l e m a 9. Să se verifice că f^* este un operator liniar definit pe spaţiul k-formelor pe $\mathbf{R}^n$ cu valori în spaţiul k-formelor pe $\mathbf{R}^n$ (faptul că steluţa este pusă sus subliniază că f^* acţionează în sens contrar lui f).

P r o b l e m a 10. Fie $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ şi $g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ aplicaţii liniare. Să se verifice că $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

P r o b l e m a 11. Să se verifice că f^* conservă produsul exterior

$$f^*(\omega^k \wedge \omega^l) = (f^*\omega^k) \wedge (f^*\omega^l).$$

§ 34. FORME DIFERENŢIALE

În paragraful de faţă se definesc formele diferenţiale pe o varietate diferenţiabilă.

A. 1-forme diferenţiale. Exemplul cel mai simplu de 1-formă diferenţială este diferenţiala unei funcţii.

E x e m p l u . Să considerăm funcţia $y = f(x) = x^2$. Diferenţiala sa $df = 2x\,dx$ depinde de punctul x şi de „creşterea argumentului", deci de vectorul tangent ξ la

axa x. Să fixăm punctul x. Atunci diferențiala funcției f în punctul x și direcția ξ, $\mathrm{d}f\big|_x(\xi)$, depinde liniar de ξ. Astfel, dacă $x=1$ și coordonata vectorului tangent ξ este egală cu 1, atunci $\mathrm{d}f\big|_x(\xi)=2$; dacă coordonata lui ξ este 10, atunci $\mathrm{d}f\big|_x(\xi)=20$ (fig. 140).

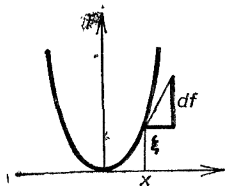


Fig. 140. Diferențiala unei funcții.

Fie $f: M\to \mathbf{R}$ o funcție diferențiabilă, definită pe varietatea M (putem să ne-o reprezentăm ca o „funcție de mai multe variabile" $f: \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$). Diferențiala $\mathrm{d}f\big|_x$ a funcției f în punctul x este o aplicație liniară

$$\mathrm{d}f\big|_x : TM_x \to \mathbf{R}$$

a spațiului tangent în x la M în dreapta reală. Reamintim definiția acestei aplicații.

Fie $\xi\in TM_x$ un vector tangent care este vectorul viteză al curbei $t\mapsto x(t): R\to M$, $x(0)=x$, $\dot{x}(0)=\xi$. Atunci, prin definiție,

$$\mathrm{d}f\Big|_x(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x(t)).$$

P r o b l e m a 1. Fie ξ vectorul viteză al curbei $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ la $t=0$. Să se calculeze valorile diferențialelor $\mathrm{d}x$ și dy ale funcțiilor x și y pe vectorul ξ (fig. 141).

Răspuns. $\mathrm{d}x\big|_{(1,0)}(\xi)=0$, $\mathrm{d}y\big|_{(1,0)}(\xi)=1$.

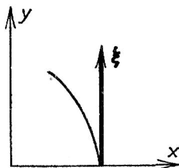


Fig. 141. Problema 1.

Să observăm că diferențiala funcției f în punctul $x\in M$ este o 1-formă $\mathrm{d}f\big|_x$ pe spațiul tangent TM_x.

Diferențiala $\mathrm{d}f$ a funcției f pe varietatea M este o aplicație netedă a fibrării tangente TM în dreapta reală

$$\mathrm{d}f: TM\to \mathbf{R} \quad \Big(TM=\bigcup_{x\in M} TM_x\Big).$$

Această aplicație este liniară pe fiecare spațiu tangent $TM_x\subset TM$ și diferențiabilă.

D e f i n i ț i e. Se numește *formă diferențială de gradul* 1 (sau 1-*formă) pe varietatea* M orice aplicație netedă

$$\omega: TM\to \mathbf{R}$$

a fibrării tangente la varietatea M în dreapta reală, care este liniară pe fiecare spațiu tangent TM_x.

Se poate spune că o 1-*formă diferențială pe* M este o 1-formă *în sens algebric pe* TM_x *care este «diferențiabilă în raport cu* x*».*

P r o b l e m a 2. Să se demonstreze că orice 1-formă diferențială pe dreapta reală este diferențiala unei funcții.

P r o b l e m a 3. Să se găsească pe cerc și pe plan 1-forme care nu sînt diferențiale de funcții.

B. Expresia generală a 1-formelor diferențiale pe $\mathbf{R}^n$. Să presupunem că varietatea M este un spațiu liniar cu coordonatele $x_1,\ldots,x_n$. Reamintim că se numesc componentele $\xi_1,\ldots,\xi_n$ ale vectorului tangent $\xi\in T\mathbf{R}^n_x$ valorile diferențialelor coordonatelor $\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n$ pe vectorul ξ. Cele n 1-forme $\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n$ pe $T\mathbf{R}^n_x$ sînt liniar independente și deci ele formează o bază a spațiului liniar n-dimensional $T\mathbf{R}^n_x$, $x\in \mathbf{R}^n$.

Prin urmare, orice 1-formă pe $T\mathbf{R}^n_x$ se scrie în mod unic ca o combinație liniară $a_1\mathrm{d}x_1+\ldots+a_n\mathrm{d}x_n$, unde a_i sînt coeficienți reali. Fie acum ω o 1-formă diferențială arbitrară pe $\mathbf{R}^n$. În fiecare punct $x\in\mathbf{R}^n$, ea se descompune univoc în baza $\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_n$. Obținem următoarea

Teoremă. *Orice* 1-*formă diferențială* ω *în spațiul* $\mathbf{R}^n$ *în care s-a ales un sistem de coordonate* $x_1,\ldots,x_n$ *se scrie în mod unic sub forma*

$$\omega=a_1(x)\,\mathrm{d}x_1+\ldots+a_n(x)\,\mathrm{d}x_n,$$

coeficienții $a_i=a_i(x)$ *fiind funcții netede.*

P r o b l e m a 4. Să se calculeze valorile luate de 1-formele $\omega_1 = dx_1$, $\omega_2 = x_1 dx_2$ şi $\omega_3 = dr^2$ $(r^2 = x_1^2 + x_2^2)$ pe vectorii ξ_1, ξ_2, ξ_3 (fig. 142).

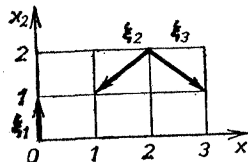


Fig. 142. Problema 4.

Răspuns.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ω_1	0	-1	1
ω_2	0	-2	-2
ω_3	0	-8	0

P r o b l e m a 5. Fie $x_1, \ldots, x_n$ funcţii pe varietatea M şi să presupunem că ele formează un sistem de coordonate într-un anumit domeniu. Să se arate că în acest domeniu fiecare 1-formă diferenţială se reprezintă în acest caz sub forma

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n.$$

C. k-forme diferenţiale.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *k-formă diferenţială* $\omega^k\big|_x$ *în punctul x al varietăţii diferenţiabile M o k-formă exterioară pe spaţiul tangent TM_x la M în x, deci o funcţie k-liniară antisimetrică de k vectori $\xi_1, \ldots, \xi_k$ tangenţi la M în x.*

Dacă se dă o astfel de formă $\omega^k\big|_x$ în fiecare punct x al varietăţii M şi dacă ea este diferenţiabilă în raport cu x, atunci spunem că se dă o *k-formă diferenţială ω^k pe varietatea M.*

P r o b l e m a 6. Să se introducă o structură naturală de varietate diferenţiabilă pe mulţimea ale cărei elemente sînt ansamblurile formate din cîte k vectori tangenţi la M într-un punct oarecare x.

O *k-formă* diferenţială este o aplicaţie netedă a varietăţii astfel obţinute în dreapta reală.

Se poate spune că *o k-formă pe M este o k-formă exterioară pe TM_x, care « depinde diferenţiabil de x ».*

Adunarea, înmulţirea cu un număr şi produsul exterior al formelor diferenţiale pe M sînt operaţii care se definesc punctual : în fiecare punct $x \in M$ trebuie să adunăm, să înmulţim cu un număr sau să efectuăm produsul exterior al formelor multiliniare corespunzătoare pe spaţiul tangent TM_x.

P r o b l e m a 7. Să se demonstreze că mulţimea tuturor k-formelor diferenţiale pe varietatea M este un spaţiu liniar (de dimensiune infinită dacă $k \leqslant \dim M$).

Formele diferenţiale se pot înmulţi natural nu numai cu numere ci şi cu funcţii. Prin urmare, mulţimea k-formelor diferenţiale de clasă C^∞ are o structură naturală de modul peste inelul funcţiilor reale de clasă C^∞ pe M.

D. Expresia generală a k-formelor diferenţiale în $\mathbf{R}^n$. Să presupunem din nou că varietatea M este spaţiul liniar $\mathbf{R}^n$ în care s-a ales un sistem de coordonate format din funcţiile $x_1, \ldots, x_n$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Să fixăm un punct $x \in M$. După cum am văzut mai înainte, cele n 1-forme $dx_1, \ldots, dx_n$ formează o bază în spaţiul 1-formelor pe spaţiul tangent $T\mathbf{R}^n_x$.

Să considerăm produsele exterioare de forme din bază

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k.$$

Am văzut în § 32 că aceste C_n^k k-forme constituie o bază a spaţiului k-formelor exterioare pe $T\mathbf{R}^n_x$. Prin urmare, orice k-formă exterioară pe $T\mathbf{R}^n_x$ se scrie univoc sub forma

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Fie ω^k o k-formă diferenţială arbitrară în spaţiul $\mathbf{R}^n$. În fiecare punct $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ea se exprimă în mod univoc în raport cu baza scrisă mai sus. Rezultă următoarea

Teoremă. *Orice k-formă diferenţială în spaţiul $\mathbf{R}^n$ în care s-a ales un sistem de coordonate $x_1, \ldots, x_n$ se scrie în mod unic sub forma*

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

unde $a_{i_1 \ldots i_k} = a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})$ sînt funcţii netede pe $\mathbf{R}^n$.

Problema 8. Să se calculeze valorile pe care le iau formele $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 = x_1 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_1$ şi $\omega_3 = r\, dr \wedge d\varphi$ (unde $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r \sin\varphi$) pe perechile de vectori (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) şi (ξ_3, η_3) (fig. 143).

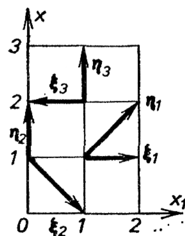


Fig. 143. Problema 8.

Răspuns.

	(ξ_1, η_1)	(ξ_2, η_2)	(ξ_3, η_3)
ω_1	1	1	−1
ω_2	2	1	−3
ω_3	1	1	−1

Problema 9. Să se calculeze valorile pe care le iau formele $\omega_1 = dx_2 \wedge dx_3$, $\omega_2 = x_1 dx_3 \wedge dx_2$ şi $\omega_3 = dx_3 \wedge dr^2$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ pe perechea de vectori $\xi = (1,1,1)$, $\eta = (1, 2, 3)$ tangenţi la $\mathbf{R}^3$ în punctul $x = (2, 0, 0)$.

Răspuns. $\omega_1(\xi, \eta) = 1$, $\omega_2(\xi, \eta) = -2$, $\omega_3(\xi, \eta) = -8$.

Problema 10. Fie $x_1, \dots, x_n : M \to \mathbf{R}$ funcţii netede, definite pe varietatea M, care formează un sistem local de coordonate într-un anumit domeniu. Să se demonstreze că în acest domeniu fiecare k-formă diferenţială se reprezintă univoc sub forma

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Exemplu. Schimbarea de variabile în forme. Să presupunem că în $\mathbf{R}^3$ se dau două sisteme de coordonate: x_1, x_2, x_3 şi y_1, y_2, y_3. Fie ω o 2-formă diferenţială în $\mathbf{R}^3$. Conform ultimei teoreme, în sistemul de coordonate x_1, x_2, x_3, ω se scrie sub forma $\omega = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$, unde X_1, X_2, X_3 sînt funcţii de x_1, x_2, x_3; similar, în coordonatele y_1, y_2, y_3, $\omega = Y_1 dy_1 \wedge dy_2 + Y_2 dy_3 \wedge dy_1 + Y_3 dy_1 \wedge dy_2$, unde Y_1, Y_2, Y_3 sînt funcţii de y_1, y_2, y_3.

Problema 11. Cunoscînd expresia formei ω în coordonatele x_i (deci funcţiile X_i) şi formulele de schimbare de variabilă $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$, să se găsească expresia formei în coordonatele $\mathbf{y}$, deci să se determine funcţiile Y_i.

Rezolvare. Avem $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_i}{\partial y_3} dy_3$.

Rezultă

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_2}{dy_3} \partial y_3\right) \wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3\right), \text{ de unde}$$

$$Y_3 = X_1 \left|\frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_2)}\right| + X_2 \left|\frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_2)}\right| + X_3 \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)}\right|.$$

Fomulele pentru Y_1, Y_2 se obţin la fel.

E. Anexă. Formele diferenţiale în spaţiul tridimensional.

Fie M o varietate riemanniană orientată de dimensiune trei (în toate exemplele care urmează M va fi spaţiul euclidian tridimensional $\mathbf{R}^3$). Fie x_1, x_2, x_3 coordonate locale şi să presupunem că pătratul elementului de lungime (metrica Riemann) are forma

$$ds^2 = E_1\, dx_1^2 + E_2\, dx_2^2 + E_3\, dx_3^2$$

(altfel spus, sistemul de coordonate este triortogonal).

Problema 12. Să se determine E_1, E_2, E_3 în coordonatele carteziene x, y, z, în coordonatele cilindrice r, φ, z şi în coordonatele sferice R, φ, θ în spaţiul euclidian $\mathbf{R}^3$ (fig. 144).

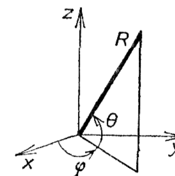


Fig. 144. Problema 12.

Răspuns.

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2 = dR^2 + R^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2 + R^2\, d\theta^2.$

Să notăm cu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ versorii axelor de coordonate. Aceşti trei vectori formează o bază în spaţiul tangent.

Problema 13. Să se determine ce valori iau formele dx_1, dx_2 dx_3 pe vectorii $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Răspuns. $dx_i(\mathbf{e}_j) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}\delta_{ij}$. În particular, în coordonatele carteziene

$dx(\mathbf{e}_x) = dy(\mathbf{e}_y) = dz(\mathbf{e}_z) = 1$;

în coordonatele cilindrice

$dr(\mathbf{e}_r) = dz(\mathbf{e}_z) = 1, \quad d\varphi(\mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{r}$; (fig. 145);

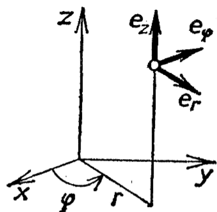


Fig. 145. Problema 13.

în coordonatele sferice

$dR(\mathbf{e}_R) = 1, \; d\varphi(\mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{R\cos\theta}, \quad d\theta(\mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{R}$.

Metrica şi orientarea varietăţii M înzestrează spaţiul tangent în fiecare punct la M cu o structură de spaţiu euclidian tridimensional orientat. În raport cu această structură vom vorbi de produsul scalar, cel vectorial şi cel mixt.

Problema 14. Să se calculeze $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta)$ şi $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
Răspuns. $\mathbf{e}_3$, 0, 1.

În spaţiul euclidian tridimensional orientat $\mathbf{R}^3$, fiecărui vector $\mathbf{A}$ îi corespunde 1-forma $\omega^1_\mathbf{A}$ şi 2-forma $\omega^2_\mathbf{A}$, definite de relaţiile

$$\omega^1_\mathbf{A}(\xi) = (\mathbf{A}, \xi), \; \omega^2_\mathbf{A}(\xi, \eta) = (\mathbf{A}, \xi, \eta), \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbf{R}^3.$$

Această corespondenţă între cîmpurile de vectori şi formele diferenţiale nu depinde de sistemele de coordonate, ci numai de structura euclidiană şi de orientare. Prin urmare, pe varietatea considerată M, fiecărui cîmp de vectori $\mathbf{A}$ îi corespunde o 1-formă diferenţială $\omega^1_\mathbf{A}$ pe M şi o 2-formă diferenţială $\omega^2_\mathbf{A}$ pe M.

Formulele de trecere de la cîmpurile de vectori la formele diferenţiale şi invers au o formă specifică fiecărui sistem de coordonate. Să presupunem că în coordonatele x_1, x_2, x_3 descrise mai sus, cîmpul de vectori $\mathbf{A}$ are forma

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$$

(componentele A_i sînt funcţii netede pe varietatea M). 1-forma diferenţială corespunzătoare $\omega^1_\mathbf{A}$ (respectiv 2-forma $\omega^2_\mathbf{A}$) se exprimă în baza dx_i (respectiv în baza $dx_i \wedge dy_i$).

Problema 15. Cunoscînd componentele A_i ale cîmpului $\mathbf{A}$ să se determine descompunerea formelor $\omega^1_\mathbf{A}$ şi $\omega^2_\mathbf{A}$ în bazele respective.

Rezolvare. Avem $\omega^1_\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_1) = A_1$. În acelaşi timp, $(a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3)(\mathbf{e}_1) = a_1dx_1(\mathbf{e}_1) = a_1/\sqrt{E_1}$. Obţinem $a_1 = A_1\sqrt{E_1}$ şi deci

$$\omega^1_\mathbf{A} = A_1\sqrt{E_1}\,dx_1 + A_2\sqrt{E_2}\,dx_2 + A_3\sqrt{E_3}\,dx_3.$$

Analog, $\omega^2_\mathbf{A}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (A, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = A_1$. În acelaşi timp, $(\alpha_1dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2dx_3 \wedge dx_1 +$

$$+ \alpha_3\,dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \alpha_1\frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}.$$

Obţinem $\alpha_1 = A_1\sqrt{E_2E_3}$ şi deci

$$\omega^2_\mathbf{A} = A_1\sqrt{E_2E_3}\,dx_2 \wedge dx_3 + A_2\sqrt{E_3E_1}\,dx_3 \wedge dx_1 + A_3\sqrt{E_1E_2}\,dx_1 \wedge dx_2.$$

În particular, în coordonatele carteziene, cilindrice şi sferice în $\mathbf{R}^3$, cîmpului de vectori

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z = A_r\mathbf{e}_r + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi + A_z\mathbf{e}_z = A_R\mathbf{e}_R + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi + A_\theta\mathbf{e}_\theta$$

îi corespund 1-forma

$$\omega^1_\mathbf{A} = A_xdx + A_ydy + A_zdz = A_rdr + r\,A_\varphi\,d\varphi + A_zdz = A_R\,dR + R\cos\theta\cdot A_\varphi d\varphi + $$
$$+ RA_\theta\,d\theta$$

şi 2-forma

$$\omega^1_\mathbf{A} = A_xdy \wedge dz + A_ydz \wedge dx + A_z\,dx \wedge dy = r\,A_r\,d\varphi \wedge dz + A_\varphi\,dz \wedge dr + r\,A_z\,dr \wedge d\varphi =$$

$$= R^2\cos\theta\,A_rd_\varphi \wedge d\theta + RA_\varphi\,d\theta \wedge dR + R\cos\theta\cdot A_\theta\,dR \wedge d_\varphi.$$

Un exemplu de cîmp de vectori pe varietatea M este *gradientul* unei funcţii netede $f: M \to \mathbf{R}$. Reamintesc că se numeşte gradientul funcţiei f cîmpul de vectori **grad** f corespunzător diferenţialei funcţiei f:

$$\omega^1_{\mathbf{grad} f} = \mathrm{d}f, \text{ deci } \mathrm{d}f(\xi) = (\mathbf{grad}\ f, \xi), \quad \forall \xi.$$

Problema 16. Să se determine componentele gradientului unei funcţii f în baza $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Rezolvare. Avem $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3$.

Conform problemei precedente

$$\mathbf{grad}\ f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{e}_3.$$

În particular, în coordonatele carteziene, cilindrice şi sferice avem

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta.$$

§ 35. INTEGRAREA FORMELOR DIFERENŢIALE

Se definesc aici noţiunile de lanţ, de frontieră a unui lanţ şi de integrală a unei forme diferenţiale pe un lanţ.

Integrala unei forme diferenţiale pe un lanţ este o generalizare multidimensională a unor noţiuni ca fluxul unui fluid printr-o suprafaţă sau lucrul mecanic efectuat de o forţă de-a lungul unui drum.

A. Integrala unei 1-forme pe un drum. Să începem cu integrarea 1-formelor ω^1 definite pe o varietate M. Fie $\gamma: [0 \leqslant t \leqslant 1] \to M$ o aplicaţie diferenţiabilă („drumul de integrare"). Integrala 1-formei ω^1 pe drumul γ se defineşte ca o limită de sume integrale.

Fiecare sumă integrală este formată din valorile formei ω^1 pe vectorii tangenţi ξ_i (fig. 146):

$$\int_\gamma \omega^1 = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega^1(\xi_i).$$

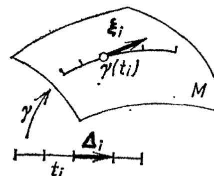


Fig. 146. Integrarea unei 1-forme pe un drum.

Vectorii tangenţi ξ_i se construiesc în modul următor. Segmentul $0 \leqslant t \leqslant 1$ se divide prin intermediul punctelor t_i în partiţiile Δ_i: $: t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Segmentul Δ_i poate fi interpretat ca un vector tangent $\mathbf{\Delta}_i$ la dreapta reală t în punctul t_i. Imaginea acestui vector în spaţiul tangent la M în punctul $\gamma(t_i)$ este, prin definiţie, vectorul

$$\xi_i = \mathrm{d}\gamma \Big|_{t_i} (\mathbf{\Delta}_i) \in TM_{\gamma(t_i)}.$$

Atunci cînd lungimea maximă Δ a intervalelor Δ_i tinde către zero, sumele integrale au o limită unică, care se numeşte integrala 1-formei ω^1 pe drumul γ.

Ideea definiţiei integralei unei k-forme diferenţiale pe o suprafaţă k-dimensională este similară. Suprafaţa pe care se efectuează integrarea se divide în mici paralelipipede curbilinii k-dimensionale (fig. 147); aceste paralelipipede se înlocuiesc prin paralelipi-

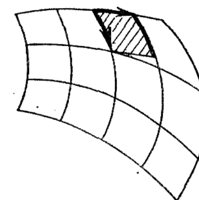


Fig. 147. Integrarea unei 2-forme pe o suprafaţă.

pede în spaţiile tangente şi suma valorilor formei pe aceste paralelipipede din spaţiile tangente tinde către integrala formei atunci cînd partiţia devine din ce în ce mai fină. Pentru început, să considerăm un caz particular.

B. Integrarea unei k-forme în spaţiul euclidian k-dimensional orientat $\mathbf{R}^k$. Fie $x_1,\ldots,x_k$ unul din sistemele de coordonate în $\mathbf{R}^k$ care furnizează orientarea considerată. În aceste condiţii orice k-formă diferenţială este proporţională cu forma $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$, deci se scrie ca $\omega^k=\varphi(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$, unde $\varphi=\varphi(x)$ este o funcţie netedă.

Fie D un poliedru mărginit şi convex în $\mathbf{R}^k$ (fig. 148). Prin definiţie se numeşte *integrala formei ω^k pe poliedrul D* integrala funcţiei φ :

$$\int_D \omega^k=\int_D \varphi(x)\,dx_1\ldots dx_k,$$

unde integrala din dreapta este considerată ca limita sumelor integrale riemanniene obişnuite.

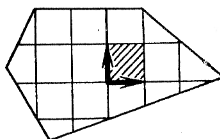


Fig. 148. Integrarea unei k-forme într-un spaţiu de dimensiune k.

O astfel de definiţie reprezintă o realizare a ideii expuse mai sus, deoarece, în cazul pe care l-am considerat, spaţiul tangent la varietatea $\mathbf{R}^k$ se identifică cu $\mathbf{R}^k$.

Problema 1. Să se demonstreze că integrala $\int_D \omega^k$ depinde liniar de ω^k.

Problema 2. Să se demonstreze că dacă se face o partiţie a poliedrului D în două poliedre convexe D_1 şi D_2, $\int_D \omega^k=\int_{D_1}\omega^k+\int_{D_2}\omega^k$.

În cazul general (al unei k-forme diferenţiale în spaţiul de dimensiune n) identificarea elementelor partiţiei cu paralelipipede

din spaţiile tangente nu mai este atît de simplă ; în cele ce urmează, reducem acest caz la cel pe care l-am considerat mai înainte.

C. Comportarea formelor diferenţiale în raport cu aplicaţiile diferenţiabile. Fie $f: M\to N$ o aplicaţie diferenţiabilă a varietăţii netede M în varietatea netedă N şi ω o k-formă diferenţială pe N (fig. 149).

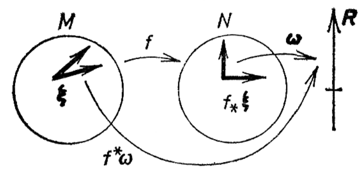


Fig. 149. O formă pe N induce o formă pe M.

În aceste condiţii şi pe M apare o formă k-diferenţială bine determinată ; ea se notează cu $f^*\omega$ şi este definită prin relaţia

$$(f^*\omega)\,(\xi_1,\ldots,\xi_k)=\omega\,(f_*(\xi_1),\ldots,f_*(\xi_k)),$$

pentru orice vectori tangenţi $\xi_1,\ldots,\xi_k\in TM_x$; aici f_* este diferenţiala $f_*\big|_x$ a aplicaţiei f în punctul $x\in M$.

Cu alte cuvinte, *valoarea formei $f^*\omega$ pe vectorii $\xi_1,\ldots,\xi_k$ este egală cu valoarea formei ω pe imaginile acestor vectori prin diferenţiala lui f.*

Exemplu. Dacă $y=f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ şi $\omega=dy$, atunci

$$f^*\omega=2x_1dx_1+2x_2dx_2.$$

Problema 3. Să se demonstreze că $f^*\omega$ este o k-formă pe M.

Problema 4. Să se demonstreze că aplicaţia f^* conservă operaţiile care se pot efectua cu formele diferenţiale:

$$f^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1 f^*(\omega_1)+\lambda_2 f^*(\omega_2),\quad f^*(\omega_1\wedge\omega_2)=(f^*\omega_1)\wedge(f^*\omega_2).$$

Problema 5. Fie $g: L\to M$ o aplicaţie diferenţiabilă. Să se demonstreze că $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$.

Problema 6. Fie D_1 şi D_2 două poliedre compacte şi convexe în spaţiul orientat k-dimensional $\mathbf{R}^k$ şi $f: D_1\to D_2$ o aplicaţie diferenţiabilă care realizează un

difeomorfism *) al interiorului lui D_1 pe interiorul lui D_2 care conservă orientarea. Atunci, pentru orice k-formă ω^k definită pe D_2

$$\int_{D_1} f^*\omega^k = \int_{D_2} \omega^k.$$

I n d i c a ţ i e. Această afirmaţie se reduce la teorema de schimbare a variabilelor în integralele multiple:

$$\int_{D_1} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)} \varphi(\mathbf{y}(\mathbf{x}))\, dx_1, \ldots, dx_k = \int_{D_2} \varphi(\mathbf{y})\, dy_1 \ldots dy_k.$$

D. Integrarea unei k-forme diferenţiale pe o varietate de dimensiune n. Fie ω o k-formă diferenţială definită pe varietatea M de dimensiune n.

Fie D un poliedru mărginit, convex şi de dimensiune k în spaţiul euclidian k-dimensional $\mathbf{R}^k$ (fig. 150).

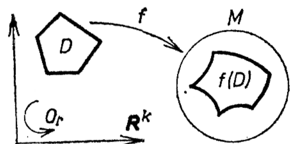


Fig. 150. Poliedru singular k-dimensional.

Rolul „drumului de integrare" va fi jucat de un *element k-dimensional*** *σ în M;* un astfel de element este definit de un triplet $\sigma = (D, f, \text{Or})$ unde:

1) D este un poliedru convex, $D \subset \mathbf{R}^k$;
2) f este o aplicaţie diferenţiabilă $f: D \to M$;
3) Or este o orientare pe $\mathbf{R}^k$.

*) Deci o aplicaţie bijectivă şi cu inversa diferenţiabilă.

**) Denumirea de element k-dimensional σ este aici utilizată din comoditate în locul denumirii uzuale de *poliedru singular k-dimensional*.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *integrala k-formei ω pe elementul k-dimensional* σ integrala formei corespunzătoare indusă pe poliedrul D:

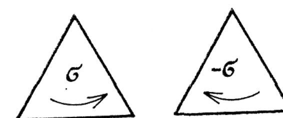
$$\int_\sigma \omega = \int_D f^*\omega.$$

P r o b l e m a 7. Să se arate că integrala depinde liniar de formă

$$\int_\sigma (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int_\sigma \omega_1 + \lambda_2 \int_\sigma \omega_2.$$

Elementul k-dimensional care diferă de σ numai prin cealaltă alegere a orientării lui $\mathbf{R}^k$, — Or, se numeşte opusul lui σ şi se notează cu $-\sigma$ sau $-1 \cdot \sigma$ (fig. 151).

Fig. 151. Problema 8.



P r o b l e m a 8. Să se arate că la schimbarea orientării integrala îşi schimbă semnul:

$$\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega.$$

E. Lanţuri. Mulţimea $f(D)$ nu este neapărat o subvarietate netedă a lui M. Ea poate avea „autointersecţii", diferite „pliuri" şi se poate chiar reduce la un punct. Este însă clar, încă pe cazul unidimensional, că este incomod să ne restrîngem la contururi de integrare formate numai dintr-un singur element: sînt utile şi contururile formate din mai multe elemente, care pot fi parcurse într-un sens sau altul de mai multe ori. În mai multe dimensiuni există obiecte similare care se numesc *lanţuri*.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *lanţ k-dimensional* în varietatea M un ansamblu finit de elemente k-dimensionale orientate $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$

în M şi de numere întregi $m_1, \ldots, m_r$, numite *multiplicităţi* (multiplicităţile pot fi pozitive, negative sau nule). Un lanţ se notează cu

$$c^k = m_1 \sigma_1 + \ldots + m_r \sigma_r.$$

Această notaţie impune în mod natural următoarele identificări:

$$m_1\sigma + m_2\sigma = (m_1 + m_2)\sigma$$

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 = m_2\sigma_2 + m_1\sigma_1, \qquad 0 \cdot \sigma = 0, \quad c^k + 0 = c^k.$$

Problema 9. Să se arate că mulţimea tuturor lanţurilor k-dimensionale din varietatea M devine un grup comutativ dacă se defineşte adunarea lanţurilor prin formula:

$$(m_1\sigma_1 + \ldots + m_r\sigma_r) + (m_1'\sigma_1' + \ldots + m_q'\sigma_q') = m_1\sigma_1 + \ldots + m_r\sigma_r + m_1'\sigma_1' + \ldots + m_q'\sigma_q'.$$

F. Exemplu. Frontiera unui poliedru. Fie D un poliedru convex orientat k-dimensional în spaţiul euclidian k-dimensional $\mathbf{R}^k$. Se numeşte *frontiera (bordul)* lui D lanţul $(k-1)$-dimensional ∂D în $\mathbf{R}^k$, definit în modul următor (fig. 152).

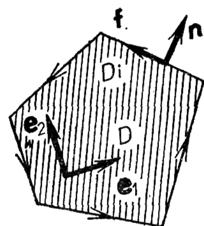


Fig 152. Orientarea frontierei.

Elementele σ_i ale lanţului ∂D sînt feţele D_i de dimensiune $k-1$ ale lui D, împreună cu aplicaţiile $g_i : D_i \to \mathbf{R}^k$ de scufundare ale acestor feţe în $\mathbf{R}^k$ şi cu orientările Or_i definite mai jos; multiplicitatea fiecărei feţe este 1:

$$D = \sum \sigma_i, \qquad \sigma_i = (D_i, g_i, \mathrm{Or}_i).$$

Regula de orientare a feţelor. Fie $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ un reper care defineşte orientarea lui $\mathbf{R}^k$. Fie D_i una din feţele lui D. Alegem un punct în interiorul lui D_i şi construim în el vectorul $\mathbf{n}$ al normalei exterioare la poliedrul D. *Reperul care orientează faţa D_i este orice reper $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k-1}$ în D_i, pentru care orientarea lui $\mathbf{R}^k$ dată de reperul $(\mathbf{n}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k-1})$ coincide cu cea iniţială, dată de reperul $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$.*

Frontiera (bordul) unui lanţ se defineşte similar. Fie $\sigma = (D, f, \mathrm{Or})$ un element k-dimensional în varietatea M. Frontiera sa $\partial\sigma$ este, prin definiţie, $(k-1)$-lanţul $\partial\sigma = \Sigma\, \sigma_i$, format din elementele $\sigma_i = (D_i, f_i, \mathrm{Or}_i)$ unde D_i sînt feţele de dimensiune $k-1$ ale lui D, Or_i sînt orientările alese prin regula de mai sus şi f_i sînt restricţiile aplicaţiei $f : D \to M$ la feţele D_i.

Se numeşte *frontiera lanţului k-dimensional c^k în M* lanţul ∂c^k care este suma frontierelor elementelor lanţului c^k cu multiplicităţile lor (fig. 153):

$$\partial c^k = \partial(m_1\sigma_1 + \ldots + m_r\sigma_r) = m_1\,\partial\sigma_1 + \ldots + m_r\,\partial\sigma_r.$$

Evident, ∂c^k este un $(k-1)$-lanţ în M*).

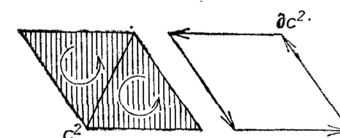


Fig. 153. Frontiera unui lanţ.

Problema 10. Să se demonstreze că frontiera frontierei oricărui lanţ este egală cu zero: $\partial\partial c^k = 0$, $\forall c^k$.

Indicaţie. Operatorul ∂ fiind liniar, este suficient să se arate că $\partial D = 0$ pentru orice poliedru convex D. Rămîne să verificăm că orice faţă de dimensiune k-2 a lui D apare de două ori şi cu semne diferite în lanţul ∂D. Este suficient să se verifice acest lucru pentru $k = 2$ (secţiunile plane).

G. Integrala unei forme pe un lanţ. Fie ω^k o k-formă diferenţială pe varietatea M şi c^k un k-lanţ în M, $c^k = \Sigma\, m_i \sigma_i$. Se

*) Se presupune că k este mai mare ca 1. Lanţurile de dimensiune 1 se includ în schema generală dacă se introduce următoarea definiţie: un lanţ de dimensiune 0 este format dintr-o familie de puncte cu multiplicităţi; frontiera unui segment de dreaptă orientat $\overrightarrow{AB}$ este $B - A$ (punctul B are multiplicitatea 1 şi punctul A — multiplicitatea -1); frontiera unui punct este vidă.

numeşte *integrala formei* ω^k *pe lanţul* c^k suma integralelor lui ω^k pe elementele σ_i, considerînd şi multiplicităţile :

$$\int_{c^k} \omega^k = \Sigma\ m_i \int_{\sigma_i} \omega^k.$$

Problema 11. Să se arate că integrala depinde liniar de formă :

$$\int_{c^k} (\omega_1^k + \omega_2^k) = \int_{c^k} \omega_1^k + \int_{c^k} \omega_2^k.$$

Problema 12. Să se arate că integrarea unei forme fixate ω^k pe lanţurile c^k defineşte un omomorfism al grupului k-lanţurilor în dreapta reală.

Exemplul 1. Fie M planul (p, q), forma $\omega^1 = p\ dq$ şi lanţul c^1 format dintr-un singur element σ_1 cu multiplicitatea 1 :

$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \xrightarrow{f} (p = \cos t,\ q = \sin t).$$

Atunci

$$\int_{c^1} p\ dq = \pi.$$

În general, dacă lanţul c^1 este frontiera unui domeniu G (fig. 154), atunci integrala $\int_{c^1} p\ dq$ este egală cu aria lui G cu semnul $+$ sau $-$ în funcţie de orientarea perechii de vectori *(normala exterioară, vectorul care orientează frontiera)* : dacă ea coincide cu orientarea dată de perechea bazică *(versorul axei p, versorul axei q)* se ia semnul $+$, dacă nu — semnul $-$.

Exemplul 2. Fie M spaţiul euclidian tridimensional orientat $\mathbf{R}^3$. Atunci orice 1-formă ω^1 pe M corespunde unui cîmp de vectori $\mathbf{A}$ $(\omega^1 = \omega_{\mathbf{A}}^1)$, unde

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \Big|_{\mathbf{x}} (\xi) = (\mathbf{A}(\mathbf{x}), \xi),\ \forall \xi \in TM_{\mathbf{x}},\ \mathbf{x} \in M.$$

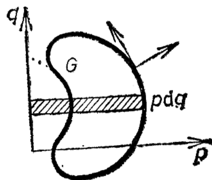


Fig. 154. Integrala formei $p dq$ pe frontiera unui domeniu este egală cu aria domeniului.

Integrala formei $\omega_{\mathbf{A}}^1$ pe un lanţ c^1 care reprezintă o curbă orientată l se numeşte *circulaţia cîmpului* $\mathbf{A}$ *pe curba* l :

$$\int_{c^1} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_l (\mathbf{A}, d\mathbf{l}).$$

Oricărei 2-forme pe M îi corespunde un cîmp de vectori $\mathbf{A}$ $(\omega^2 = \omega_{\mathbf{A}}^2$, unde $\omega_{\mathbf{A}}^2(\xi, \eta) = (\mathbf{A}, \xi, \eta))$.

Integrala 2-formei $\omega_{\mathbf{A}}^2$ pe un 2-lanţ c^2 care reprezintă o suprafaţă S orientată se numeşte *fluxul cîmpului* $\mathbf{A}$ *prin suprafaţa* S :

$$\int_{c^2} \omega_{\mathbf{A}}^2 = \int_S (\mathbf{A}, d\mathbf{n}).$$

Problema 13. Să se determine fluxul cîmpului $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_R}{R^2}$ prin suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientată de vectorii $\mathbf{e}_x$ şi $\mathbf{e}_y$ în punctul $z = 1$. Să se determine fluxul cîmpului $\mathbf{A}$ prin suprafaţa elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientată la fel.

Indicaţie. Vezi p. 247.

Problema 14. Fie dat un 2-lanţ c^2 care reprezintă o suprafaţă orientată de dimensiune 2 cu bordul l în spaţiul de dimensiune $2n$, $\mathbf{R}^{2n} = (p_1, \ldots, p_n,\ q_1, \ldots, q_n)$. Să se calculeze

$$\int_{c^2} (dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n) \ \text{ şi } \int_{l = \partial c^2} (p_1\ dq_1 + \ldots + p_n\ dq_n).$$

Răspuns. Suma ariilor orientate ale proiecţiilor lui S pe 2-planele de coordonate (p_i, q_i), $1 \leqslant i \leqslant n$.

§36. DIFERENŢIEREA EXTERIOARĂ

În acest paragraf se defineşte diferenţierea exterioară a k-formelor şi se demonstrează formula lui Stokes : integrala diferenţialei exterioare a unei forme pe un lanţ este egală cu integrala formei pe frontiera lanţului.

A. Un exemplu : divergenţa unui cîmp de vectori. Diferenţiala exterioară a unei k-forme ω definite pe varietatea M este o $(k+1)$-

formă $d\omega$ pe aceeaşi varietate. Trecerea de la o formă la diferenţiala ei exterioară este similară cu trecerea de la o funcţie la diferenţiala ei sau de la un cîmp de vectori la divergenţa lui. Amintesc definiţia divergenţei.

Fie un cîmp de vectori **A** în spaţiul euclidian tridimensional orientat $\mathbf{R}^3$ şi S frontiera paralelipipedului cu laturile ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 concurente în vîrful $\mathbf{x}$: $S = \partial \,\Pi$ (fig. 155). Să considerăm fluxul cîmpului **A** prin suprafaţa S („spre exterior")

$$F(\Pi) = \int_S (\mathbf{A}, \, d\mathbf{n}).$$

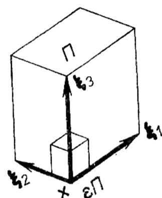


Fig. 155. Definirea divergenţei unui cîmp de vectori.

Dacă paralelipipedul Π este foarte mic, fluxul $F(\Pi)$ este proporţional cu produsul dintre volumul paralelipipedului, $V_\Pi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, şi „densitatea surselor" în punctul **x**. Cu alte cuvinte, există limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon \Pi)}{\varepsilon^3 V_\Pi},$$

unde $\varepsilon \Pi$ este paralelipipedul cu laturile $\varepsilon\,\xi_1$, $\varepsilon\,\xi_2$, $\varepsilon\,\xi_3$. Această limită nu depinde de alegerea paralelipipedului Π, ci numai de punctul **x** şi se numeşte divergenţa cîmpului **A** în punctul **x**, (div **A**)(**x**).

Pentru a trece în spaţiul $\mathbf{R}^n$, $n > 3$, să remarcăm că „fluxul lui **A** printr-un element de suprafaţă" este 2-forma diferenţială

pe care am notat-o cu $\omega^2_{\mathbf{A}}$. Divergenţa este densitatea care apare în scrierea în coordonate a 3-formei :

$$\omega^3 = \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$\omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot (V_\Pi = (\xi_1, \xi_1, \xi_3)),$$

care caracterizează „sursele din paralelipipedul elementar".

Diferenţiala exterioară $d\omega^k$ a k-formei diferenţiale ω^k pe varietatea de dimensiune nM se defineşte ca fiind termenul multiliniar principal al integralei lui ω^k pe frontiera unui paralelipiped de dimensiune $k+1$.

B. Definiţia diferenţialei exterioare. Să definim valoarea formei $d\omega^k$ pe un ansamblu de $k+1$ vectori $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1} \in TM_x$, tangenţi la varietatea M în punctul x. Pentru aceasta, să considerăm un sistem oarecare de coordonate în vecinătatea punctului x în M, deci un difeomorfism f al unei vecinătăţi a punctului **0** din spaţiul euclidian $\mathbf{R}^n$ pe o vecinătate a lui x în M (fig. 156).

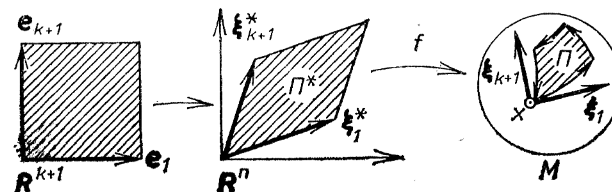


Fig. 156. Paralelipiped curbiliniu Π.

Imaginile reciproce ale vectorilor $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1} \in TM_x$ prin diferenţiala $f_*\big|_0$ sînt vectori tangenţi în **0** la $\mathbf{R}^n$. Spaţiul tangent $T\mathbf{R}^n_0$ se identifică cu $\mathbf{R}^n$ şi deci putem considera că $\xi^*_i = \left(f_*\big|_0\right)^{-1}(\xi_i) \in \mathbf{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Construim cu aceşti vectori $\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{k+1}$, un paralelipiped Π^* (riguros vorbind, ar trebui să considerăm cubul standard orientat în $\mathbf{R}^{k+1}$ şi o aplicaţie liniară a acestui cub pe Π^*, care să trans-

forme laturile $e_1, \ldots, e_{k+1}$ în $\xi_1^*, \ldots, \xi_{k+1}^*$, ca un element $(k+1)$-dimensional în $\mathbf{R}^n$).

Aplicaţia f transformă paralelipipedul Π^* într-un element $(k+1)$-dimensional Π în M („un paralelipiped curbiliniu"). Frontiera elementului Π este un lanţ $\partial\Pi$ de dimensiune k. Să considerăm integrala formei ω^k pe frontiera $\partial\Pi$ a paralelipipedului Π:

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial\Pi} \omega^k.$$

Exemplu. Vom denumi 0-formă pe M orice funcţie diferenţiabilă $\varphi: M \to \mathbf{R}$. Integrala 0-formei φ pe 0-lanţul $c^0 = \sum m_i x_i$, unde $m_i \in \mathbf{Z}$ şi $x_i \in M$ este, prin definiţie:

$$\int_{c^0} \varphi = \sum m_i \varphi(x_i).$$

Atunci construcţia precedentă dă creşterea $F(\xi_1) = \varphi(x_1) - \varphi(x)$ (fig. 157) a funcţiei φ, iar partea principală liniară a lui $F(\xi_1)$ în 0 este pur şi simplu diferenţiala funcţiei φ (în punctul x).

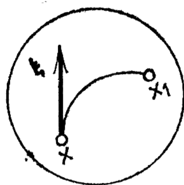


Fig. 157. Integrala pe frontiera unui paralelipiped 1-dimensional este egală cu creşterea funcţiei.

Problema 1. Demonstraţi că funcţia $F(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$ este antisimetrică în $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}$.

Se dovedeşte că partea principală $(k+1)$-liniară a „creşterii" $F(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$ este o formă exterioară de grad $k+1$ pe spaţiul tangent TM_x la M în x. Această formă nu depinde de alegerea sistemului de coordonate cu ajutorul căruia am construi paralelipipedul curbiliniu Π. Ea se numeşte *diferenţiala exterioară* a formei ω^k (în punctul x) şi se notează cu $d\omega^k\big|_x$.

C. Teorema de existenţă şi unicitate a diferenţialei exterioare.

Teoremă. *Pe TM_x există o formă unică Ω de grad $k+1$ care este partea principală în 0 $(k+1)$-liniară a integralei formei ω^k pe frontiera paralelipipedului, $F(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$:*

$$F(\varepsilon\xi_1, \ldots, \varepsilon\xi_{k+1}) = \varepsilon^{k+1}\,\Omega(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1})(\varepsilon \to 0). \quad (1)$$

Forma Ω nu depinde de alegerea sistemului de coordonate care intervine în definiţia lui F.

Dacă în coordonate locale pe M, $x_1, \ldots, x_n$, forma ω^k se scrie ca

$$\omega^k = \sum a_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

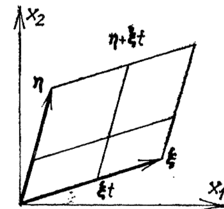
atunci forma Ω se scrie astfel

$$\Omega = d\,\omega^k = \sum da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \quad (2)$$

Voi demonstra această teoremă numai în cazul 1-formei $\omega^1 = a(x_1, x_2)\, dx_1$ în planul (x_1, x_2). În cazul general demonstraţia este complet analoagă, dar calculele sînt ceva mai lungi.

Să determinăm valoarea lui F, deci a integralei formei ω^1 pe frontiera paralelogramului Π cu laturile ξ, η şi un vîrf în 0 (fig. 158). Lanţul $\partial\Pi$ este definit de aplicaţii ale segmentului

Fig. 158. Cu privire la teorema relativă la derivarea exterioară.



$0 \leqslant t \leqslant 1$ în plan: $t \mapsto t\xi$, $t \mapsto \xi + t\eta$, $t \mapsto t\eta$, $t \mapsto \eta + t\xi$, cu multiplicităţile 1, 1, -1 şi -1 respectiv. Prin urmare:

$$\int_{\partial\Pi} \omega^1 = \int_0^1 ([a(t\xi) - a(t\xi + \eta)]\,\xi_1 - [a(t\eta) - a(t\eta + \xi)]\,\eta_1)\, dt, \text{ unde}$$

$\xi_1 = dx_1(\xi)$, $\eta_1 = dx_1(\eta)$, $\xi_2 = dx_2(\xi)$, $\eta_2 = dx_2(\eta)$ sînt componentele vectorilor ξ şi η. Avem :

$$a(t\,\xi + \eta) - a(t\,\xi) = \frac{\partial a}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\eta_2 + O(\xi^2, \eta^2)$$

(derivatele se iau în $x_1 = x_2 = 0$). Similar,

$$a(t\,\eta + \xi) - a(t\,\eta) = \frac{\partial a}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\xi_2 + O(\xi^2, \eta^2).$$

Introducînd aceste expresii în integrală, obţinem

$$F(\xi, \eta) = \int_{\partial\Pi} \omega^1 = \frac{\partial a}{\partial x_2}(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2) + o(\xi^2, \eta^2).$$

Partea principală biliniară a lui F este, aşa cum am afirmat în (1), valoarea unei 2-forme diferenţiale

$$\Omega = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1$$

pe perechea de vectori ξ, η. Formula obţinută este dată de expresia (2); într-adevăr,

$$da \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 = \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1.$$

În sfîrşit, dacă înlocuim sistemul de coordonate x_1, x_2 cu un altul (fig. 159), atunci paralelogramul Π se înlocuieşte cu un paralelo-

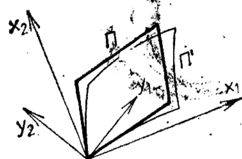


Fig. 159. Independenţa derivatei exterioare de sistemul de coordonate.

gram curbiliniu Π' apropiat de Π şi deci diferenţa dintre integrale $\int_{\partial\Pi}\omega^1 - \int_{\partial\Pi'}\omega^1$ este o mărime mică, de ordin mai mare ca doi (verificaţi !) c.c.t.d.

Problema 2. Să se demonstreze teorema în cazul general.

Problema 3. Să se demonstreze formulele de diferenţiere exterioară a sumei şi produsului exterior de forme :

$$d(\omega_1^k + \omega_2^k) = d\omega_1^k + d\omega_2^k,$$

$$d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l.$$

Problema 4. Să se demonstreze că diferenţiala unei diferenţiale este zero : $dd = 0$.

Problema 5. Fie $f: M \to N$ o aplicaţie netedă şi ω o k-formă pe N. Să se demonstreze că $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

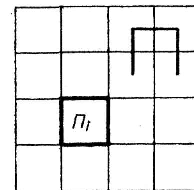
D. Formula lui Stokes. Unul din cele mai importante corolare ale teoremei de existenţă şi unicitate a diferenţialei exterioare este formula Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradski-Stokes-Poincaré :

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega, \tag{3}$$

unde c este un $(k+1)$-lanţ arbitrar pe varietatea M şi ω este o k-formă diferenţială arbitrară pe M.

Este suficient să demonstrăm această teoremă în cazul în care lanţul este format dintr-un singur element σ. Pentru început, presupunem că acest element σ este dat de paralelipipedul orientat $\Pi \subset \mathbf{R}^{k+1}$ (fig. 160).

Fig. 160. Demonstraţia formulei lui Stokes pentru paralelipiped.



Împărţim pe Π în N^{k+1} paralelipipede mici egale Π_i asemenea cu Π. Atunci este evident că

$$\int_{\partial\Pi} \omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i, \text{ unde } F_i = \int_{\partial \Pi_i} \omega.$$

Conform formulei (1), avem

$$F_i = d\omega\,(\xi_1^i, \ldots, \xi_{k+1}^i) + o(N^{-(k+1)}),$$

unde $\xi_1^i, \ldots, \xi_{k+1}^i$ sînt muchii ale lui Π_i. Dar $\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega\,(\xi_1^i \ldots, \xi_{k+1}^i)$ este sumă integrală pentru $\int_{\Pi} d\omega$. Se verifică uşor că evaluarea $o(N^{-(k+1)})$ este uniformă. Rezultă

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega\,(\xi_1^i, \ldots, \xi_{k+1}^i) = \int_{\Pi} d\omega.$$

În final, obţinem

$$\int_{\partial\Pi} \omega = \sum F_i = \lim_{N\to\infty} \sum F_i = \int_{\Pi} d\omega.$$

De aici, formula (3) pentru un lanţ arbitrar ale cărui poliedre sînt paralelipipede rezultă de la sine.

Pentru a demonstra formula (3) pentru orice poliedru convex D este suficient să o demonstrăm pentru simplexe*), deoarece D poate fi totdeauna divizat în simplexe (fig. 161):

$$D = \sum D_i,\ \partial D = \sum \partial D_i.$$

*) Un simplex bidimensional este un triunghi, unul tridimensional — un tetraedru, iar unul k-dimensional — înfăşurătoarea convexă a unei familii de $k + 1$ puncte din $\mathbf{R}^n$ care nu sînt aşezate toate într-un plan de dimensiune $k-1$.

E x e m p l u: $\left\{x \in \mathbf{R}^k : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant 1\right\}$.

Să demonstrăm deci formula (3) pentru un simplex. Pentru aceasta, să observăm că există o aplicaţie diferenţiabilă a cubului k-dimensional orientat pe simplexul k-dimensional orientat astfel încît:

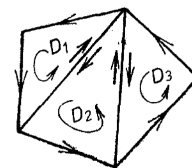


Fig. 161. Partiţia unui poliedru convex în simplexe.

1) interiorul cubului este aplicat difeomorf şi cu păstrarea orientării pe interiorul simplexului:

2) interioarele unor feţe $(k-1)$-dimensionale ale cubului sînt aplicate difeomorf şi cu păstrarea orientării pe interioarele feţelor simplexului; imaginile celorlalte feţe $(k-1)$-dimensionale ale cubului sînt conţinute în feţe de dimensiune $k-2$ ale simplexului.

De exemplu, pentru $k = 2$, o astfel de aplicaţie a cubului $0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1$ pe un triunghi este dată de formulele $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 x_2$ (fig. 162).

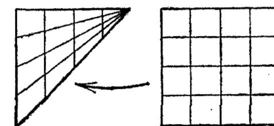


Fig. 162. Demonstraţia formulei lui Stokes pentru simplexe.

Cu această observaţie, formula (3) pentru simplexe rezultă din formula (3) pentru cuburi şi teorema schimbării de variabilă.

E x e m p l u l 1. Să considerăm în spaţiul $\mathbf{R}^{2n}$ de coordonate $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, 1-forma diferenţial

$$\omega^1 = p_1 dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n = \mathbf{p}\, d\mathbf{q},$$

atunci $d\omega^1 = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + d\mathbf{p}_n \wedge d\mathbf{q}_n = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ şi deci

$$\int_{c^2} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \int_{\partial c^2} \mathbf{p}\, dq.$$

În particular, dacă c^2 este o suprafaţă închisă ($\partial c^2 = 0$), atunci

$$\int_{c^2} \mathbf{dp} \wedge \mathbf{dq} = 0.$$

E. Exemplul 2. Analiza vectorială. Pe o varietate riemanniană tridimensională orientată M fiecărui cîmp de vectori $\mathbf{A}$ îi corespunde o 1-formă $\omega^1_{\mathbf{A}}$ şi o 2-formă $\omega^2_{\mathbf{A}}$. Din acest motiv, diferenţierea exterioară poate fi considerată ca o operaţie vectorială. Diferenţierii exterioare a **0**-formelor (funcţiilor), 1-formelor şi 2-formelor le corespund operatorii *gradient, rotor* şi *divergenţă*, definiţi de relaţiile

$$\mathrm{d}f = \omega^1_{\mathbf{grad}\, f}, \quad \mathrm{d}\omega^1_{\mathbf{A}} = \omega^2_{\mathbf{rot\, A}}, \quad \mathrm{d}\omega^2_{\mathbf{A}} = \mathrm{div}\, \mathbf{A} \cdot \omega^3$$

(forma ω^3 este elementul de volum pe M). Prin urmare, din (3) rezultă formulele :

$$f(y) - f(x) = \int_l (\mathbf{grad}\, f, \mathbf{dl}), \text{ dacă } \partial l = y - x,$$

$$\int_l (\mathbf{A}, \mathbf{dl}) = \iint_S (\mathbf{rot\, A}, \mathbf{dn}), \text{ dacă } \partial S = l,$$

$$\iint_S (\mathbf{A}, \mathbf{dn}) = \iiint_D \mathrm{div}\, \mathbf{A}\, \omega^3, \text{ dacă } \partial D = S.$$

Problema 6. Să se demonstreze că

$$\mathrm{div}\, [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{rot\, A}, \mathbf{B}) - (\mathbf{rot\, B}, \mathbf{A}),$$
$$\mathbf{rot}\, (a\mathbf{A}) = [\mathbf{grad}\, a, \mathbf{A}] + a\, \mathbf{rot\, A},$$
$$\mathrm{div}\, (a\mathbf{A}) = (\mathbf{grad}\, a, \mathbf{A}) + a\, \mathrm{div}\, \mathbf{A}.$$

Indicaţie. Din formula de diferenţiere a produsului exterior rezultă

$$\mathrm{d}(\omega^2_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}) = \mathrm{d}(\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}}) = \mathrm{d}\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}} - \omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \mathrm{d}\omega^2_{\mathbf{B}}.$$

Problema 7. Să se demonstreze că $\mathbf{rot\, grad}\, f = 0$, $\mathrm{div}\, \mathbf{rot\, A} = 0$, $\forall f, \mathbf{A}$.
Indicaţie. $\mathrm{dd} = 0$.

F. Anexa 1. Operaţiile vectoriale într-un sistem triortogonal. Fie x_1, x_2, x_3 un sistem triortogonal de coordonate pe M : $ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2\, dx_2^2 + E_3\, dx_3^2$ şi $\mathbf{e}_i$ versorii axelor de coordonate (vezi p.).

Problema 8. Cunoscînd componentele cîmpului vectorial $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, să se găsească componentele cîmpului $\mathbf{rot\, A}$.
Rezolvare.

$$\omega^1_{\mathbf{A}} = A_1\sqrt{E_1}\, dx_1 + A_2\sqrt{E_2}\, dx_2 + A_3\sqrt{E_3}\, dx_3$$

şi deci

$$\mathrm{d}\omega^1_{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \ldots = \omega^2_{\mathbf{rot\, A}}.$$

Obţinem

$$\mathbf{rot\, A} = \frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix} \sqrt{E_1}\,\mathbf{e}_1 & \sqrt{E_2}\,\mathbf{e}_2 & \sqrt{E_3}\,\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1\sqrt{E_1} & A_2\sqrt{E_2} & A_3\sqrt{E_3} \end{vmatrix}.$$

În particular, în coordonatele carteziene, cilindrice şi sferice în $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{rot\, A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(A_\varphi\cos\theta)}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial\theta} - \frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R}\right)\mathbf{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial(RA_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\theta.$$

Problema 9. Să se calculeze divergența cîmpului **A**.

Rezolvare. $\omega^2_{\mathbf{A}} = A_1\sqrt{E_2E_3}\ dx_2\wedge dx_3 + \ldots$. Prin urmare,

$d\omega^2_{\mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial x_1}(A_1\sqrt{E_2E_3})\ dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 + \ldots$ și deci,

conform definiției divergenței,

$d\omega^2_{\mathbf{A}} = \text{div } \mathbf{A}\sqrt{E_1E_2E_3}\ dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3.$

Rezultă

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1\sqrt{E_2E_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2\sqrt{E_3E_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3\sqrt{E_1E_2})\right).$$

În particular, în coordonatele carteziene, cilindrice și sferice în $\mathbf{R}^3$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial A_z}{z} =$$

$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial(R^2\cos\theta\ A_R)}{\partial R} + \frac{\partial(RA_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(R\cos\theta A_\theta)}{\partial\theta}\right).$$

Problema 10. Se numește *operatorul Laplace pe M* operatorul $\Delta = \text{div grad}$. Să i se găsească expresia în coordonatele x_i.

Răspuns.

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \ldots.$$

În particular, în $\mathbf{R}^3$,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\cos\theta\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right].$$

G. Anexa 2. Forme închise și cicli. Fluxul unui fluid incompresibil (fără surse) prin frontiera domeniului D este egal cu zero. Să formulăm acum analogul multidimensional al acestei propoziții evidente.

Analogul multidimensional al unui curent fără surse se numește *formă diferențială închisă.*

Un cîmp de vectori **A** nu are surse dacă div **A** $= 0$.

Definiție. O formă diferențială ω pe varietatea M este *închisă* dacă diferențiala ei exterioară este nulă : $d\omega = 0$.

În particular, 2-forma $\omega^2_{\mathbf{A}}$ corespunzătoare cîmpului vectorial fără surse **A** este închisă. Din formula lui Stokes rezultă imediat o

Teoremă. *Integrala unei forme diferențiale închise* ω^k *pe frontiera unui lanț* $(k+1)$*-dimensional* c^{k+1} *este egală cu zero* :

$$\int_{\partial c^{k+1}}\omega^k = 0,\ \textit{dacă}\ d\omega^k = 0.$$

Problema 11. Să se demonstreze că diferențiala unei forme este totdeauna închisă.

Pe de altă parte, există forme închise care nu sînt diferențiale.

De exemplu, fie M spațiul euclidian tridimensional $\mathbf{R}^3$ din care s-a scos punctul O : $M = \mathbf{R}^3/O$ și 2-forma corespunzătoare cîmpului $\mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\mathbf{e}_R$ (fluxul acestui cîmp) (fig. 163). Ne putem convinge ușor că div $\mathbf{A} = 0$ și deci 2-forma $\omega^2_{\mathbf{A}}$ este închisă.

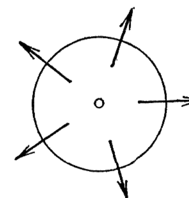


Fig. 163. Cîmpul A

În același timp, fluxul prin orice sferă cu centrul în O este egal cu 4π. Să arătăm că integrala diferențialei unei forme pe sferă trebuie să fie nulă.

D e f i n i ț i e . Se numește *ciclu* în varietatea M orice lanț a cărui frontieră este nulă.

Suprafața orientată a sferei noastre poate fi considerată ca un ciclu. Din formula lui Stokes (3) rezultă imediat următoarea

Teoremă. *Integrala diferențialei unei forme pe orice ciclu este nulă:*

$$\int_{c^{k+1}} d\,\omega^k = 0, \text{ dacă } \partial c^{k+1} = 0.$$

Prin urmare, 2-forma noastră $\omega^2_{\mathbf{A}}$ *nu* este diferențiala unei 1-forme (deoarece $\int_{S^2} \omega^2_{\mathbf{A}} = 4\pi \neq 0$).

Existența unor forme diferențiale închise care nu sînt diferențialele altor forme pe o varietate M este legată de proprietățile topologice ale lui M. Se poate arăta că în spațiul liniar orice k-formă închisă este diferențiala unei $(k-1)$-forme („lema lui Poincaré").

P r o b l e m a 12. Să se demonstreze lema lui Poincaré pentru 1-forme.

I n d i c a ț i e. Se consideră integrala

$$\int_{x}^{x_1} \omega^1 = \varphi(x_1).$$

P r o b l e m a 13. Să se demonstreze că într-un spațiu liniar integrala unei forme închise pe orice ciclu este nulă.

I n d i c a ț i e. Se construiește un $(k+1)$-lanț a cărui frontieră este ciclul dat (fig. 164).

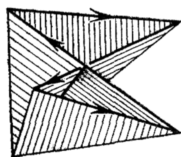


Fig. 164. Conul peste un ciclu.

Mai precis, pentru orice lanț c se consideră *„conul peste c cu vîrful în O"*. Dacă se notează cu p operația de construire a conului, atunci

$\partial \cdot p + p \cdot \partial = 1$ (transformarea identică).

Prin urmare, dacă lanțul c este închis ($\partial c = 0$), atunci $\partial(pc) = c$.

P r o b l e m a 14. Să se demonstreze că în spațiul liniar orice formă închisă este o diferențială totală.

I n d i c a ț i e. Se utilizează construcția conică. Fie ω^k o k-formă diferențială în $\mathbf{R}^n$. Se definește o $(k-1)$-formă diferențială („coconul peste ω^k") $p\,\omega^k$ în modul următor: pentru orice lanț c^{k-1}

$$\int_{c^{k-1}} p\omega^k = \int_{pc^{k-1}} \omega^k.$$

Se verifică ușor că $(k-1)$-forma $p\omega^k$ există și este unică; valoarea ei pe vectorii $\xi_1,\dots,\xi_{k-1}$ tangenți la $\mathbf{R}^n$ în punctul $\mathbf{x}$ este egală cu

$$(p\omega^k)_{\mathbf{x}}(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = \int_0^1 \omega^k_{t\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \xi_1,\dots,t\,\xi_{k-1})\,dt.$$

Se verifică ușor că

$d \circ p + p \circ d = 1$ (transformarea identică).

Prin urmare, dacă forma ω^k este închisă, atunci $d(p\omega^k) = \omega^k$.

P r o b l e m a 15. Fie $\mathbf{X}$ un cîmp de vectori pe varietatea M și ω o k-formă diferențială. Definim o nouă $(k-1)$-formă diferențială (așa-numitul *produs interior al lui* $\mathbf{X}$ cu ω) $i_{\mathbf{X}}\omega$ prin relația

$$(i_{\mathbf{X}}\,\omega)_x(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = \omega_x(\mathbf{X}(x), \xi_1,\dots\xi_{k-1}), \ \forall \xi_1,\dots,\xi_{k-1} \in TM_x, \ \forall x \in M.$$

Demonstrați următoarea *formulă de omotopie:*

$$i_{\mathbf{X}}\, d + d\, i_{\mathbf{X}} = L_{\mathbf{X}},$$

unde $L_{\mathbf{X}}$ este operatorul de derivare în direcția cîmpului $\mathbf{X}$.

[Acțiunea operatorului $L_{\mathbf{X}}$ asupra formelor se definește cu ajutorul curentului $\{g^t\}$ al cîmpului prin relația

$$(L_{\mathbf{X}}\,\omega)_x(\xi) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega_x(g^t_*\,(\xi)),$$

$$\forall\, \xi \in TM_x, \in xM.$$

Operatorul $L_{\mathbf{X}}$ se numește *derivata Lie* sau *derivata pescarului*: curentul poartă prin fața pescarului toate obiectele geometrice diferențiabile, iar pescarul stă pe loc și le derivează].

I n d i c a ț i e. Notăm cu H „operatorul de omotopie" care asociază fiecărui k-element $\sigma=(D, f, \mathrm{Or})$, $f: D\to M$, $(k+1)$-elementul $H\sigma=(I\times D, Hf, \mathrm{Or})$, unde $I=[0, 1]$, $(Hf)(t, x)=g^t(f(x))$ și orientarea pe $I\times D$ este cea naturală. H se extinde la lanțuri prin formula $H(c^k)=H(\sum m_i\sigma_i)=\sum m_i(H\sigma_i)$. Atunci, pentru orice lanț

$$g^1(c)-c=\partial(Hc)+H(\partial c).$$

P r o b l e m a 16. Să se demonstreze formula de derivare a produsului vectorial în spațiul euclidian tridimensional (sau pe o varietate riemanniană tridimensională)

$$\mathbf{rot}\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}+(\mathrm{div}\ \mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathrm{div}\ \mathbf{a})\mathbf{b}$$

(unde $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}=L_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ este paranteza Poisson a cîmpurilor **a** și **b**, vezi § 39).

I n d i c a ț i e. Dacă τ este elementul de volum, avem

$$i_{\mathbf{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}\tau=di_{\mathbf{a}}i_{\mathbf{b}}\tau, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{a}=di_{\mathbf{a}}\tau,$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}=L_{\mathbf{a}}\mathbf{b}.$$

Utilizînd aceste relații și ținînd minte că $d\tau=0$, se deduce ușor formula pentru **rot** $[a, b]$ din formula de omotopie.

H. Anexa 3. Coomologie și omologie. Mulțimea tuturor formelor pe varietatea M este un spațiu liniar în care k-formele închise formează un subspațiu care la rîndul lui conține subspațiul format din diferențialele $(k+1)$-formelor. Spațiul factor

$$(k\textit{-forme închise})/(\textit{diferențiale de } (k-1)\textit{-forme})=H^k(M; \mathbf{R})$$

se numește *grupul de coomologie în dimensiune k al varietății M*. Orice element al acestui grup este o clasă de k-forme închise care diferă între ele numai printr-o diferențială.

P r o b l e m a 17. Să se demonstreze că pentru cercul S^1 avem $H^1(S; \mathbf{R})=\mathbf{R}$.

Dimensiunea spațiului $H^k(M; \mathbf{R})$ se numește *numărul lui Betti de dimensiune k* al varietății M.

P r o b l e m a 18. Să se determine numărul lui Betti de dimensiune 1 al torului $T^2=S^1\times S^1$.

Fluxurile unui fluid (fără surse) prin suprafețele a două sfere concentrice sînt egale. În general, la integrarea unei forme închise pe un ciclu k-dimensional, ciclul se poate înlocui cu altul fără a

modifica integrala dacă diferența celor doi cicli este frontiera unui lanț $(k+1)$-dimensional (unei „pelicule", fig. 165):

$$\int_{a^k}\omega^k=\int_{b^k}\omega^k$$

dacă $a^k-b^k=\partial c^{k+1}$ și $d\omega^k=0$.

Poincaré a denumit *omologi* doi cicli a^k și b^k cu această proprietate.

Printr-o definiție adecvată*) a grupului de lanțuri din varietatea M și a subgrupurilor de cicli și frontiere (adică a ciclilor omologi cu zero) ale acestui grup, grupul-factor

$$(\textit{cicli})/(\textit{frontiere})=H_k(M)$$



Fig. 165. Ciclii omologi.

se numește *grupul de omologie în dimensiunea k al lui M*.

Elementele acestui grup sînt clase de cicli omologi între ei.

Rangul acestui grup este și el egal cu numărul lui Betti de dimensiune k al varietății M („teorema lui de Rham").

---

* Pentru aceasta, grupul nostru $\{c^k\}$ trebuie micșorat, identificînd între ele elementele k-dimensionale care diferă numai prin alegerea parametrizării f sau alegerea poliedrului D. În particular, putem considera că D este totdeauna același simplex sau cub. De asemenea, trebuie considerat ca nul oricare element k-dimensional (D, f, Or) care este degenerat, deci dacă $f=f_2\circ f_1$, unde $f_1: D\to D'$ și D' este de dimensiune mai mică ca k.

CAPITOLUL 8

VARIETĂŢI SIMPLECTICE

O structură simplectică pe o varietate diferenţiabilă este o 2-formă diferenţială închisă şi nedegenerată, definită pe varietate. Spaţiile de faze ale sistemelor mecanice sînt înzestrate cu structuri simplectice naturale.

Pe o varietate simplectică, la fel ca şi pe una riemanniană, există un izomorfism natural între cîmpurile de vectori şi 1-forme. Un cîmp de vectori pe o varietate simplectică care corespunde, prin acest izomorfism, diferenţialei unei funcţii se numeşte cîmp hamiltonian. Un cîmp de vectori pe o varietate generează un curent (sistem dinamic) : un grup cu un parametru de difeomorfisme. Curentul unui cîmp de vectori hamiltonian pe o varietate simplectică conservă structura simplectică a spaţiului fazelor.

Cîmpurile de vectori pe o varietate formează o algebră Lie. De asemenea, şi cîmpurile hamiltoniene de vectori pe o varietate simplectică formează o algebră Lie. Operaţiile de comutare în aceste algebre se numesc paranteze Poisson.

§ 37. STRUCTURA SIMPLECTICĂ PE O VARIETATE

În acest paragraf se definesc varietăţile simplectice, cîmpurile vectoriale hamiltoniene pe ele şi structura simplectică standard pe fibrarea cotangentă.

A. Definiţie. Fie M^{2n} o varietate diferenţiabilă de dimensiune pară $2n$.

Se numeşte *structură simplectică pe* M^{2n} o 2-formă diferenţială închisă şi nedegenerată ω^2 definită pe M^{2n} :

$$d\omega^2 = 0 \text{ şi } \forall \xi \neq 0, \quad \exists \eta : \omega^2(\xi, \eta) = 0 \quad (\xi, \eta \in TM_x).$$

Perechea (M^{2n}, ω^2) se numeşte *varietate simplectică.*

Exemplu. Să considerăm spaţiul liniar $\mathbf{R}^{2n}$ cu coordonatele p_i, q_i şi fie $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Problemă. Să se verifice că $(\mathbf{R}^{2n}, \omega^2)$ este o varietate simplectică.

Cind $n = 1$, perechea $(\mathbf{R}^2, \omega^2)$ este perechea *(plan, elementul de arie).*

Următorul exemplu explică cum apar varietăţile simplectice în problemele de dinamică. Alături de fibrarea tangentă a unei varietăţi diferenţiabile este adesea util să se considere şi fibrarea cotangentă, care îi este duală.

B. Fibrarea cotangentă şi structura ei simplectică. Fie V o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. Se numeşte *vector cotangent la V în punctul* $x \in V$ orice 1-formă (funcţională liniară) pe spaţiul tangent la V în x. Mulţimea vectorilor cotangenţi la V în punctul x formează un spaţiu liniar de dimensiune n care este dualul spaţiului tangent TV_x. Acest spaţiu liniar de vectori cotangenţi se notează cu T^*V_x şi se numeşte *spaţiul cotangent la varietatea V în punctul x.*

Reuniunea spaţiilor cotangente la varietatea V în toate punctele sale $\bigcup_{x \in V} T^*V_x$ se notează cu T^*V şi se numeşte *fibrarea cotangentă* a varietăţii V. Mulţimea T^*V are o structură naturală de varietate diferenţiabilă de dimensiune $2n$. Un punct din T^*V este o 1-formă pe spaţiul tangent la V într-un anumit punct x din V. Dacă $\mathbf{q}$ este un sistem de n coordonate locale pe V în vecinătatea lui x, o astfel de 1-formă este dată de ansamblul celor n componente ale ei, $\mathbf{p}$. Împreună, cele $2n$ numere $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ formează un sistem de coordonate în vecinătatea punctului din T^*V considerat.

Există o proiecţie naturală $f: T^*V \to V$ care asociază fiecărei 1-forme pe TV_x punctul x. Proiecţia f este o aplicaţie diferenţiabilă *surjectivă.*

Imaginea reciprocă a unui punct $x \in V$ prin aplicaţia f este spaţiul cotangent T^*V_x.

Teoremă. *Fibrarea cotangentă T^*V are o structură simplectică naturală. În coordonatele locale descrise mai sus, această structură este dată de formula*

$$\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

Demonstraţie. Pentru început, vom defini pe T^*V o

1-formă diferenţială remarcabilă*). Fie $\xi \in T(T^*V)_p$ un vector tangent la fibrarea cotangentă în punctul $p \in T^*V_x$ (fig. 166). Diferenţiala $f_*: T(T^*V) \to TV$ proiecţiei naturale $f: T^*V \to V$ transformă vectorul ξ în vectorul $f_*\xi_1$ tangent la V în punctul x. Definim 1-forma ω^1 pe T^*V prin relaţia $\omega^1(\xi) = p(f_*\xi)$.

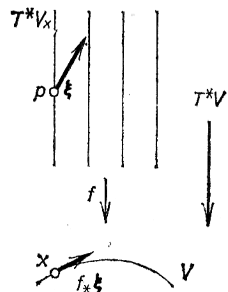


Fig. 166. 1-forma $\mathbf{p}\, d\mathbf{q}$ pe fibrarea cotangentă.

În coordonatele locale descrise mai sus, această formă se scrie $\omega^1 = \mathbf{p}\, d\mathbf{q}$. Conform exemplului de la punctul A, 2-forma închisă $\omega^2 = d\,\omega^1$ este nedegenerată.

O b s e r v a ţ i e. Să considerăm un sistem mecanic lagrangean cu spaţiul configuraţiilor V şi funcţia lui Lagrange L. Se poate imagina uşor că „viteza generalizată" lagrangeană $\dot{\mathbf{q}}$ este un vector tangent la varietatea configuraţiilor V, iar impulsul generalizat $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{*}$ — un vector cotangent. Deducem că spaţiul de faze «$\mathbf{p}, \mathbf{q}$» ale problemei lagrangeene este fibrarea cotangentă a varietăţii configuraţiilor. Astfel, teorema precedentă arată că spaţiul de faze al unei probleme de mecanică este înzestrat cu o structură naturală de varietate simplectică.

P r o b l e m ă. Să se arate că transformarea Legendre nu depinde de sistemul de coordonate utilizat: ea asociază funcţiei $L: TV \to \mathbf{R}$, definită pe fibrarea tangentă, funcţia $H: T^*V \to \mathbf{R}$ definită pe fibrarea cotangentă.

C. Cîmpuri de vectori hamiltoniene. O structură riemanniană pe o varietate stabileşte un izomorfism între spaţiile de cîmpuri de vectori şi spaţiul de 1-forme diferenţiale. O structură simplectică defineşte şi ea un izomorfism asemănător.

D e f i n i ţ i e. Să asociem fiecărui vector ξ tangent la varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2) în punctul x, 1-forma ω^1_ξ pe TM_x, definită de formula

$$\omega^1_\xi(\boldsymbol{\eta}) = \omega^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \ \forall\, \boldsymbol{\eta} \in TM_x.$$

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că asocierea $\xi \mapsto \omega^1_\xi$ este un izomorfism între spaţiile liniare $2n$-dimensionale de vectori tangenţi şi 1-forme.

*) În literatura de specialitate, ω^1 se mai numeşte şi 1-forma canonică a varietăţii T^*V, iar ω^2 — 2-forma canonică. *(N.T.)*.

E x e m p l u. În $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ vom identifica vectorii şi 1-formele utilizînd structura euclidiană $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2$. Atunci corespondenţa $\xi \mapsto \omega^1_\xi$ defineşte o transformare liniară $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$.

P r o b l e m ă. Să se calculeze matricea acestei transformări în baza $\mathbf{p}, \mathbf{q}$.

Răspuns. $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Vom nota cu I inversul izomorfismului definit mai sus, $I: T^*M_x \to TM_x$.

Fie acum H o funcţie definită pe varietatea simplectică M^{2n}. Atunci dH este o 1-formă diferenţială pe M şi ei îi corespunde în fiecare punct un vector cotangent la M. Obţinem în acest mod un cîmp de vectori $I\, dH$ pe M.

D e f i n i ţ i e. Cîmpul de vectori $I\, dH$ se numeşte *cîmp de vectori hamiltonian*, iar H — *funcţia lui Hamilton (hamiltonianul)*.

E x e m p l u. Dacă $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$, obţinem cîmpul de vectori definit de ecuaţiile canonice ale lui Hamilton

$$\dot{\mathbf{x}} = I\, dH(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}.$$

§ 38. CURENŢII HAMILTONIENI ÎN SPAŢIUL FAZELOR ŞI INVARIANŢII LOR INTEGRALI

Teorema lui Liouville afirmă că un curent hamiltonian în spaţiul fazelor conservă volumele. Poincaré a determinat o serie de forme diferenţiale care sînt conservate de un astfel de curent.

A. Curenţii hamiltonieni conservă structura simpletică. Fie (M^{2n}, ω^2) o varietate simplectică şi $H: M^{2n} \to \mathbf{R}$ o funcţie. Să presupunem că cîmpul hamiltonian $I\, dH$ corespunzător lui H defineşte un grup cu un parametru de difeomorfisme $g^t: M^{2n} \to M^{2n}$,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = I\, dH(x).$$

Grupul g^t se numeşte *curentul (sistemul dinamic) hamiltonian* cu funcţia lui Hamilton H.

Teoremă. *Curentul hamiltonian conservă structura simplectică:*

$$(g^t)^* \, \omega^2 = \omega^2.$$

În cazul $n=1$, $M^{2n} = \mathbf{R}^2$, această teoremă arată *că curentul g^t conservă aria* (teorema lui Liouville).

Pentru a demonstra teorema, este util să introducem următoarele notaţii (fig. 167).

Fie M o varietate arbitrară, c un k-lanţ în M şi $g^t: M \to M$ un grup cu un parametru de aplicaţii diferenţiabile. Să construim

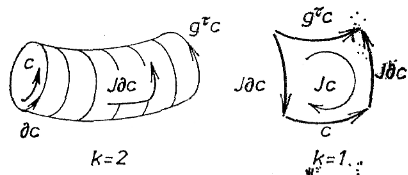


Fig. 167. Urma unui lanţ printr-o omotopie.

un $(k+1)$-lanţ Jc în M, numit *urma lanţului c prin omotopia* g^t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Fie (D, f, Or) unul din elementele lanţului c.

Lui îi va corespunde în lanţul Jc elementul (D', h', Or'), unde $D' = I \times D$ este produsul direct al segmentului $0 \leqslant t \leqslant \tau$ cu D, $h': D' \to M$ se exprimă cu ajutorul lui $h: D \to M$ prin formula $h'(t, x) = g^t(h(x))$, iar orientarea Or' a spaţiului $\mathbf{R}^{n+1}$ care conţine pe D' este dată de reperul $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, unde $\mathbf{e}_0$ este versorul axei t, iar $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ formează reperul care orientează pe D.

Putem spune că Jc este *lanţul pe care c îl descrie prin omotopia* g^t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Frontiera lanţului Jc este formată din „capacele" determinate de poziţiile iniţială şi finală ale lui c şi „suprafaţa laterală" descrisă de frontiera lui c.

Se poate verifica uşor că prin alegerea indicată a orientărilor

$$\partial(Jc_k) = g^\tau c_k - c_k - J\partial c_k. \quad (1)$$

Lemă. *Fie γ un 1-lanţ în varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2). Fie g^t curentul pe M determinat de funcţia lui Hamilton H. Atunci*

$$\frac{d}{d\tau} \int_{J\gamma} \omega^2 = \int_{g^\tau \gamma} dH.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Este suficient să considerăm un lanţ γ format dintr-un singur element $h: [0, 1] \to M$. Să introducem notaţiile

$$h'(s, t) = g^t h(s), \quad \xi = \frac{\partial h'}{\partial s}, \quad \eta = \frac{\partial h'}{\partial t} \in TM_{h'(s,t)}.$$

Conform definiţiei integralei

$$\int_{J\gamma} \omega^2 = \int_0^1 \int_0^\tau \omega^2 (\eta, \xi) \, dt \, ds.$$

Pe de altă parte, conform definiţiei curentului hamiltonian şi cîmpului de vectori hamiltonian, η este vectorul asociat de cîmpul hamiltonian cu funcţia lui Hamilton H (punctului $h'(s, t)$), iar $\omega^2(\eta, \xi) = dH(\xi)$. Prin urmare

$$\int_{J\gamma} \omega^2 = \int_0^\tau \Big(\int_{g^t \gamma} dH \Big) \, dt$$

şi astfel lema este demonstrată.

Corolar. *Dacă lanţul γ este închis (un ciclu: $\partial \gamma = 0$), atunci* $\int_{J\gamma} \omega^2 = 0.$

Într-adevăr, $\int_\gamma dH = \int_{\partial \gamma} H = 0.$

D e m o n s t r a ţ i a t e o r e m e i. Să considerăm un 2-lanţ arbitrar c. Avem:

$$0 \overset{1}{=} \int_{Jc} d\omega^2 \overset{2}{=} \int_{\partial Jc} \omega^2 \overset{3}{=} \int_{g^\tau c} \omega^2 - \int_c \omega^2 - \int_{J\partial c} \omega^2 \overset{4}{=} \int_{g^\tau c} \omega^2 - \int_c \omega^2$$

(1-forma ω^2 este închisă, 2-formula lui Stokes, 3-formula (1), 4-corolarul precedent, $\gamma = \partial c$). Prin urmare, integralele formei ω^2 pe un lanţ arbitrar c şi imaginea sa $g^\tau c$ coincid, c.c.t.d.

Problemă. Este orice grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui M^{2n} care conservă structura simplectică un curent hamiltonian?

Indicație. Vezi § 40.

B. Invarianți integrali. Fie $g : M \to M$ o aplicație diferențiabilă.

Definiție. O k-formă diferențială ω se numește *invariant integral* al aplicației g dacă pentru orice lanț k-dimensional c integrarea lui ω pe c și pe imaginea lui c prin aplicația g dă același rezultat:

$$\int_{gc} \omega = \int_{c} \omega.$$

Exemplu. Dacă $M = \mathbf{R}^2$ și $\omega^2 = dp \wedge dq$ este elementul de suprafață, atunci ω^2 este invariant integral pentru orice aplicație g cu jacobianul egal cu 1.

Problemă. Să se demonstreze că forma ω^k este invariant integral al aplicației g dacă și numai dacă $g^*\omega^k = \omega^k$.

Problemă. Să se demonstreze că dacă formele ω^k și ω^l sînt invarianți integrali ai aplicației g, atunci și forma $\omega^k \wedge \omega^l$ este invariant integral al lui g.

Teorema de la punctul **A** se poate formula în modul următor:

Teoremă. *Forma ω^2 care definește structura simplectică este invariant integral al oricărui curent hamiltonian.*

Să considerăm acum puterile exterioare ale formei ω^2,

$$(\omega^2)^2 = \omega^2 \wedge \omega^2, \ (\omega^2)^3 = \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^2, \ \ldots .$$

Corolar. *Fiecare dintre formele $(\omega^2)^2, (\omega^2)^3, \ldots$ este invariant integral al curentului hamiltonian.*

Problemă. Să presupunem că dimensiunea varietății simplectice (M^{2n}, ω^2) este $2n$. Să se arate că $(\omega^2)^k = 0$ pentru $k > n$ și că $(\omega^2)^n$ este o $2n$-formă diferențială nedegenerată pe M^{2n}.

Definim un element de volum pe M^{2n} cu ajutorul formei $(\omega^2)^n$. Atunci un curent hamiltonian păstrează volumele și deci teorema lui Liouville se obține din corolarul precedent.

Exemplu. Să considerăm spațiul numeric $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ cu structura simplectică canonică $\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \sum dp_i \wedge dq_i$. În acest caz, forma $(\omega^2)^k$ este proporțională cu forma

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} dp_{i_1} \wedge \ldots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \ldots \wedge dq_{i_k}.$$

Integrala formei ω^{2k} este egală cu suma volumelor orientate ale proiecțiilor pe subspațiile de coordonate $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})$.

O aplicație $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ se numește *canonică* dacă ω^2 este invariant integral al lui g. Fiecare din formele $\omega^4, \omega^6, \ldots, \omega^{2n}$ este invariant integral pentru orice aplicație canonică. Prin urmare, *o aplicație canonică conservă suma volumelor orientate ale proiecțiilor pe subspațiile de coordonate $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})$* $1 \leqslant k \leqslant n$. În particular, *o aplicație canonică conservă volumele.*

Curentul hamiltonian definit de ecuațiile $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}$ este format din aplicațiile canonice g^t.

Invarianții integrali considerați mai sus se mai numesc și *invarianți integrali absoluți.*

Definiție. O k-formă diferențială ω se numește *invariant integral relativ* al aplicației $g : M \to M$ dacă

$$\int_{gc} \omega = \int_{c} \omega$$

Teoremă. *Fie ω un invariant integral absolut al aplicației g. Atunci* $d\omega$ *este un invariant integral relativ al lui g.*

Demonstrație. Fie c un $(k+1)$-lanț, atunci

$$\int_{c} d\omega \overset{1}{=} \int_{\partial c} \omega \overset{2}{=} \int_{g\partial c} \omega \overset{3}{=} \int_{\partial gc} \omega \overset{4}{=} \int_{gc} d\omega$$

(1 și 4 — formula lui Stokes, 2 — din definiția invariantului integral absolut, 3 — definiția frontierei).

Exemplu. *Orice aplicație canonică $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ are ca invariant integral relativ 1-forma*

$$\omega^1 = \mathbf{p}\, d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i.$$

Într-adevăr, fiecare 1-lanț închis c în $\mathbf{R}^{2n}$ este bordul unui 2-lanț σ și deci

$$\int_{gc} \omega^1 \overset{1}{=} \int_{g\partial\sigma} \omega^1 \overset{2}{=} \int_{\partial g\sigma} \omega^1 \overset{3}{=} \int_{g\sigma} d\omega^1 \overset{4}{=} \int_{\sigma} d\omega^1 \overset{5}{=} \int_{\partial\sigma} \omega^1 \overset{6}{=} \int_{c} \omega^1$$

(1 şi 6 — definiţia lui σ, 2 — definiţia lui ∂, 3 şi 5 — formula lui Stokes, 4 — g este canonică şi $d\omega^1 = d(\mathbf{p}, d\mathbf{q}) = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \omega^2$).

Problemă. Fie $d\omega^k$ un invariant integral absolut al aplicaţiei $g: M \to M$. Se poate afirma că de aici rezultă că ω^k este un invariant integral relativ?

Răspuns. Dacă în M există k-lanţuri închise care nu sînt frontiere — nu.

C. Legea conservării energiei.

Teoremă. *Funcţia H este integrală primă a curentului definit de funcţia lui Hamilton H.*

Demonstraţie. Derivata funcţiei H în direcţia vectorului $\boldsymbol{\eta}$ este egală cu valoarea formei dH pe vectorul $\boldsymbol{\eta}$. Conform definiţiei cîmpului de vectori hamiltonian $\boldsymbol{\eta} = I\, dH$, obţinem

$$dH(\boldsymbol{\eta}) = \omega^2(\boldsymbol{\eta}, I\, dH) = \omega^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Problemă. Să se demonstreze că 1-forma dH este integrală primă a curentului cu funcţia lui Hamilton H.

§ 39. ALGEBRA LIE A CÎMPURILOR DE VECTORI

Oricărei perechi de cîmpuri de vectori pe o varietate i se asociază un nou cîmp de vectori, numit paranteza lui Poisson a celor două cîmpuri. Paranteza lui Poisson transformă spaţiul liniar al cîmpurilor de vectori infinit diferenţiabile pe varietate într-o algebră Lie.

A. Algebra Lie. Un exemplu de algebră Lie este spaţiul liniar euclidian tridimensional orientat, înzestrat cu operaţia de produs vectorial. Produsul vectorial este biliniar, antisimetric şi satisface identitatea lui Jacobi.

$$[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + [[\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = 0.$$

Definiţie. Se numeşte *algebră Lie* un spaţiu liniar L împreună cu o operaţie biliniară antisimetrică $L \times L \to L$ care satisface identitatea lui Jacobi.

De obicei, operaţia respectivă se notează cu paranteze pătrate şi se numeşte *comutator*.

Problemă. Să se demonstreze că mulţimea matricilor $n \times n$ devine o algebră Lie dacă se defineşte comutatorul prin $[A, B] = AB - BA$.

B. Cîmpurile de vectori şi operatorii diferenţiali. Fie M o varietate netedă şi $\mathbf{A}$ un cîmp de vectori neted pe M: oricărui punct $x \in M$ i se asociază vectorul tangent $\mathbf{A}(x) \in TM_x$. Fiecărui asemenea cîmp de vectori i se ataşează două obiecte.

1. Un *grup cu un parametru de difeomorfisme* *) sau un *curent* $A^t: M \to M$, pentru care A este cîmpul de viteze (fig. 168):

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A^t x = \mathbf{A}(x).$$

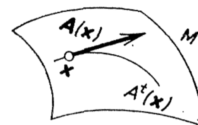


Fig. 168. Grupul de difeomorfisme definit de un cîmp vectorial.

2. Un *operator liniar de ordinul întîi* $L_{\mathbf{A}}$. Este vorba de derivarea funcţiilor în direcţia cîmpului de vectori $\mathbf{A}$: pentru fiecare funcţie $\varphi: M \to \mathbf{R}$, derivata lui φ în direcţia cîmpului $\mathbf{A}$**) este o nouă funcţie $L_{\mathbf{A}}\varphi$ a cărei valoare într-un punct x este

$$(L_{\mathbf{A}}\varphi)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(A^t x).$$

Problemă. Să se demonstreze că operatorul $L_{\mathbf{A}}$ este liniar:

$$L_{\mathbf{A}}(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 L_{\mathbf{A}} \varphi_1 + \lambda_2 L_{\mathbf{A}} \varphi_2,$$
$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}).$$

Să se demonstreze şi formula lui Leibniz

$$L_{\mathbf{A}}(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 L_{\mathbf{A}} \varphi_2 + \varphi_2 L_{\mathbf{A}} \varphi_1.$$

Exemplu. Fie $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistem de coordonate locale pe M. În acest sistem de coordonate, vectorul $\mathbf{A}(x)$ este dat de componentele sale $(A_1(x), \ldots, A_n(x))$. Curentul A^t este definit de sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x}_1 = A_1(\mathbf{x}), \ldots, \dot{x}_n = A_n(\mathbf{x}).$$

*) Conform teoremelor de existenţă, unicitate şi diferenţiabilitate a soluţiilor din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, grupul A^t este definit, de exemplu, dacă varietatea M este compactă. În cazul general, aplicaţiile A^t sînt definite numai în vecinătatea fiecărui punct x şi numai pentru valori mici ale lui t, ceea ce este însă suficient pentru construcţiile care urmează. (Vezi **V. I. Arnold,** *Ecuaţii diferenţiale ordinare,* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978).

**) sau cum se mai spune, *derivata Lie în raport cu* $\mathbf{A}$ *a funcţiei* φ. *(N.T.)*.

şi, prin urmare, derivata lui $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ în direcţia lui **A** este

$$L_{\mathbf{A}} \varphi = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

Se poate spune că, în coordonatele $x_1, \ldots, x_n$, operatorul A are forma

$$L_{\mathbf{A}} = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial}{\partial x_n};$$

aceasta însă este chiar forma generală a unui operator diferenţial liniar de ordinul întîi în spaţiul numeric.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că corespondenţa dintre cîmpurile de vectori **A**, curenţii A^t şi derivările $L_{\mathbf{A}}$ este biunivocă.

C. Paranteza lui Poisson a cîmpurilor de vectori. Să presupunem că pe varietatea M se dau două cîmpuri de vectori A şi B. În general, curenţii corespunzători A^t şi B^s nu comută : $A^t \circ B^s \neq \neq B^s \circ A^t$ (fig. 169).

P r o b l e m ă. Să se dea un exemplu.

R e z o l v a r e. Cîmpurile $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{B} = x_1 \mathbf{e}_2$ în planul (x_1, x_2).

Pentru a măsura gradul de necomutativitate a celor doi curenţi A^t, B^s, să considerăm punctele $A^t(B^s x)$ şi $B^s(A^t x)$. Pentru a evalua cît de mult diferă aceste puncte, să considerăm o funcţie netedă arbitrară φ definită pe varietatea M şi s-o evaluăm în cele două puncte. Diferenţa

$$\Delta(t, s; x) = \varphi(A^t(B^s x) - \varphi(B^s(A^t x))$$

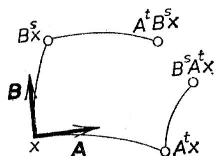


Fig. 169. Curenţi care nu comută.

este clar o funcţie diferenţiabilă care se anulează pentru $s = 0$ şi pentru $t = 0$. Prin urmare, primul termen nenul al seriei Taylor a lui Δ în raport cu s şi t în **0** conţine produsul st, ceilalţi termeni de ordinul doi dispărînd. Să determinăm acest termen biliniar principal al dezvoltării lui Δ în 0.

Lema 1. *Derivata mixtă a lui Δ în raport cu s şi t în* **0** *este egală cu comutatorul derivatelor lui φ în direcţiile lui* **A** *şi* **B** :

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\right|_{s=t=0} [\varphi(A^t(B^s x)) - \varphi(B^s(A^t x))] = (L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} \varphi - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}} \varphi)(x).$$

D e m o n s t r a ţ i e. Conform definiţiei lui $L_{\mathbf{A}}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \varphi(A^t(B^s x)) = L_{\mathbf{A}} \varphi(B^s x).$$

Dacă se notează funcţia $L_{\mathbf{A}} \varphi$ cu Ψ, atunci, conform definiţiei lui $L_{\mathbf{B}}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \Psi(B^s x) = (L_{\mathbf{B}} \Psi)(x).$$

Prin urmare

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\right|_{s=t=0} \varphi(A^t(B^s x)) = (L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} \varphi)(x),$$

c.c.t.d.

Să considerăm operatorul de derivare $L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}}$ astfel obţinut. La prima vedere, este vorba de un operator diferenţial de *ordinul al doilea*.

Lema 2. *Operatorul $L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}}$ este un operator diferenţial liniar de ordinul întîi.*

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $(A_1, \ldots, A_n)$, $(B_1, \ldots, B_n)$ componentele cîmpurilor **A** şi **B** în sistemul local de coordonate $(x_1, \ldots, x_n)$ pe M. Atunci

$$L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} \varphi = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) = \sum_{i,j=1}^{n} B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi + $$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} B_i A_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j}.$$

Dacă se scade $L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}} \varphi$, atunci termenii care conţin derivatele de ordinul al doilea ale lui φ se reduc şi obţinem

$$(L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}})\,\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

ceea ce demonstrează lema.

Deoarece orice operator diferenţial liniar de ordinul întîi este dat de un cîmp de vectori, rezultă că şi operatorul nostru $L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}}$ corespunde unui cîmp de vectori **C**.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte*) *paranteza lui Poisson* sau *comutatorul* a două cîmpuri de vectori **A** şi **B** definite pe varietatea M cîmpul de vectori **C** pe M pentru care

$$L_{\mathbf{C}} = L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}}.$$

Paranteza lui Poisson a cîmpurilor **A** şi **B** se notează cu

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}].$$

P r o b l e m ă. Să presupunem că, în coordonatele x_i, cîmpurile **A** şi **B** sînt definite de componentele A_i, respectiv B_i. Determinaţi componentele parantezei lui Poisson.

R e z o l v a r e. În demonstraţia lemei 2 am arătat că aceste componente sînt

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_i = \sum_{j=1}^{n} \left(B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right).$$

P r o b l e m ă. Fie $\mathbf{A}_1$, respectiv $\mathbf{A}_2$, cîmpul vectorial al vitezelor liniare ale unui corp rigid care se roteşte cu viteza unghiulară ω_1, respectiv ω_2, în jurul punctului O. Să se determine paranteza lui Poisson $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$.

D. Identitatea lui Jacobi.

Teoremă. *Paranteza lui Poisson transformă spaţiul liniar al cîmpurilor de vectori pe varietatea M într-o algebră Lie.*

*) În multe tratate se consideră celălalt semn. Alegerea noastră este în concordanţă cu semnul comutatorului din teoria grupurilor Lie (vezi punctul E).

D e m o n s t r a ţ i e. Este evident că paranteza lui Poisson este biliniară şi antisimetrică. Rămîne să demonstrăm identitatea lui Jacobi. Conform definiţiei parantezei lui Poisson

$$L_{[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}]} = L_{\mathbf{C}} L_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]} - L_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]} L_{\mathbf{C}} = L_{\mathbf{C}} L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{A}} - L_{\mathbf{C}} L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}} + \\ + L_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{C}} - L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{C}} L_{\mathbf{A}}.$$

În total, în suma $L_{[[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}]} + L_{[[\mathbf{B},\mathbf{C}],\mathbf{A}]} + L_{[[\mathbf{C},\mathbf{A}],\mathbf{B}]}$ apar 12 termeni. Cum fiecare dintre ei apare în sumă de două ori şi cu semne opuse, teorema este demonstrată.

E. Teorema de comutativitate a curenţilor. Fie **A** şi **B** cîmpuri de vectori pe varietatea M.

Teoremă. *Doi curenţi A^t şi B^s comută dacă şi numai dacă paranteza lui Poisson a cîmpurilor de vectori corespunzătoare* **A** *şi* **B** *este egală cu zero.*

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă $A^t \circ B^s \equiv B^s A^t$, atunci, conform lemei 1, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$.

Dacă $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, atunci, conform aceleiaşi leme, pentru orice funcţie φ şi orice punct x

$$\varphi\,(A^t(B^s x)) - \varphi\,(B^s\,(A^t\,x)) = o\,(s^2 + t^2),\ s \to 0,\ t \to 0.$$

Vom arăta că din această relaţie rezultă că $\varphi\,(A^t\,(B^s x)) = \varphi(B^s\,(A^t\,x))$ pentru s şi t suficient de mici.

Să aplicăm relaţia coordonatelor locale ($\varphi = x_1, \ldots, \varphi = x_n$) pentru a obţine identitatea $A^t \circ B^s \equiv B^s \circ A^t$.

Să considerăm dreptunghiul $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$ (fig. 170) în planul (t, s). Fiecărui drum care uneşte punctul $(0, 0)$ cu (t_0, s_0) şi este format dintr-un număr finit de segmente paralele cu axele de coordonate îi facem să corespundă un produs de transformări ale curenţilor A^t şi B^s. Astfel, fiecărui segment $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (respectiv $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$) îi asociem transformarea $A^{t_2 - t_1}$ (respectiv $B^{s_2 - s_1}$); transformările se aplică în ordinea în care se parcurg segmentele plecînd din $(0, 0)$.

De exemplu, laturilor ($0 \leqslant t \leqslant t_0$, $s = 0$) şi ($t = t_0$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$) le corespunde produsul $B^{s_0} A^{t_0}$, iar laturilor ($t = 0$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$) şi ($0 \leqslant t \leqslant t_0$, $s = s_0$) — produsul $A^{t_0} B^{s_0}$.

În plus, asociem fiecărui asemenea drum în planul (t, s) drumul pe varietatea M cu originea în punctul x şi format din traiectoriile curenţilor A^t şi B^s (fig. 171). Dacă drumul în planul (t,s) corespunde produsului $A^{t_1} \circ B^{s_1} \circ \ldots A^{t_n} B^{s_n}$, atunci pe varietatea M se obţine drumul corespunzător care uneşte pe x cu $A^{t_1} \circ B^{s_1} \ldots \circ A^{t_n} \circ B^{s_n}(x)$.

Scopul nostru este de a arăta că toate aceste drumuri se termină într-un punct unic $A^{t_0} \circ B^{s_0}\,(x) = B^{s_0} \circ A^{t_0}\,(x)$.

Împărțim segmentele ($0 \leqslant t \leqslant t_0$) și ($0 \leqslant s \leqslant s_0$) în N părți egale astfel încît întregul dreptunghi se împarte în N^2 dreptunghiuri mici. Trecerea de la laturile $(0,0)-(t_0,0)-(t_0, s_0)$ la laturile $(0, 0) - (0, s_0) - (t_0, s_0)$ se poate face în N^2 pași, astfel încît la fiecare pas o pereche de laturi adiacente ale uneia din dreptunghiurile mici se înlocuiește cu perechea de laturi rămasă.

Pe varietatea M acestui mic dreptunghi îi corespunde, în general, un patrulater curbiliniu care nu se închide $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$ (fig. 171). Să evaluăm distanța*) dintre cele două

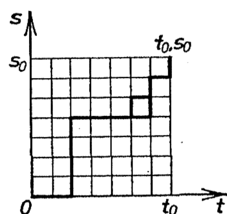


Fig. 170. Cu privire la comutativitatea curenților.

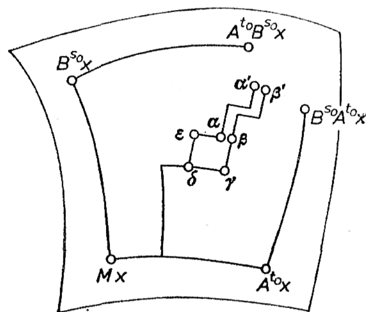


Fig. 171. Patrulater curbiliniu $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$.

vîrfuri α și β corespunzătoare valorilor mai mari ale lui t și s. Așa cum am văzut mai sus v $\rho(\alpha, \beta) \leqslant C_1 N^{-3}$ (unde $C_1 > 0$ este o constantă care nu depinde de N). Utilizînd teorema de diferențiabilitate a soluțiilor ecuațiilor diferențiale în raport cu condițiile inițiale, putem deduce ușor de aici o estimare pentru distanța dintre capetele α', β' ale drumurilor $x\delta\gamma\beta\beta'$ și $x\delta\varepsilon\alpha\alpha'$ de pe varietatea M: $\rho(\alpha', \beta') < C_2 N^{-3}$, unde constanta $C_2 > 0$ nu depinde nici ea de N. Am împărțit însă trecerea de la $B^{s_0} \circ A^{t_0}(x)$ la $A^{t_0} \circ B^{s_0}(x)$ în N^2 de astfel de pași. Prin urmare,

$\rho\,(A^{t_0} \circ B^{s_0}(x),\ B^{s_0} \circ A^{t_0}(x)) \leqslant N^2 C_2 N^{-3}$, $\forall N$. Deducem $A^{t_0} \circ B^{s_0}(x) = B^{s_0} \circ A^{t_0}(x)$.

F. Anexă. Algebra Lie a unui grup Lie. Se numește *grup Lie* un grup G care este varietate diferențiabilă, iar operațiile de grup (înmulțirea și inversarea) sînt aplicații diferențiabile $G \times G \to G$, $G \to G$.

Spațiul tangent TG_e la grupul Lie G în elementul unitate e are o structură naturală de algebră Lie, care se definește în modul următor.

Fiecărui vector tangent $\mathbf{A} \in TG_e$ îi corespunde un subgrup cu un parametru $A^t \in G$ cu vectorul viteză $\mathbf{A} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A^t$.

*) Într-o metrică Riemann oarecare.

Gradul de necomutativitate a două subgrupuri A^t și B^s este măsurat de produsul $A^t B^s A^{-t} B^{-s}$. Se arată că există un singur subgrup C^r pentru care

$$\rho\,(A^t \circ B^s \circ A^{-t} \circ B^{-s},\ C^{st}) = o\,(s^2 + t^2) \text{ pentru } s, t \to 0.$$

Vectorul corespunzător $\mathbf{C} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} C^r$ se numește *comutatorul lui Lie* $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ *al cîmpurilor* $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$.

Se poate verifica că operația de comutare astfel introdusă transformă spațiul tangent TG_e într-o *algebră Lie* (altfel spus,

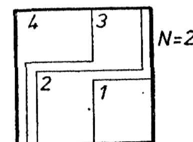


Fig. 172. Trecerea de la o pereche de laturi la cealaltă.

operația este biliniară, antisimetrică și satisface identitatea lui Jacobi). Această algebră se numește *algebră Lie a grupului Lie G*.

Problemă. Să se determine operația de comutare în algebra Lie a grupului SO(3) al rotațiilor în spațiul euclidian tridimensional.

Lema 1 arată că *paranteza lui Poisson a cîmpurilor de vectori poate fi definită ca un comutator Lie «pentru grupul Lie infinit-dimensional» al tuturor difeomorfismelor varietății M**).

Pe de altă parte, comutatorul lui Lie se poate defini prin intermediul parantezei lui Poisson a cîmpurilor de vectori pe grupul Lie G.

Fie $g \in G$. Se numește translația la dreapta R_g aplicația $R_g : G \to G$, $R_g h = hg$. Diferențiala aplicației R_g în punctul e aplică spațiul tangent TG_e pe TG_g. Prin urmare, fiecărui vector $\mathbf{A} \in TG_g$ îi corespunde un întreg cîmp de vectori pe grup: acesta asociază fiecărui punct $g \in G$ vectorul $(R_g)_* \mathbf{A} \in TG_g$ și se numește *cîmp invariant la dreapta*. Evident, orice cîmp de vectori invariant la dreapta pe G este univoc definit de valoarea sa în elementul unitate.

*) Semnul din definiția parantezei lui Poisson a două cîmpuri de vectori a fost ales plecînd de la această interpretare.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că paranteza lui Poisson a două cîmpuri de vectori invariante la dreapta pe G este un cîmp invariant la dreapta şi că valoarea acestui cîmp în elementul unitate este egală cu comutatorul lui Poisson al valorilor cîmpurilor iniţiale în elementul unitate.

§ 40. ALGEBRA LIE A FUNCŢIILOR LUI HAMILTON

Cîmpurile hamiltoniene de vectori pe o varietate simplectică formează o subalgebră Lie a algebrei Lie a tuturor cîmpurilor de vectori. Funcţiile lui Hamilton formează şi ele o algebră Lie: comutatorul din această algebră se numeşte paranteza lui Poisson a funcţiilor. Integralele prime ale unui curent hamiltonian formează o subalgebră Lie a algebrei Lie a tuturor funcţiilor lui Hamilton.

A. Paranteza lui Poisson a două funcţii. Fie (M^{2n}, ω^2) o varietate simplectică. Unei funcţii $H: M^{2n} \to \mathbf{R}$, definită pe această varietate simplectică, îi corespunde un grup cu un parametru*) $g_H^t: M^{2n} \to M^{2n}$ de transformări canonice ale varietăţii M^{2n} — curentul a cărei funcţie Hamilton este egală cu H.

Fie $F: M^{2n} \to \mathbf{R}$ o altă funcţie definită pe varietatea M^{2n}.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *paranteza lui Poisson* (F, H) *a funcţiilor F şi H* definite pe varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2) derivata funcţiei F în direcţia dată de curentul hamiltonian cu funcţia lui Hamilton H

$$(F, H)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(g_H^t(x)).$$

Prin urmare, paranteza lui Poisson a două funcţii pe M este şi ea o funcţie pe M.

Corolarul 1. *Funcţia F este integrală primă a curentului cu funcţia lui Hamilton H dacă şi numai dacă paranteza lui Poisson a lui F cu H este identic nulă*: $(H, F) \equiv 0$.

Putem defini şi în alt mod paranteza lui Poisson, utilizînd izomorfismul I dintre 1-formele diferenţiale şi cîmpurile de vectori pe varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2). Acest izomorfism este definit de relaţia (vezi § 37):

$$\omega^2(\boldsymbol{\eta}, I\alpha^1) = \alpha^1(\boldsymbol{\eta}).$$

Cîmpul vectorial al vitezelor curentului g_H^t este $I\,dH$ şi obţinem

*) În general, numai nişte curenţi locali. Definiţiile funcţionează însă perfect şi în cazul general, fiind locale. *(N. T.)*.

Corolarul 2. *Paranteza lui Poisson a funcţiilor F şi H este egală cu valoarea 1-formei diferenţiale dF pe cîmpul de vectori hamiltonian $I\,dH$ cu funcţia lui Hamilton H*:

$$(F, H) = dF(I\,dH).$$

Utilizînd formula precedentă obţinem încă o dată

Corolarul 3. *Paranteza lui Poisson a funcţiilor F şi H este egală cu «produsul scalar antisimetric» al cîmpurilor vectoriale ale vitezelor curenţilor cu funcţiile lui Hamilton H şi F*:

$$(F, H) = \omega^2(I\,dH, I\,dF).$$

Acum a devenit evident

Corolarul 4. *Paranteza lui Poisson a funcţiilor F şi H este o funcţională biliniară şi antisimetrică de F şi H*:

$$(F, H) = -(H, F),$$

$$(H, \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 (H, F_1) + \lambda_2 (H, F_2) \quad (\lambda_i \in \mathbf{R}).$$

Chiar dacă raţionamentele de mai sus sînt destul de evidente, ele conduc la concluzii netriviale, cum ar fi următoarea generalizare a teoremei lui E. Noether.

Teoremă. *Dacă funcţia lui Hamilton H definită pe varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2) este conservată de grupul cu un parametru de transformări canonice dat de hamiltonianul F, atunci F este integrală primă a sistemului cu funcţia lui Hamilton H.*

Într-adevăr, prin ipoteză, H este integrală primă a curentului g_F^t şi deci $(F, H) = 0$ (corolarul 1). Din corolarul 4 rezultă $(H, F) = 0$ şi deci F este integrală primă (corolarul 1), c.c.t.d.

P r o b l e m a 1. Să se calculeze paranteza lui Poisson a două funcţii F şi H în spaţiul numeric $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$, cu structura simplectică $\omega^2(\xi, \boldsymbol{\eta}) = (I\xi, \boldsymbol{\eta})$.

R e z o l v a r e. Conform corolarului 3, avem

$$(F, H) = \omega^2(I\,dH, I\,dF) = \omega^2(\operatorname{grad} H, \operatorname{grad} F) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)$$

(utilizăm faptul că transformarea $I: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este simplectică şi că în baza $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ea are forma $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

P r o b l e m a 2. Să se calculeze parantezele lui Poisson ale funcțiilor coordonate p_i, q_i.

R e z o l v a r e. Gradienții funcțiilor coordonate formează o „bază simplectică" ; produsele lor scalare antisimetrice sînt

$$(p_i, p_j) = (q_i, q_j) = (p_i, q_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$(q_i, p_i) = -(p_i, q_i) = 1.$$

P r o b l e m a 3. Să se demonstreze că *o aplicație* $A : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ *este canonică dacă și numai dacă pentru orice două funcții definite pe* $\mathbf{R}^{2n}$ *parantezele lor Poisson în coordonatele* $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *și* $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ *coincid :*

$$(F, H)_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = (F, H)_{\mathbf{P},\mathbf{Q}}.$$

R e z o l v a r e. Fie A o transformare canonică. Atunci structurile simplectice $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ și $d\mathbf{P} \wedge d\mathbf{Q}$ coincid. Prin definiție, paranteza lui Poisson (F, H) este legată în mod invariant de structura simplectică și nu de coordonate. Rezultă că

$$(F, H)_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = (F, H) = (F, H)_{\mathbf{P},\mathbf{Q}}.$$

Reciproc, să presupunem că parantezele lui Poisson $(P_i, P_j)_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, \ldots, (P_i, Q_i)_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ au forma standard din problema 2. Atunci este evident că $d\mathbf{P} \wedge d\mathbf{Q} = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ și deci transformarea A este canonică.

P r o b l e m a 4. Să se demonstreze că *paranteza lui Poisson a unui produs de funcții cu o altă funcție se calculează după regula lui Leibniz:*

$$(F_1 F_2, H) = F_1 (F_2, H) + F_2 (F_1, H).$$

I n d i c a ț i e. Paranteza lui Poisson (F_1F_2, H) este derivata funcției F_1F_2 în direcția cîmpului de vectori $I\, dH$.

B. Identitatea lui Jacobi.

Teoremă. *Parantezele lui Poisson a trei funcții arbitrare F, G, H satisfac identitatea lui Jacobi :*

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0.$$

Corolar. Teorema lui Poisson. *Paranteza lui Poisson (F_1, F_2) a două integrale prime F_1 și F_2 ale sistemului cu funcția lui Hamilton H este și ea integrală primă.*

D e m o n s t r a ț i a c o r o l a r u l u i. Conform identității lui Jacobi

$$((F_1, F_2), H) = (F_1,(F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = 0 + 0 = 0,$$

c.c.t.d.

Prin urmare, cunoscînd două integrale prime, se poate construi prin calcule simple o a treia, apoi o a patra ș.a.m.d. Evident, nu toate integralele prime astfel obținute vor fi esențial noi, deoarece numărul maxim de funcții independente pe M^{2n} nu este mai mare decît $2n$. Uneori se obține o funcție de integralele prime vechi, alteori o constantă, de exemplu, zero. Există însă cazuri cînd se obține și o nouă integrală primă.

P r o b l e m ă. Să se calculeze parantezele lui Poisson ale componentelor p_1, p_2, p_3, respectiv M_1, M_2, M_3 ale vectorului impuls, respectiv moment cinetic, ale unui sistem mecanic.

Răspuns. $(M_1, M_2) = M_3$, $(M_1, p_1) = 0$, $(M_1, p_2) = p_3$, $(M_1, p_3) = -p_2$.

Rezultă următoarea

Teoremă. *Dacă într-o problemă de mecanică se conservă două componente M_1 și M_2 ale momentului cinetic, atunci se conservă și a treia.*

D e m o n s t r a ț i a i d e n t i t ă ț i i l u i J a c o b i. Să considerăm suma

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G).$$

Această sumă este o „combinație liniară de derivate parțiale de ordinul al doilea" ale funcțiilor F, G, H. Să determinăm termenii care conțin derivatele de ordinul doi ale lui F :

$$((F, G), H) + ((H, F), G) = (L_{\mathbf{H}} L_{\mathbf{G}} - L_{\mathbf{G}} L_{\mathbf{H}})\, F,$$

unde $L_{\boldsymbol{\xi}}$ este derivarea în direcția lui $\boldsymbol{\xi}$, iar $\mathbf{F}$ (respectiv $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$) este cîmpul hamiltonian cu funcția lui Hamilton F (respectiv G, H).

Dar, conform lemei 2, § 39, comutatorul derivărilor $L_{\mathbf{H}} L_{\mathbf{G}} - L_{\mathbf{G}} L_{\mathbf{H}}$ este un operator diferențial de ordinul întîi. Prin urmare, suma noastră nu conține nici un fel de derivate de ordinul al doilea ale lui $\mathbf{F}$. Același lucru este valabil și pentru derivatele de ordinul al doilea ale lui G și H. Prin urmare, suma este egală cu zero, c.c.t.d.

Corolarul 5. *Fie $\mathbf{F} = I\, dF$ și $\mathbf{G} = I\, dG$ cîmpurile hamiltoniene cu funcțiile Hamilton F și G. Să considerăm paranteza Poisson a cîmpurilor $\mathbf{F}$ și $\mathbf{G}$, $[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$. Acest cîmp este hamiltonian și funcția lui Hamilton este egală cu paranteza lui Poisson $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ a celor două funcții $\mathbf{F}$ și G.*

D e m o n s t r a ţ i e . Să punem $(F, G) = H$. Identitatea lui Jacobi se poate scrie astfel

$$(F, H) = ((F, G), H) - ((F, H), G),$$

$$L_{\mathbf{H}} = L_{\mathbf{G}} L_{\mathbf{F}} - L_{\mathbf{F}} L_{\mathbf{G}}, \; L_{\mathbf{H}} = L_{[\mathbf{F},\mathbf{G}]},$$

$$\mathbf{H} = I\, \mathrm{d}H.$$

C. Algebrele Lie de cîmpuri hamiltoniene, funcţii Hamilton şi integrale prime. Un subspaţiu liniar al unei algebre Lie se numeşte *subalgebră* dacă comutatorul oricăror două elemente din subspaţiu este un element care îi aparţine. O subalgebră a unei algebre Lie este ea însăşi o algebră Lie. Corolarul precedent conţine, în particular, şi

Corolarul 6. *Cîmpurile hamiltoniene pe o varietate simplectică formează o subalgebră Lie a algebrei Lie a tuturor cîmpurilor de vectori.*

Teorema lui Poisson privind integralele prime poate fi reformulată în modul următor :

Corolarul 7. *Integralele prime ale unui curent hamiltonian formează o subalgebră Lie a algebrei Lie a tuturor funcţiilor.*

Algebra Lie a funcţiilor lui Hamilton poate fi aplicată natural pe algebra Lie a cîmpurilor de vectori hamiltoniene. Pentru aceasta, fiecărei funcţii H i se pune în corespondenţă cîmpul de vectori hamiltonian $\mathbf{H} = I\, \mathrm{d}H$ cu funcţia lui Hamilton H.

Corolarul 8. *Aplicaţia algebrei Lie a funcţiilor pe algebra Lie a cîmpurilor hamiltoniene este un omomorfism de algebre, al cărui nucleu este format din funcţiile local constante. Dacă M^{2n} este conexă, atunci nucleul este unidimensional şi este format din funcţiile constante.*

Într-adevăr, aplicaţia de care vorbim este liniară. În plus, corolarul 5 afirmă că ea transformă paranteza lui Poisson a funcţiilor în paranteza lui Poisson a cîmpurilor de vectori. Nucleul său este format din funcţiile H pentru care $I\, \mathrm{d}H \equiv 0$. Deoarece I este un izomorfism $\mathrm{d}H \equiv 0$ şi H este local constantă, c.c.t.d.

Corolarul 9. *Doi curenţi hamiltonieni cu funcţiile lui Hamilton H_1 şi H_2 comută dacă şi numai dacă paranteza lui Poisson a funcţiilor H_1 şi H_2 este (local) constantă.*

Conform teoremei de la punctul E, § 39, condiţia necesară şi suficientă ca cei doi curenţi să comute este $[\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2] \equiv 0$. Conform corolarului 8, ultima condiţie este echivalentă cu $\mathrm{d}(H_1, H_2) \equiv 0$.

Obţinem în acest mod o nouă generalizare a teoremei lui E. Noether : *dacă cunoaştem un curent care comută cu cel studiat, atunci se poate construi o integrală primă.*

D. Cîmpuri de vectori local hamiltoniene. Fie (M^{2n}, ω^2) o varietate simplectică şi $g^t : M^{2n} \to M^{2n}$ un grup cu un parametru de difeomorfisme care conservă structura simplectică (difeomorfisme canonice). Este g^t un curent hamiltonian?

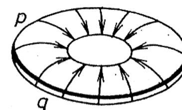


Fig. 173. Cîmp local hamiltonian pe un tor.

E x e m p l u. Fie M^{2n} torul de dimensiune doi T^2, ale cărui puncte sînt date de perechile de coordonate (p, q) mod 1. Fie ω^2 elementul de arie uzual $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$. Să considerăm familia de translaţii $g^t(p, q) = (p + t, q)$ (fig. 173). Aplicaţiile g^t conservă structura simplectică (adică elementul de arie). Se poate defini oare cîmpul de vectori corespunzător $(\dot{p} = 1, \; \dot{q} = 0)$ cu o funcţie a lui Hamilton? Dacă am avea $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, ar rezulta $\dfrac{\partial H}{\partial p} = 0$, $\dfrac{\partial H}{\partial q} = -1$ şi deci $H = -q + C$, $C \equiv$ const. Cum însă q este numai o coordonată locală pe T^2, nu există o funcţie $H : T^2 \to R$ pentru care $\dfrac{\partial H}{\partial p} = 0$, $\dfrac{\partial H}{\partial q} = -1$. Prin urmare, g^t nu este un curent hamiltonian.

D e f i n i ţ i e . Se numeşte *cîmp vectorial local hamiltonian* pe varietatea simplectică (M^{2n}, ω^2) orice cîmp vectorial de forma $I\alpha^1$ unde α^1 este o 1-formă închisă pe M^{2n}.

Local, orice 1-formă închisă este diferenţiala unei funcţii : $\alpha^1 = \mathrm{d}H$. În cazul în care se încearcă prelungirea funcţiei H la întreaga varietate se poate obţine o „funcţie a lui Hamilton multiformă". Într-adevăr, pe o varietate care nu este simplu conexă, o 1-formă poate să nu fie o diferenţială exactă (de exemplu, forma $\mathrm{d}q$ pe T^2).

Un curent definit de un cîmp de vectori local hamiltonian se numeşte *curent local hamiltonian.*

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *un grup cu un parametru de difeomorfisme ale unei varietăţi simplectice conservă structura simplectică dacă şi numai dacă este un curent local hamiltonian.*

I n d i c a ţ i e. Vezi § 38, A.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *în spaţiul simplectic $\mathbf{R}^{2n}$ orice grup cu un parametru de difeomorfisme canonice (care conservă forma $\mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{q}$) este un curent hamiltonian.*

I n d i c a ţ i e. Pe $\mathbf{R}^{2n}$, orice 1-formă diferenţială închisă este diferenţiala unei funcţii.

Problemă. Să se demonstreze că *mulţimea cîmpurilor de vectori local hamiltoniene este o subalgebră Lie a algebrei Lie a tuturor cîmpurilor. În plus, paranteza lui Poisson a oricăror două cîmpuri local hamiltoniene este un cîmp hamiltonian adevărat, a cărui funcţie Hamilton este univoc*) definită de cîmpurile date* ξ *şi* η *prin formula* $H = \omega^2(\xi, \eta)$.

Prin urmare, cîmpurile hamiltoniene formează un *ideal* în algebra Lie a cîmpurilor local hamiltoniene.

§ 41. GEOMETRIE SIMPLECTICĂ

O structură euclidiană pe un spaţiu liniar este definită de o formă biliniară simetrică, iar o structură simplectică— de una antisimetrică. Geometria unui spaţiu simplectic se deosebeşte de aceea a unuia euclidian într-un mod care înviorează gîndirea, deşi există multe trăsături comune.

A. Spaţiul liniar simplectic. Fie $\mathbf{R}^{2n}$ un spaţiu liniar de dimensiune pară.

Definiţie. Se numeşte *structură simplectică liniară* pe $\mathbf{R}^{2n}$ o 2-formă biliniară antisimetrică şi nedegenerată**), definită pe $\mathbf{R}^{2n}$. Această formă se mai numeşte şi *produs scalar antisimetric* şi se notează în continuare cu $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$***).

Un spaţiu liniar real $\mathbf{R}^{2n}$ împreună cu o structură simplectică $[,]$ se numeşte *spaţiu liniar simplectic*.

Exemplu. Fie $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ coordonatele în $\mathbf{R}^{2n}$ şi 2-forma

$$\omega^2 = p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n.$$

Deoarece această formă este antisimetrică şi nedegenerată, ea poate fi luată ca produs scalar antisimetric: $[\xi, \eta] = \omega^2(\xi, \eta)$. În acest mod, spaţiul numeric $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ este înzestrat cu o structură simplectică care se numeşte structura simplectică *standard* pe $\mathbf{R}^{2n}$. În raport cu structura simplectică standard, produsul scalar antisimetric a doi vectori ξ şi η este egal cu suma ariilor orientate ale proiecţiilor paralelogramului determinat de perechea (ξ, η) pe cele n plane de coordonate (p_i, q_i).

*) Şi nu numai pînă la o constantă.

**) O 2-formă $[,]$ pe $\mathbf{R}^{2n}$ este nedegenerată dacă $([\xi, \eta] = 0, \forall \eta) \Rightarrow (\xi = 0)$.

***) Atenţie! Nu confundaţi cu paranteza lui Poisson. *(N.T.)*.

Într-un spaţiu liniar simplectic doi vectori ξ şi η se numesc *antiortogonali* (şi se notează $\xi \angle \eta$) dacă produsul lor scalar antisimetric este nul.

Problemă. Să se arate că $\xi \angle \xi$: *orice vector este antiortogonal pe el însuşi.*

Mulţimea tuturor vectorilor antiortogonali pe un vecor dat ξ se numeşte *complementul antiortogonal al lui* ξ.

Problemă. Să se demonstreze că complementul antiortogonal al lui ξ este un hiperplan de dimensiune $2n-1$, care îl conţine pe ξ.

Indicaţie. Dacă toţi vectorii ar fi antiortogonali pe ξ, aunci forma $[\ ,\ ]$ ar fi degenerată.

B. Baza simplectică. Printr-o alegere adecvată a bazei (ea trebuie să fie ortonormată) o structură euclidiană este dată de un produs scalar de o formă canonică specială.

În mod analog, şi o structură simplectică capătă forma standard indicată mai sus, într-o bază adecvată.

Problemă. Să se determine produsele scalare antisimetrice pentru vectorii $\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ din bază pentru exemplul dat mai sus.

Rezolvare. Din definiţia formei $p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n$ rezultă

$$[\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{p_j}] = [\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_j}] = [\mathbf{e}_{q_i}, \mathbf{e}_{q_j}] = 0, \quad i \neq j, \tag{1}$$

$$[\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_i}] = 1.$$

Să ne întoarcem acum la un spaţiu liniar simplectic arbitrar.

Definiţie. Se numeşte *bază simplectică* un ansamblu de $2n$ vectori $\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ pentru care produsele scalare antisimetrice au forma (1).

Cu alte cuvinte, *orice vector din bază este antiortogonal pe toţi vectorii din bază, cu excepţia unuia singur, care îi este conjugat; produsul scalar antisimetric al vectorilor conjugaţi este egal cu* ± 1.

Teoremă. *În orice spaţiu simplectic există o bază simplectică. În plus, ca prim vector al bazei poate fi luat orice vector nenul* $\mathbf{e}$.

Această teoremă este complet analoagă teoremei corespunzătoare din geometria euclidiană şi se demonstrează aproape la fel.

Deoarece vectorul $\mathbf{e}$ este nenul, există un vector $\mathbf{f}$ antiortogonal pe el (forma $[\ ,\ ]$ este nedegenerată). Prin alegerea lungimii acestui vector se poate face ca produsul lui scalar antisimetric cu $\mathbf{e}$ să fie egal cu 1. În cazul $n = 1$, teorema este adevărată.

Dacă $n \neq 1$, să considerăm complementul antiortogonal D (fig. 174) la perechea de vectori **e**, **f**. D este intersecția complementului antiortogonal al lui **e** cu complementul antiortogonal al lui **f**. Aceste două subspații $(2n-1)$-dimensionale nu coincid, deoarece **e** nu este un element al complementului antiortogonal al lui **f**. Prin urmare, intersecția lor este de dimensiune pară $2n-2$.

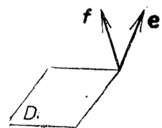


Fig. 174. Complementara antiortogonală.

Să arătăm că D este un subspațiu simplectic al lui $\mathbf{R}^{2n}$, deci că restricția produsului scalar antisimetric [,] la D este nedegenerată. Într-adevăr, dacă vectorul $\xi \in D$ ar fi antiortogonal la întreg spațiul D, atunci, fiind antiortogonal la **e** și **f**, ar fi antiortogonal la întregul spațiu $\mathbf{R}^{2n}$, ceea ce ar contrazice faptul că produsul [,] pe $\mathbf{R}^{2n}$ este nedegenerat. Prin urmare, $D = D^{2n-2}$ este un spațiu simplectic.

Dacă se adaugă acum vectorii **e** și **f** la o bază simplectică în D^{2n-2}, se obține o bază simplectică în $\mathbf{R}^{2n}$ și deci demonstrația teoremei se poate încheia printr-o inducție după dimensiunea n.

Corolar. *Toate spațiile liniare simplectice de aceeași dimensiune sînt izomorfe.*

Dacă se iau vectorii dintr-o bază simplectică ca versori ai axelor de coordonate, atunci se obține un sistem de coordonate p_i, q_i, în care [,] capătă forma standard $p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n$. Un sistem de coordonate de acest tip se numește *simplectic*.

C. Grupul simplectic. De structura euclidiană este legat grupul ortogonal al transformărilor liniare care conservă structura euclidiană. Într-un spațiu simplectic, un rol analog este jucat de *grupul simplectic*.

Definiție. O transformare liniară $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ a unui spațiu liniar simplectic $\mathbf{R}^{2n}$ în el însuși se numește *simplectică* dacă ea conservă produsul scalar antisimetric:

$$[S\xi, S\eta] = [\xi, \eta], \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Mulțimea tuturor transformărilor simplectice ale lui $\mathbf{R}^{2n}$ se numește *grupul simplectic* și se notează cu Sp $(2n)$.

Este evident că prin compunerea a două transformări simplectice se obține tot una simplectică. Pentru a justifica denumirea de grup simplectic, trebuie să arătăm că orice transformare simplectică este nedegenerată (inversabilă): atunci este clar că inversa ei este tot o transformare simplectică.

Problemă. Să se demonstreze că grupul Sp (2) este izomorf cu grupul matricilor reale de ordinul doi cu determinantul 1 și este homeomorf cu interiorul tridimensional al unui tor plin (covrig).

Teoremă. *O transformare $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ a spațiului liniar simplectic standard $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ este simplectică dacă și numai dacă ea este liniară și canonică, adică conservă 2-forma diferențială*

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

Demonstrație. Cînd se identifică în mod canonic spațiul tangent într-un punct la $\mathbf{R}^{2n}$ cu $\mathbf{R}^{2n}$, 2-forma ω^2 trece în [,].

Corolar. *Determinantul oricărei transformări simplectice este egal cu* 1.

Demonstrație. Am văzut (§ 38, B) că o transformare canonică conservă puterile exterioare ale formei ω^2. Dar puterea exterioară a n-a este (pînă la un factor constant) elementul de volum al lui $\mathbf{R}^{2n}$. Prin urmare, o transformare simplectică S a spațiului standard $\mathbf{R}^2 = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ conservă elementul de volum și deci $\det S = 1$.

Cum însă fiecare structură simplectică liniară se scrie în forma canonică într-un sistem simplectic de coordonate, determinantul unei transformări canonice a oricărui spațiu simplectic este egal cu 1.

Teoremă. *O transformare liniară $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este simplectică dacă și numai dacă ea transformă o bază simplectică (și atunci orice bază simplectică) într-o bază simplectică.*

Demonstrație. Produsul scalar antisimetric a două combinații liniare de vectori ai unei baze se exprimă prin produsele scalare antisimetrice ale vectorilor din bază. Dacă transformarea S nu schimbă produsele scalare antisimetrice ale vectorilor din bază, atunci ea conservă și produsele scalare antisimetrice ale tuturor vectorilor c.c.t.d.

D. Plane într-un spațiu simplectic. În spațiul euclidian, toate planele sînt echivalente: fiecare din ele poate fi transformat în oricare altul printr-o mișcare*).

*) Transformare euclidiană. *(N. T.)*

Să analizăm din acest punct de vedere spaţiul liniar simplectic.

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că un *vector nenul al spaţiului simplectic poate fi transformat în orice alt vector nenul printr-o transformare simplectică.*

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că *nu orice plan de dimensiune 2 al spaţiului simplectic* $\mathbf{R}^{2n}$, $n > 1$, *poate fi transformat într-un 2-plan dat printr-o transformare simplectică.*

I n d i c a ţ i e . Se consideră planele (p_1, p_2) şi (p_1, q_2).

D e f i n i ţ i e. Un subspaţiu k-dimensional (k-plan) al spaţiului simplectic se numeşte *nul**) dacă este antiortogonal pe el însuşi, adică produsul scalar antisimetric a oricare doi vectori din k-plan este nul.

E x e m p l u. Subspaţiul de coordonate $(p_1, \ldots, p_k)$ în sistemul simplectic de coordonate $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ este nul (să se demonstreze!).

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că orice plan de dimensiune doi neizotrop poate fi transformat în orice alt plan de dimensiune doi neizotropi printr-o transformare simplectică.

Pentru a face calcule în cadrul geometriei simplectice este util să se introducă în spaţiul simplectic şi o structură euclidiană oarecare. Vom fixa un sistem simplectic de coordonate $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ şi vom ntroduce structura euclidiană cu ajutorul produsului scalar exprimat în coordonate prin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum (\mathbf{p}_i^2 + \mathbf{q}_i^2), \text{ unde } \mathbf{x} = \sum (p_i \mathbf{e}_{p_i} + q_i \mathbf{e}_{q_i}).$$

Relativ la această structură euclidiană, baza simplectică $\mathbf{e}_\mathbf{p}$, $\mathbf{e}_\mathbf{q}$ este ortonormată. Produsul scalar antisimetric, la fel ca oricare altă formă biliniară, se exprimă prin cel scalar sub forma

$$[\xi, \eta] = (I\,\xi, \eta), \tag{2}$$

unde $I : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este un operator liniar. Cum produsul scalar antisimetric este într-adevăr antisimetric, operatorul I este şi el antisimetric.

P r o b l e m ă. Să se determine matricea operatorului I în baza simplectică $e_{\mathbf{p}_i}, e_{\mathbf{q}_i}$

Răspuns. $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, unde E este matricea unitate de ordinul n.

*) Subspaţiile nule se mai numesc şi *izotrope*, iar pentru $k = n$, *lagrangeene*. (Am preferat aceste denumiri. *(N. T.)*)

Prin urmare, pentru $n = 1$ (în planul p, q) I este pur şi simplu rotaţia cu 90°, iar în cazul general, I este rotaţia cu 90° în fiecare din cele n plane p_i, q_i.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că operatorul I este simplectic şi că $I^2 = -E_{2n}$.

Deşi într-un spaţiu simplectic structura euclidiană şi operatorul I sînt legate de structura simplectică într-un mod neinvariant ele sînt adesea utile.

Din (2) rezultă în mod direct următoarea

Teoremă. *Un plan π în spaţiul simplectic este izotrop dacă şi numai dacă planul $I\pi$ este ortogonal pe π.*

Să observăm că dimensiunile planelor π şi $I\pi$ coincid, operatorul I fiind nedegenerat. Rezultă un

Corolar. *Dimensiunea unui plan izotrop în $\mathbf{R}^{2n}$ nu întrece pe n.*

Într-adevăr, două plane k-dimensionale π şi $I\pi$ în $\mathbf{R}^{2n}$ nu pot fi ortogonale dacă $k > n$.

Să studiem mai amănunţit planele n-dimensionale izotrope în spaţiul simplectic numeric $\mathbf{R}^{2n}$. Un exemplu de astfel de plan este planul coordonatelor $\mathbf{p}$. În total, în $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ există C_{2n}^n plane de coordonate de dimensiune n.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că printre cele C_{2n}^n plane de coordonate de dimensiune n există exact 2^n care sînt izotrope. Mai precis, fiecăreia din cele 2^n partiţii posibile ale mulţimii $(1, \ldots, n)$ în două părţi $(i_1, \ldots, i_k)$, $(j_1, \ldots, j_{n-k})$ îi corespunde planul izotrop de coordonate $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{n-k}}$.

Pentru a studia funcţiile generatoare ale transformărilor canonice ne este necesară următoarea

Teoremă. *Fiecare plan n-dimensional izotrop (lagrangean) π în spaţiul simplectic numeric $\mathbf{R}^{2n}$ este transversal*) la cel puţin unul din cele 2^n plane de coordonate lagrangeene.*

D e m o n s t r a ţ i e . Fie P planul izotrop $p_1, \ldots, p_n$ (fig. 175). Să considerăm intersecţia $\tau = \pi \cap P$.

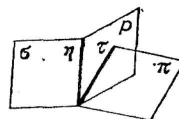


Fig. 175. Construcţia unui plan de coordonate σ transversal la un plan π dat.

*) Două subspaţii L_1 şi L_2 ale spaţiului liniar L sînt *transversale* dacă $L_1 + L_2 = L$. Două plane n-dimensionale în $\mathbf{R}^{2n}$ sînt transversale dacă şi numai dacă intersecţia lor se reduce la punctul 0.

Fie k dimensiunea lui τ, $0 \leqslant k \leqslant n$. La fel ca orice subspaţiu de dimensiune k al spaţiului P de dimensiune n, planul τ este transversal la cel puţin un plan de coordonate de dimensiune $n-k$ din P; fie acest plan

$$\eta = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_{n-k}}); \tau + \eta = P, \tau \cap \eta = 0.$$

Construim planul de coordonate de dimensiune n

$$\sigma = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_{n-k}}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_k}), \ \eta = \sigma \cap P$$

şi arătăm că planul nostru π este transversal la σ

$$\pi \cap \sigma = 0.$$

Într-adevăr, avem

$$\left.\begin{array}{l} \tau \subset \pi, \pi \perp \pi \Rightarrow \tau \perp \pi \\ \eta \subset \sigma, \sigma \perp \sigma \Rightarrow \eta \perp \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow (\tau + \eta) \perp (\pi \cap \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \perp (\pi \cap \sigma).$$

Dar P este un plan izotrop de dimensiune n şi deci orice vector antiortogonal la P este conţinut în P (vezi corolarul de mai sus). Prin urmare $(\pi \cap \sigma) \subset P$. În final,

$$\pi \cap \sigma = (\pi \cap P) \cap (\sigma \cap P) = \tau \cap \eta = 0,$$

c.c.t.d.

Problemă. Fie π_1 şi π_2 două plane de dimensiune k în spaţiul simplectic $\mathbf{R}^{2n}$. Există totdeauna o transformare simplectică care transformă pe π_1 în π_2? Cîte clase de plane care nu se pot transforma unul în altul există?

Răspuns. $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$, dacă $k \leqslant n$;

$$\left[\frac{2n-k}{2}\right] + 1, \text{ dacă } k \geqslant n.$$

E. Structura simplectică şi structura complexă. Deoarece $I^2 = -E$, putem introduce în spaţiul nostru $\mathbf{R}^{2n}$ cu structura simplectică [,] şi structura euclidiană (,) o structură complexă, definind înmulţirea cu $i = \sqrt{-1}$ ca acţiunea operatorului I. Spaţiul $\mathbf{R}^{2n}$ se identifică în acest mod cu spaţiul complex $\mathbf{C}^n$ (sau, mai concret, dacă este necesar, cu spaţiul numeric cu coordonatele $z_k = p_k + iq_k$).

Transformările liniare ale lui $\mathbf{R}^{2n}$ care conservă structura euclidiană formează *grupul ortogonal* $O(2n)$, iar cele care conservă structura complexă — *grupul liniar complex* $GL(n, \mathbf{C})$.

Problemă. Să se demonstreze că transformările care sînt în acelaşi timp ortogonale şi simplectice sînt complexe, că cele complexe şi ortogonale sînt simplectice, iar cele simplectice şi complexe sînt ortogonale astfel încît intersecţia oricăror două grupuri din cele trei puse în evidenţă este egală cu intersecţia tuturora:

$$O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbf{C}) = GL(n, \mathbf{C}) \cap O(2n).$$

Intersecţia lor se numeşte *grupul unitar* $U(n)$.

Transformările unitare conservă produsul scalar hermitian $(\xi, \eta) + i[\xi, \eta]$. Produsul scalar şi cel scalar antisimetric în $\mathbf{R}^{2n}$ sînt partea reală, respectiv imaginară a acestui produs hermitian.

§ 42. REZONANŢA PARAMETRICĂ ÎN SISTEME CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Atunci cînd am studiat sistemele oscilante cu parametri care variază periodic (vezi § 25) am pus în evidenţă faptul că rezonanţa parametrică depinde de comportarea valorilor proprii ale unei anumite transformări liniare („evoluţia după o perioadă"). Această dependenţă se manifestă prin stabilitatea (respectiv instabilitatea) poziţiei de echilibru a unui sistem cu parametri care variază periodic în cazul în care toate valorile proprii ale evoluţiei după o perioadă sînt mai mici în modul ca 1 (respectiv în cazul în care există cel puţin o valoare proprie mai mare în modul ca 1).

Evoluţia după o perioadă corespunzătoare unui sistem de ecuaţii ale lui Hamilton cu coeficienţi periodici este o transformare simplectică. Studiul rezonanţei parametrice în sisteme cu un grad de libertate, efectuat în § 25, se baza pe analiza comportării valorilor proprii ale transformărilor simplectice ale planului $\mathbf{R}^2$.

În paragraful de faţă vom analiza în mod similar comportarea valorilor proprii ale transformărilor simplectice ale unui spaţiu de faze de dimensiune arbitrară. Rezultatele acestei analize (care îi aparţine lui M. G. Krein) se aplică în determinarea condiţiilor de apariţie a rezonanţei parametrice în sisteme mecanice cu mai multe grade de libertate.

A. Matrici simplectice. Să considerăm o transformare *liniară* a spaţiului simplectic, $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$. Fie $p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n$

un sistem simplectic de coordonate. Relativ la acest sistem de coordonate transformarea este dată de o matrice S.

Teoremă. *O condiție necesară și suficientă pentru ca o transformare să fie simplectică este ca matricea S corespunzătoare transformării în sistemul simplectic de coordonate* $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *să satisfacă relația*

$$S'IS = I,$$

unde $I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, *iar* S' *este transpusa matricii* S.

D e m o n s t r a ț i e. Condiția ca o transformare să fie simplectică ($[S\,\xi, S\,\eta] = [\xi, \eta]$ pentru orice ξ și η) se scrie cu ajutorul operatorului I și a produsului scalar euclidian sub forma

$$(IS\,\xi,\ S\,\eta) = (I\,\xi, \eta),\ \forall\,\xi, \eta,$$

sau

$$(S'IS\,\xi, \eta) = (I\,\xi, \eta),\quad \forall\,\xi, \eta,$$

c.c.t.d.

B. Simetria spectrului unei transformări simplectice.

Teoremă. *Polinomul caracteristic al unei transformări simplectice*

$$p(\lambda) = \det\,(S - \lambda\,E)$$

este reciproc), adică* $p(\lambda) = \lambda^{2n}\ p(1/\lambda)$.

D e m o n s t r a ț i e. Vom utiliza relațiile $\det S = \det I = 1$, $I^2 = -E$ și $\det A' = \det A$. Din teorema precedentă $S = -IS'^{-1}I$ și deci $p(\lambda) = \det\,(S - \lambda E) = \det\,(-IS'^{-1}I - \lambda E) = \det\,(-S'^{-1} + \lambda E) = \det\,(-E + \lambda S) = \lambda^{2n}\det\left(S - \frac{1}{\lambda}E\right) = \lambda^{2n}\,p\left(\frac{1}{\lambda}\right)$,

c.c.t.d.

Corolar. *Dacă λ este valoarea proprie a unei transformări simplectice, atunci și $\frac{1}{\lambda}$ este valoare proprie.*

---

*) Se numește *reciproc* un polinom $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ ai cărui coeficienți sînt simetrici : $a_0 = a_m$, $a_1 = a_{m-1}$, ...

Pe de altă parte, polinomul caracteristic este real și deci dacă λ este valoare proprie complexă, atunci $\bar{\lambda}$ este o valoare proprie diferită de λ.

Prin urmare, toate rădăcinile λ ale polinomului caracteristic sînt așezate simetric atît în raport cu axa reală, cît și cu cercul unitate (fig. 176). Ele se grupează în cvadruplete

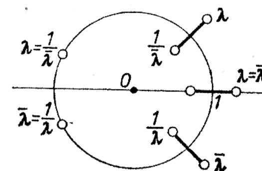


Fig. 176. Așezarea valorilor proprii ale unei aplicații simplectice.

$$\lambda,\ \bar{\lambda},\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\bar{\lambda}}\quad (|\lambda| \neq 1,\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$$

și perechi, așezate pe axa reală :

$$\lambda = \bar{\lambda},\ \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

sau pe cercul unitate :

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}},\ \bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Se observă ușor că multiplicitățile celor patru puncte ale unui cvadruplet (sau celor două puncte ale unei perechi) sînt aceleași.

C. Stabilitate.

D e f i n i ț i e. Transformarea S se numește *stabilă* dacă

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : |\mathbf{x}| < \delta \Rightarrow |S^N\mathbf{x}| < \varepsilon,\quad \forall\,N > 0.$$

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *dacă cel puțin una din valorile proprii ale transformării simplectice S este situată în complementara cercului unitate $|\lambda| = 1$, S nu este stabilă.*

I n d i c a ț i e. Datorită simetriei pe care am arătat-o, dacă cel puțin una din valorile proprii se găsește în complementara cercului unitate, atunci există o valoare proprie în exteriorul $|\lambda| > 1$ al discului unitate; în subspațiul invariant corespunzător S este o „dilatare cu rotație".

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *dacă toate valorile proprii ale unei transformări liniare sînt distincte și situate pe cercul unitate, atunci transformarea este stabilă.*

I n d i c a ț i e. Se trece la o bază proprie.

D e f i n i ț i e. O transformare simplectică S se numește *tare stabilă* dacă orice transformare simplectică suficient de apropiată*) de S este stabilă.

În § 25 am stabilit că o transformare $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este tare stabilă dacă $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Teoremă. *Dacă toate cele $2n$ valori proprii ale transformării simplectice S sînt diferite și situate pe cercul unitate, atunci transformarea S este tare stabilă.*

D e m o n s t r a ț i e. Să includem cele $2n$ valori proprii λ în $2n$ vecinătăți disjuncte, simetrice în raport cu cercul unitate și axa reală (fig. 177). Cele $2n$ rădăcini ale polinomului caracteristic depind continuu de elementele matricii S. Prin urmare, dacă matricea S_1 este suficient de apropiată de S, atunci în fiecare din cele $2n$ vecinătăți ale celor $2n$ valori proprii ale lui S se găsește exact cîte o valoare proprie λ_1 a matricii S_1. Dacă însă măcar unul din punctele λ_1 nu ar fi situat pe cercul unitate, ci, de exemplu, în

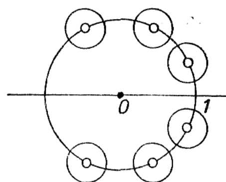


Fig. 177. Comportarea valorilor proprii simple la o variație mică a transformării simplectice.

interiorul său, atunci, în vecinătatea corespunzătoare ar mai exista încă o valoare proprie $\tilde{\lambda}_1$, $|\tilde{\lambda}_1| < 1$ și numărul total de valori proprii ar fi mai mare ca $2n$.

Prin urmare, toate valorile proprii ale lui S_1 sînt distincte și situate pe cercul unitate: S_1 este stabilă și teorema este demonstrată.

Se poate spune că o valoare proprie λ a unei transformări simplectice stabile poate părăsi cercul unitate numai ciocnindu-se

*) S_1 este „suficient de apropiată" de S dacă, într-o bază fixată, toate elementele matricii lui S_1 diferă în modul de elementele matricii lui S în aceeași bază cu mai puțin de ε, unde $\varepsilon > 0$ este un număr suficient de mic.

cu o altă valoare proprie (fig. 178); și anume se ciocnesc simultan și valorile proprii complex-conjugate respective și din două perechi de valori proprii se formează un cvadruplet (sau o pereche de valori proprii reale).

Din rezultatele obținute la § 25 rezultă: condiția de apariție a rezonanței parametrice într-un sistem canonic liniar cu o funcție a lui Hamilton care variază periodic (în timp) este aceea ca transformarea simplectică corespunzătoare a spațiului fazelor să devină

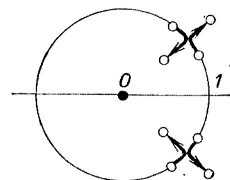


Fig. 178. Comportarea valorilor proprii multiple la o variație mică a transformării simplectice.

instabilă. Din teorema demonstrată se vede că acest fenomen poate avea loc numai prin ciocnirea valorilor proprii pe cercul unitate. În realitate însă, așa cum a arătat M. G. Krein, nu orice asemenea ciocnire este periculoasă.

Se poate arăta că valorile proprii λ, $|\lambda| = 1$, se împart în două clase: cele *pozitive* și cele *negative*. Prin ciocnirea a două valori proprii de același semn, valorile respective „trec una prin alta" și nu mai pot ieși de pe cercul unitate. Dimpotrivă, în general, cînd se ciocnesc două valori proprii de semne contrare, acestea părăsesc cercul unitate.

Teoria lui M. G. Krein depășind cadrul lucrării noastre, ne mulțumim să enunțăm aici sub formă de probleme rezultatele ei fundamentale.

P r o b l e m ă. Fie λ, $\bar{\lambda}$ valori proprii simple (de multiplicitate 1) ale transformării simpletice S, și $|\lambda| = 1$. Să se demonstreze că subspațiul bidimensional invariant π_λ corespunzător perechii λ, $\bar{\lambda}$ nu este izotrop.

I n d i c a ț i e. Fie ξ_1, ξ_2 vectori proprii complecși ai lui S corespunzători la două valori proprii λ_1 și λ_2. În acest caz, dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vectorii ξ_1 și ξ_2 sînt antiortogonali: $[\xi_1, \xi_2] = 0$.

Fie ξ un vector *real* din subspațiul π_λ, $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $|\lambda| = 1$. Valoarea proprie λ se numește *pozitivă* dacă $[S\xi, \xi] > 0$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că definiția este corectă: ea nu depinde de alegerea vectorului $\xi \neq 0$ din subspațiul π_λ.

I n d i c a ț i e. Dacă planul π_λ ar conține doi vectori antiortogonali necoliniari atunci el ar fi izotrop.

În mod analog, o valoare proprie $\lambda, |\lambda| = 1$, de multiplicitate k, este *de semn definit* (pozitiv sau negativ) dacă forma pătratică $[S\xi, \xi]$ este de semn definit în subspaţiul invariant de dimensiune $2k$ corespunzător lui λ şi $\bar{\lambda}$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că pentru ca transformarea S să fie tare stabilă este necesar şi suficient ca toate valorile ei proprii λ să fie situate pe cercul unitate şi să fie de semn definit.

I n d i c a ţ i e. Forma pătratică $[S\xi, \xi]$ este invariantă în raport cu S.

§ 43. ATLASUL SIMPLECTIC

Se demonstrează aici teorema lui Darboux care afirmă că pe orice varietate simplectică există coordonatele locale $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ în care structura simplectică se scrie în forma cea mai simplă : $\omega^2 = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{q}$.

A. Coordonate simplectice. Reamintim că în definiţia varietăţii diferenţiabile apare condiţia de compatibilitate a hărţilor. Aceasta este o condiţie impusă aplicaţiilor $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ de trecere dintr-o hartă în alta. Aplicaţiile $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ sînt aplicaţii între domenii ale spaţiului numeric.

D e f i n i ţ i e. Un atlas al varietăţii M^{2n} se numeşte *simplectic* dacă, considerînd că în spaţiul numeric $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ este introdusă structura simplectică standard $\omega^2 = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{q}$, trecerea de la o hartă a atlasului la alta se face prin transformarea $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ care este canonică (altfel spus, conservă forma ω^2)*).

P r o b l e m ă. Să se arate că un atlas simplectic defineşte o structură simplectică pe M^{2n}.

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă : *orice varietate simplectică are un atlas simplectic.* Ea rezultă din următoarea teoremă.

B. Teorema lui Darboux.

Teoremă. *Fie ω^2 o 2-formă diferenţială închisă şi nedegenerată, definită în vecinătatea unui punct* $\mathbf{x}$ *al spaţiului* $\mathbf{R}^{2n}$. *Atunci într-o vecinătate a punctului* $\mathbf{x}$ *se poate alege un sistem local de coordonate* $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ *în care forma să capete expresia standard*

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i.$$

*) În mod analog se definesc, de exemplu, varietăţile analitice complexe : în spaţiul numeric se consideră o structură complexă, iar trecerea de la o hartă la alta trebuie să se facă printr-o aplicaţie analitică complexă.

Această afirmaţie permite să se extindă imediat la întreaga varietate simplectică orice afirmaţie cu caracter local care este invariantă în raport cu transformările canonice de coordonate şi demonstrată deja pentru spaţiul de faze standard ($\mathbf{R}^{2n}$, $\omega^2 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$).

C. Construirea coordonatelor $\mathbf{p}_1$ şi $\mathbf{q}_1$. Ca primă coordonată p_1 considerăm o funcţie liniară neconstantă (am putea considera şi orice funcţie diferenţiabilă a cărei diferenţială în punctul $\mathbf{x}$ este nenulă). Pentru a simplifica, vom considera că $p_1(\mathbf{x}) = 0$.

Să notăm cu $\mathbf{P}_1 = I\,\mathrm{d}p_1$ cîmpul hamiltonian corespunzător funcţiei p_1 (fig. 179). Să observăm că $\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \neq 0$. Prin urmare, prin punctul $\mathbf{x}$ se poate duce un hiperplan N^{2n-1} care nu conţine vectorul $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ (în loc de N^{2n-1} am putea lua orice hipersuprafaţă transversală la $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$).

Să considerăm curentul hamiltonian P_1^t cu funcţia lui Hamilton p_1. Fie t timpul necesar pentru a ajunge de la N la punctul $\mathbf{z} = P_1^t(\mathbf{y})$ ($\mathbf{y} \in N$) sub acţiunea curentului P_1^t ; t este funcţie de $\mathbf{z}$. Conform teoremelor uzuale din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, această funcţie este bine definită şi diferenţiabilă în vecinătatea punctului $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n}$. Să o notăm cu q_1 şi să observăm că $q_1 = 0$ pe N, iar derivata funcţiei q_1 în direcţia cîmpului $\mathbf{P}_1$ este egală cu 1. Prin urmare, paranteza lui Poisson a funcţiilor q_1 şi p_1 astfel construite este egală cu 1 :

$$(q_1, p_1) \equiv 1.$$

D. Construirea coordonatelor simplectice prin inducţie după n.

Dacă $n = 1$, construcţia este terminată. Fie $n > 1$ şi să presupunem că teorema lui Darboux este demonstrată pentru $\mathbf{R}^{2n-2}$.

Să considerăm mulţimea M definită de ecuaţiile $p_1 = q_1 = 0$. Cum $\omega^2(I\,\mathrm{d}p_1, I\,\mathrm{d}q_1) \equiv (q_1, p_1) \equiv 1$, diferenţialele $\mathrm{d}p_1$ şi $\mathrm{d}q_1$ sînt liniar independente în punctul $\mathbf{x}$. Prin urmare, conform teoremei funcţiilor implicite, mulţimea M are, în vecinătatea punctului $\mathbf{x}$, *o structură de varietate diferenţiabilă de dimensiune* $2n-2$; o vom nota cu M^{2n-2}.

Lemă. *Structura simplectică ω^2 pe $\mathbf{R}^{2n}$ induce pe o vecinătate a punctului $\mathbf{x}$ în M^{2n-2} o structură simplectică.*

D e m o n s t r a ţ i e. Trebuie să arătăm numai că forma ω^2 este nedegenerată pe $TM_{\mathbf{x}}^{2n-2}$. Pentru aceasta, să considerăm spaţiul simplectic liniar $T\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{2n}$. Vectorii $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ şi $\mathbf{Q}_1(\mathbf{x})$ asociaţi lui $\mathbf{x}$

de cîmpurile de vectori hamiltoniene cu funcțiile lui Hamilton p_1 și q_1 aparțin spațiului $T\mathbf{R}^{2n}_{\mathbf{x}}$. Fie $\xi \in TM^{2n-2}_{\mathbf{x}}$. Derivatele lui p_1 și q_1 în direcția lui ξ sînt nule și deci $dp_1(\xi) = \omega^2(\mathbf{P}_1(\mathbf{x}), \xi) = 0$ $dq_1(\xi) = \omega^2(\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}), \xi) = 0$. Prin urmare, $TM^{2n-2}_{\mathbf{x}}$ este complementul antiortogonal perechii de vectori $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}_1(\mathbf{x})$. Conform cu § 41, B, forma ω^2 restrictată la $TM_{\mathbf{x}}$ este nedegenerată. Lema este demonstrată.

Conform ipotezei de inducție, pe varietatea simplectică $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$, în vecinătatea punctului $\mathbf{x}$, există coordonate

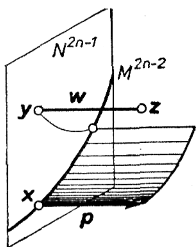


Fig. 179. Construcția coordonatelor simplectice.

simplectice. Să le notăm cu p_i, q_i $(i = 2, \ldots, n)$. Să prelungim funcțiile $p_2, \ldots, q_n$ într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}$ în $\mathbf{R}^{2n}$ în modul următor. Fiecare punct $\mathbf{z}$ din vecinătatea punctului $\mathbf{x}$ în $\mathbf{R}^{2n}$ poate fi reprezentat în mod unic sub forma $\mathbf{z} = P_1^t(Q_1^s\,\mathbf{w})$, unde $\mathbf{w} \in M^{2n-2}$, iar s și t sînt numere mici. *Luăm ca valori ale coordonatelor $p_2, \ldots, p_n, q_2, \ldots, q_n$ în punctul $\mathbf{z}$ valorile lor în punctul $\mathbf{w}$* (fig. 179).

Cele $2n$ funcții $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ formează, în vecinătatea punctului $\mathbf{x}$ în $\mathbf{R}^{2n}$, un sistem local de coordonate.

E. Demonstrarea caracterului simpletic al coordonatelor construite. Să notăm cu P_i^t, Q_i^s $(i = 1, \ldots, n)$ curenții hamiltonieni cu funcțiile lui Hamilton p_i, q_i, iar cu $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ — cîmpurile de vectori corespunzătoare. Să calculăm parantezele lui Poisson ale funcțiilor $p_1, \ldots, q_n$. Am arătat la punctul C că $(p_1, q_1) \equiv 1$. Rezultă de aici comutativitatea curenților P_1^t și Q_1^s : $P_1^t \circ Q_1^s = Q_1^s \circ P_1^t$.

Reamintindu-ne definiția funcțiilor $p_2, \ldots, q_n$, observăm că fiecare din ele este invariantă la curenții P_1^t și Q_1^s. Prin urmare, *parantezele lui Poisson ale lui p_1 și q_1 cu cele $2n-2$ funcții p_i, q_i $(i > 1)$ sînt egale cu zero.*

Din acest motiv, aplicația $P_1^t \circ Q_1^s$ comută cu toți cei $2n-2$ curenți P_i^t, Q_i^s $(i > 1)$ și deci ea invariază fiecare din cele $2n-2$ cîmpuri de vectori $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ $(i > 1)$. Curenții P_1^t și Q_1^s fiind hamiltonieni aplicația $P_1^t \circ Q_1^s$ conservă și structura simplectică ω^2. Din acest motiv, în punctele $\mathbf{z} = P_1^t(Q_1^s\,\mathbf{w}) \in \mathbf{R}^{2n}$ și $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{2n}$, valorile pe care le ia forma ω^2 cînd este evaluată pe oricare două dintre cele $2n-2$ cîmpuri de vectori $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ $(i > 1)$ sînt aceleași. Dar aceste valori coincid cu valorile parantezelor lui Poisson ale funcțiilor lui Hamilton corespunzătoare. Prin urmare, *valorile pe care le ia în punctele $\mathbf{z}$ și $\mathbf{w}$ paranteza lui Poisson a oricăror două din cele $2n-2$ coordonate p_i, q_i $(i > 1)$ sînt aceleași, dacă $\mathbf{z} = P_1^t(Q_1^s\,\mathbf{w})$.*

Funcțiile p_1 și q_1 sînt integrale prime ale tuturor celor $2n-2$ curenți P_i^t, Q_i^s $(i > 1)$ și deci fiecare din cele $2n-2$ cîmpuri de vectori $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ $(i > 1)$ este tangent la varietatea de nivel constant $p_1 = q_1 = 0$. Dar această varietate este M^{2n-2} și deci am arătat că fiecare din cele $2n-2$ cîmpuri de vectori $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ $(i \geqslant 2)$ este tangent la M^{2n-2}. Deducem că aceste cîmpuri sînt cîmpuri de vectori hamiltoniene pe varietatea simplectică $(M^{2n-2}, \omega^2|_{M^{2n-2}})$ funcțiile lui Hamilton corespunzătoare fiind $p_i|_{M^{2n-2}}$, $q_i|_{M^{2n-2}}$ $(i > 1)$. Astfel, *restricția la M^{2n-2} a parantezei lui Poisson a oricăror două dintre cele $2n-2$ coordonate p_i, q_i $(i \geqslant 2)$ luată în $(\mathbf{R}^{2n}, \omega^2)$ coincide cu paranteza lui Poisson a restricției acestor coordonate la M^{2n-2}, luată în raport cu structura simplectică $(M^{2n-2}, \omega^2|_{M^{2n-2}})$.*

Conform ipotezei de inducție, coordonatele $(p_i|_{M^{2n-2}}, q_i|_{M^{2n-2}})$, $(i > 1)$ pe M^{2n-2} sînt simplectice și deci, în vecinătatea lui $\mathbf{x}$ din întreg spațiul $\mathbf{R}^{2n}$ parantezele lui Poisson ale coordonatelor construite au valorile standard :

$$(p_i, p_j) \equiv (p_i, q_j) \equiv (q_i, q_j) \equiv 0, \; i \neq j, \; (q_i, p_i) \equiv 1.$$

Aceeași formă o au și parantezele lui Poisson ale oricăror coordonate $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ în $\mathbf{R}^{2n}$, în care $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$. Forma biliniară ω^2 este însă definită de valorile ei pe perechile de vectori din bază. Prin urmare, parantezele lui Poisson ale funcțiilor coordonate definesc univoc forma ω^2. Rezultă

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$$

și teorema lui Darboux este demonstrată.

CAPITOLUL 9
FORMALISMUL CANONIC

În capitolul de față predomină ca punct de vedere utilizarea coordonatelor locale. Aparatul funcțiilor generatoare ale transformărilor canonice, dezvoltat de Hamilton și Jacobi, reprezintă cea mai puternică metodă cunoscută de integrare a ecuațiilor diferențiale ale dinamicii. În afara acestui aparat, capitolul mai conține și o abordare „de dimensiune impară" a curenților hamiltonieni.

Prezentul capitol este independent de cel precedent. El conține noi demonstrații pentru o serie de rezultate din capitolul 8, precum și explicarea modului în care a apărut teoria varietăților simplectice.

§ 44. INVARIANTUL INTEGRAL POINCARÉ-CARTAN

În acest paragraf se studiază geometria unei 1-forme diferențiale într-un spațiu de dimensiune impară.

A. O lemă de tip hidrodinamic. Fie $\mathbf{v}$ un cîmp de vectori în spațiul euclidian de dimensiune trei orientat $\mathbf{R}^3$ și $\mathbf{r} = \text{rot}\,\mathbf{v}$ rotorul său. Curbele integrale ale cîmpului $\mathbf{r}$ se numesc *liniile rotorului sau linii de vîrtej*. Fie γ_1 o curbă închisă în $\mathbf{R}^3$ (fig. 180). Liniile rotorului care trec prin γ_1 formează un *tub al rotorului*.

Fie γ_2 o altă curbă care generează același tub al rotorului, deci $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, unde σ este 2-lanțul care reprezintă o parte mărginită a tubului rotorului. Este adevărată următoarea lemă.

Lema lui Stokes. *Circulația cîmpului* $\mathbf{v}$ *pe curba* γ_1 *este egală cu circulația pe curba* γ_2:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{l}.$$

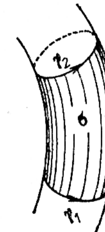


Fig. 180. Tub al rotorului.

D e m o n s t r a ț i e . Conform formulei lui Stokes, $\oint_{\gamma_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{l} - \oint_{\gamma_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \iint_{\sigma} \text{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{n} = 0$, deoarece rot $\mathbf{v}$ este tangent la tubul rotorului, c.c.t.d.

B. Lema lui Stokes în mai multe dimensiuni. Se dovedește că lema lui Stokes admite o generalizare la cazul unei varietăți diferențiabile de dimensiune impară M^{2n+1} arbitrară (în loc de $\mathbf{R}^3$). Pentru a formula această generalizare, trebuie să trecem de la cîmpuri de vectori la forme diferențiale.

Circulația cîmpului $\mathbf{v}$ este integrala 1-formei diferențiale $\omega^1_{\mathbf{v}}(\omega^1_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}))$. Rotorului cîmpului $\mathbf{v}$ îi corespunde 2-forma $\omega^2_{\mathbf{r}} = d\,\omega^1_{\mathbf{v}}(d\,\omega^1_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$. Din această formulă este evident că în fiecare punct există o direcție (și anume direcția rotorului $\mathbf{r}$, fig. 181) care are proprietatea că circulația lui $\mathbf{v}$ pe frontiera fiecărei „suprafețe infinit mici" care conține pe $\mathbf{r}$ este egală cu zero:

$$d\omega^1_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = 0,\ \forall\,\boldsymbol{\eta}.$$

Într-adevăr, $d\omega^1_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = 0.$

O b s e r v a ț i e. Trecerea de la 2-forma $\omega_{\mathbf{r}}^2 = \mathrm{d}\,\omega_{\mathbf{v}}^1$ la cîmpul rotorului $\mathbf{r}$ *nu este o operație invariantă:* ea depinde de structura euclidiană a lui $\mathbf{R}^3$.

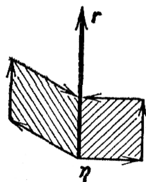


Fig. 181. Axa legată intrinsec de o 2-formă pe un spațiu impar.

Direcția*) lui $\mathbf{r}$ este însă invariant legată de 2-forma $\omega_{\mathbf{r}}^2$ (și deci, de forma $\omega_{\mathbf{v}}^1$). Într-adevăr, se verifică ușor că dacă $\mathbf{r} = 0$, direcția lui $\mathbf{r}$ este definită univoc de condiția $\{\omega_{\mathbf{r}}^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \forall \boldsymbol{\eta}\}$.

Baza algebrică a lemei lui Stokes în dimensiune superioară lui 3 este existența unei axe pentru orice rotație a unui spațiu de dimensiune impară.

Lemă. *Fie ω^2 o 2-formă exterioară liniară în spațiul liniar de dimensiune impară $\mathbf{R}^{2n+1}$. Atunci există un vector $\xi \neq 0$ astfel încît*

$$\omega^2(\xi, \boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{2n+1}.$$

D e m o n s t r a ț i e. Forma antisimetrică ω^2 este definită de un operator antisimetric A de ordin impar $2n+1$:

$$\omega^2(\xi, \boldsymbol{\eta}) = (A\,\xi, \boldsymbol{\eta}),$$

deci de o matrice antisimetrică. Determinantul unei astfel de matrici este egal cu zero, deoarece

$$A' = -A, \ \det A = \det A' = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A.$$

Determinantul lui A fiind zero, A are un vector propriu $\xi \neq 0$ cu valoarea proprie 0, c.c.t.d.

*) Este vorba de dreapta neorientată cu vector director $\mathbf{r}$ în $T\mathbf{R}_x^3$.

Un vector ξ, pentru care $\omega^2(\xi, \boldsymbol{\eta}) = 0$ pentru orice $\boldsymbol{\eta}$, se numește *vector nul al formei* ω^2. Evident, mulțimea vectorilor nuli ai unei forme ω^2 este un spațiu liniar. Forma se numește *nesingulară* dacă dimensiunea acestui spațiu este cea minimală (adică 1 în spațiul de dimensiune impară $\mathbf{R}^{2n+1}$ și 0 în cel de dimensiune pară).

P r o b l e m ă. Să considerăm în spațiul numeric de dimensiune pară $\mathbf{R}^{2n}$ cu coordonatele $p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n$, 2-forma $\omega^2 = \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \ldots + \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q_n$. Să se demonstreze că forma ω^2 este nesingulară.

P r o b l e m ă. Să considerăm în spațiul numeric de dimensiune impară $\mathbf{R}^{2n+1}$ cu coordonatele $p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n;\ t$, 2-forma $\omega^2 = \sum \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i - \omega^1 \wedge \mathrm{d}t$, unde ω^1 este o 1-formă arbitrară în $\mathbf{R}^{2n+1}$. Să se demonstreze că forma ω^2 este nesingulară.

Dacă ω^2 este o formă *nesingulară* în spațiul de dimensiune impară $\mathbf{R}^{2n+1}$, atunci toți vectorii nuli ξ ai formei ω^2 se găsesc pe o aceeași dreaptă. Această dreaptă este difinită invariant de forma ω^2.

Fie M^{2n+1} o varietate diferențiabilă de dimensiune impară și ω^1 o 1-formă diferențială pe M. Din lema precedentă rezultă că *în fiecare punct $x \in M$ există o direcție (adică o dreaptă $\{c\xi\}$ în spațiul tangent TM_x) care are următoarea proprietate: integrala lui ω^1 pe bordul oricărei «suprafețe infinit mici care conține această direcție» este egală cu zero:*

$$\mathrm{d}\omega^1(\xi, \boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in TM_x.$$

Să presupunem în continuare că 2-forma $\mathrm{d}\omega^1$ este nesingulară. Atunci direcția ξ este definită univoc și o vom numi «*direcția rotorului*» formei ω^1.

Curbele integrale ale cîmpului de direcții ale rotorului se numesc *liniile rotorului* (sau *caracteristicile)* formei ω^1.

Fie γ_1 o curbă închisă pe M^{2n+1}. Liniile rotorului care ies din punctele lui γ_1 formează un «*tub al rotorului*». Are loc

Lema lui Stokes în mai multe dimensiuni. *Integralele 1-formei ω^1 pe oricare două curbe care generează un același tub al rotorului sînt egale: $\oint_{\gamma_1} \omega^1 = \oint_{\gamma_2} \omega^1$, dacă $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, unde σ este o porțiune mărginită a tubului rotorului.*

D e m o n s t r a ț i e. Conform formulei lui Stokes

$$\oint_{\gamma_1} \omega^1 - \oint_{\gamma_2} \omega^1 = \oint_{\partial\sigma} \omega^1 = \int_{\sigma} d\omega^1.$$

Dar valoarea lui $d\omega^1$ pe orice pereche de vectori tangenți la tubul rotorului este egală cu zero. (Într-adevăr, doi vectori de acest tip sînt conținuți în 2-planul care trece prin direcția rotorului, ori $d\omega^1$ se anulează pe acest plan.)

Prin urmare, $\int_{\sigma} d\omega^1 = 0$, ceea ce demonstrează lema.

C. Ecuațiile canonice ale lui Hamilton. Din lema lui Stokes rezultă imediat toate principiile fundamentale ale mecanicii hamiltoniene.

Să considerăm ca varietate M^{2n+1} „spațiul de faze extins $\mathbf{R}^{2n}$" cu coordonatele $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t$. Fie $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ o funcție dată. Atunci se poate considera*) 1-forma diferențială

$$\omega_H^1 = \mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\, dt\ (\mathbf{p}\ d\mathbf{q} = p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n).$$

Să-i aplicăm formei ω_H^1 lema lui Stokes (fig. 182).

Teoremă. *Liniile rotorului formei* $\omega_H^1 = \mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\, dt$ *în spațiul de faze extins* $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$ *de dimensiune* $2n + 1$ *se proiectează univoc pe axa* t*: ele sînt date de funcții* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. *Aceste funcții*

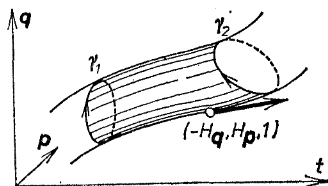


Fig. 182. Cîmpul hamiltonian și liniile rotorului formei $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$.

*) Forma ω_H^1 pare scoasă din buzunar. Vom vedea însă în paragrafele următoare cum a apărut, din optică, ideea de a considera această formă.

satisfac sistemul de ecuații diferențiale canonice cu funcția lui Hamilton H:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \tag{1}$$

Cu alte cuvinte, *liniile rotorului formei* $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$ *sînt traiectoriile unui curent în spațiul de faze extins, fiind curbele integrale ale ecuațiilor canonice* (1).

D e m o n s t r a ț i e. Derivata exterioară a formei $\omega_H^1 = \mathbf{p} d\mathbf{q} - H\ dt$ este

$$d\,\omega_H^1 = \sum_{i=1}^{n} \left(dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt \right).$$

Din această expresie se vede că matricea componentelor 2-formei $d\,\omega_H^1$ în coordonatele $\mathbf{p}, \mathbf{q}, t$ are forma (verificați !)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E & H_{\mathbf{p}} \\ E & 0 & H_{\mathbf{q}} \\ -H_{\mathbf{p}} & -H_{\mathbf{q}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{unde } E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n}, \quad H_p = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$H_{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Rangul acestei matrici este $2n$ (matricea de ordinul $2n$ din colțul din stînga sus este nedegenerată) și deci 2-forma $d\,\omega_H^1$ este nesingulară. Se verifică direct că vectorul $(-H_{\mathbf{q}}, H_{\mathbf{p}}, 1)$ este vector propriu pentru matricea A, corespunzător valorii proprii zero (verificați !). Prin urmare, el dă direcția liniilor rotorului formei $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$. Dar vectorul $(-H_{\mathbf{q}}, H_{\mathbf{p}}, 1)$ este chiar vectorul viteză al curentului (1). În acest mod, s-a demonstrat ceea ce trebuia: curbele integrale ale sistemului (1) sînt liniile rotorului formei $\mathbf{p}d\mathbf{q} - H\ dt$.

D. Teorema invariantului integral Poincaré-Cartan. Să aplicăm acum lema lui Stokes. Se obține următoarea teoremă fundamentală:

Teoremă. *Să presupunem că două curbe γ_1 și γ_2 generează același tub format din orbitele curentului* (1). *În aceste condiții integralele formei* $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$ *pe curbele γ_1 și γ_2 sînt egale:*

$$\oint_{\gamma_1} (\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt) = \oint_{\gamma_2} (\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt).$$

Forma $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$ se numește *invariantul integral Poincaré-Cartan**).

D e m o n s t r a ț i e . Curbele integrale sînt liniile rotorului formei $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$; conform lemei lui Stokes, integralele formei pe curbe care generează același tub al rotorului sînt egale, c.c.t.d.

În particular, să considerăm curbe formate din stări simultane, deci conținute în planele = const (fig. 183). De-a lungul unei astfel de curbe $dt = 0$ și $\oint (\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt) = \oint \mathbf{p}\,d\mathbf{q}$. Din teorema precedentă rezultă un important

Corolar 1. *Curentul conservă integrala formei* $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} = p_1\,dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ *pe curbe închise.*

Într-adevăr, fie $g_{t_0}^{t_1} : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ transformarea spațiului fazelor $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ definită de curent prin evoluția de la timpul t_0 la timpul t_1 (mai precis: $g_{t_0}^{t} (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ este soluția ecuațiilor canonice cu condi-

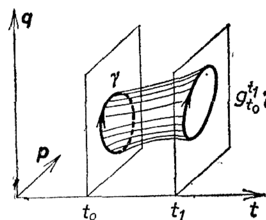


Fig. 183. Invariantul integral al lui Poincaré.

țiile inițiale $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$). Fie γ o curbă închisă arbitrară în planul $\mathbf{R}^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, definit de $t = t_0$. Atunci $g_{t_0}^{t_1}\gamma$ este o curbă închisă în planul $\mathbf{R}^{2n}$ definit de $t = t_1$ și generează în $\mathbf{R}^{2n+1}$ același

*) În calculul variațional $\int \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$ se numește *invariantul integral al lui Hilbert*.

tub format din orbite. Conform teoremei precedente, cum $dt = 0$ de-a lungul lui γ și $g_{t_0}^{t_1}\gamma$, obținem $\oint_{\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q} = \oint_{g_{t_0}^{t_1}\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q}$, c.c.t.d.

Forma $\mathbf{p}\,d\mathbf{q}$ se numește *invariantul integral relativ al lui Poincaré*. Ea are o interpretare geometrică simplă. Într-adevăr, fie σ un 2-lanț orientat și $\gamma = \partial\sigma$. Atunci, utilizînd formula lui Stokes, obținem

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q} = \iint_{\sigma} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q},$$

și am demonstrat în acest mod un important

Corolar 2. *Curentul conservă suma ariilor orientate ale proiecțiilor unei suprafețe pe cele n plane de coordonate* (p_i, q_i):

$$\iint_{\sigma} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \iint_{g_{t_0}^{t_1}\sigma} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}.$$

Cu alte cuvinte, 2-forma $\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ este un invariant integral absolut al curentului.

E x e m p l u . Cînd $n = 1$, ω^2 este elementul de arie și obținem teorema lui Liouville: curentul conservă aria.

E. Aplicații canonice. Fie g o aplicație a spațiului fazelor $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ în $\mathbf{R}^{2n}$.

D e f i n i ț i e . Aplicația g se numește *canonică* dacă g conservă 2-forma $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Din raționamentele precedente se vede că această definiție se poate scrie în oricare din următoarele trei forme echivalente:

1) $g^* \omega^2 = \omega^2$ (g conservă 2-forma $\sum dp_i \wedge dq_i$);

2) $\iint_{\sigma} \omega^2 = \iint_{g\sigma} \omega^2$, $\forall\, \sigma$ (g conservă suma ariilor proiecțiilor oricărei suprafețe);

3) $\oint_{\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q} = \oint_{g\gamma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q}$ (forma $\mathbf{p}\,d\mathbf{q}$ este invariant integral relativ al lui g).

Problemă. Să se arate că definițiile 1) și 2) sînt echivalente cu 3) dacă este vorba de o aplicație a unui domeniu simplu conex din spațiul fazelor $\mathbf{R}^{2n}$; în cazul general avem numai 3) $\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 1).

Corolarele precedente se pot reformula acum astfel:

Teoremă. *Transformarea spațiului fazelor dată de curentul hamiltonian este canonică*).*

Fie $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ o transformare canonică: g conservă forma ω^2. În acest caz g conservă și puterile exterioare ale lui ω^2:

$$g^*(\omega^2 \wedge \omega^2) = \omega^2 \wedge \omega^2, \quad g^*(\omega^2)^k = (\omega^2)^k.$$

Puterile exterioare ale formei $\sum dp_i \wedge dq_i$ sînt proporționale cu formele

$$\omega^4 = \sum_{i<j} dp_i \wedge dp_j \wedge dq_i \wedge dq_j,$$

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} dp_{i_1} \wedge \ldots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \ldots \wedge dq_{i_k}.$$

Am demonstrat deci următoarea

Teoremă. *Transformările canonice conservă invarianții integrali $\omega^4, \ldots, \omega^{2n}$.*

Din punct de vedere geometric integrala formei ω^{2k} reprezintă suma volumelor orientate ale proiecțiilor pe subspațiile de coordonate $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})$.

În particular, forma ω^2 este proporțională cu elementul de volum și obținem un

Corolar. *O transformare canonică conservă elementul de volum în spațiul fazelor:*
volumul lui gD = volumul lui D, pentru orice domeniu D.

În particular, aplicînd corolarul curentului (1), obținem un alt

Corolar. *Curentul* (1) *are ca invarianți integrali formele $\omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{2n}$.*

Ultimul dintre acești invarianți este elementul de volum și deci am redemonstrat teorema lui Liouville.

---

*) Demonstrația acestei teoreme, dată la p. 202, a minunatului tratat al lui Landau și Lifschitz (*Mecanica*, Ed. Tehnică, București, 1966) este greșită.

§ 45. CONSECINȚE ALE TEOREMEI INVARIANTULUI INTEGRAL POINCARÉ-CARTAN

În acest paragraf se demonstrează că transformările canonice conservă forma ecuațiilor lui Hamilton, că o integrală primă a ecuațiilor lui Hamilton permite dintr-o dată să se micșoreze ordinul sistemului cu două unități și că mișcarea unui sistem lagrangean natural are loc după geodezicele spațiului configurațiilor, înzestrat cu o anumită metrică Riemann.

A. Schimbări de variabile în ecuații canonice. Din invarianța legăturii dintre forma $\mathbf{p}d\mathbf{q} - H\,dt$ și liniile rotorului ei rezultă o modalitate de scriere a ecuațiilor de mișcare în orice sistem de $2n+1$ coordonate în spațiul de faze extins $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$.

Fie $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ un sistem de coordonate într-o hartă oarecare a spațiului de faze extins (considerat ca varietate M^{2n+1}, fig. 184). Coordonatele $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ pot fi considerate ca definind o nouă hartă pe M. Forma $\omega_H^1 = \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$ se poate considera ca o 1-formă diferențială pe M. Acestei forme i se asociază în mod invariant (deci independent de coordonate) o familie de curbe pe M — liniile rotorului. În harta $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, aceste linii sînt reprezentate de traiectoriile curentului

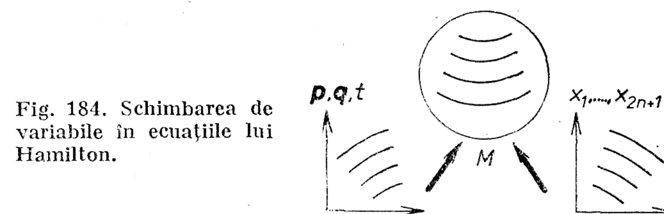


Fig. 184. Schimbarea de variabile în ecuațiile lui Hamilton.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \qquad (1)$$

cu funcția lui Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

Să presupunem că în coordonatele $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ forma ω_H^1 are expresia

$$\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = X_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + X_{2n+1}\,\mathrm{d}x_{2n+1}.$$

Teoremă. *În harta* $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$, *traiectoriile* (1) *sînt reprezentate de liniile rotorului formei* $\sum X_i\,\mathrm{d}x_i$.

Demonstrație. Liniile rotorului formelor $\sum X_i\,\mathrm{d}x_i$ și $\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t$ sînt reprezentările în hărți diferite ale liniilor rotorului unei forme unice pe M. Dar curbele integrale (1) sînt liniile rotorului formei $\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t$ și deci imaginile lor în harta (x_i) sînt liniile rotorului formei $\sum X_i\,\mathrm{d}x_i$, ceea ce trebuia arătat.

Corolar. *Fie* $(P_1, \ldots, P_n;\ Q_1, \ldots, Q_n;\ T)$ *un sistem local de coordonate în spațiul de faze extins* $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ *și* $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, T)$, $S(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, T)$ *niște funcții pentru care*

$$\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\mathrm{d}\mathbf{Q} - K\,\mathrm{d}T + \mathrm{d}S$$

(*membrii stîng și drept sînt forme diferențiale în spațiul de faze extins*).

În aceste condiții traiectoriile curentului (1) *sînt reprezentate în harta* $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, T)$ *de curbe integrale ale ecuațiilor canonice*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}T} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}. \tag{2}$$

Demonstrație. Conform teoremei precedente, traiectoriile (1) sînt reprezentate de liniile rotorului formei $P\,\mathrm{d}Q - K\,\mathrm{d}T + \mathrm{d}S$. Dar $\mathrm{d}S$ nu afectează liniile rotorului (deoarece $\mathrm{d}\mathrm{d}S = 0$). Prin urmare, reprezentările traiectoriilor (1) sînt liniile rotorului formei $\mathbf{P}\,\mathrm{d}Q - K\,\mathrm{d}T$. Conform § 44, C, liniile rotorului unei asemenea forme sînt curbele integrale ale ecuațiilor canonice (2), c.c.t.d.

În particular, fie $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ o transformare canonică a spațiului fazelor, care transformă punctele cu coordonatele $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ în puncte de coordonate $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Funcțiile $\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ se pot considera ca noi coordonate în spațiul fazelor.

Teoremă. *În noile coordonate* $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, *ecuațiile canonice* (1) *au forma canonică**) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \tag{3}$$

cu vechea funcție a lui Hamilton : $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

Demonstrație. Să considerăm 1-forma $\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q}$ în $\mathbf{R}^{2n}$. Pentru orice curbă închisă γ avem (fig. 185)

$$\oint_\gamma (\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q}) = \oint_\gamma \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \oint_\gamma \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q} = 0,$$

transformarea g fiind canonică. Rezultă că $\int_{\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0}^{\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1} \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q} = S$ nu depinde de drumul de integrare, ci numai de punctul final

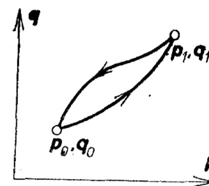


Fig. 185. Forma $\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q}$ este închisă.

$(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ (atunci cînd punctul inițial $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ este fixat). Prin urmare, $\mathrm{d}S = \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q}$ și deci, în spațiul de faze extins,

$$\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q} - H\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}S;$$

*) În anumite lucrări este luată ca definiție a transformărilor canonice proprietatea de a păstra forma canonică a ecuațiilor lui Hamilton. În realitate, această definiție nu este echivalentă cu cea generală acceptată și dată mai sus. De exemplu, în sensul nostru, transformarea $P = 2p$, $Q = q$ nu este canonică, deși păstrează forma hamiltoniană a ecuațiilor de mișcare. O astfel de confuzie s-a strecurat chiar și în lucrarea lui Landau și Lifschitz citată, unde în § 45 se demonstrează că orice transformare care conservă ecuațiile canonice este canonică în sensul nostru.

se poate deci aplica teorema precedentă. Atunci (2) se transformă în (3), c.c.t.d.

Problemă. Fie $g(t) : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ o transformare canonică a spațiului fazelor care depinde de parametrul $t: g(t)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \ \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t))$. Să se demonstreze că, în variabilele $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t$, ecuațiile canonice (1) au forma canonică *cu o nouă funcție a lui Hamilton*

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) - \frac{\partial S}{\partial t},$$

unde $S(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) = \int_{\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0}^{\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q}.$

B. Micșorarea ordinului cu ajutorul integralei prime a energiei. Să presupunem că funcția lui Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nu depinde de timp. Atunci ecuațiile canonice (1) au o integrală primă : $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \text{const}$. Se dovedește că utilizînd această integrală primă se poate coborî dimensiunea $(2n+1)$ a spațiului de faze cu două unități, reducînd problema la integrarea unui sistem de ecuații canonice într-un spațiu de dimensiune $2n-1$.

Să presupunem că (într-un anumit domeniu) ecuația $h = H(p_1, \ldots, p_n; \ q_1, \ldots, q_n)$ se poate rezolva în raport cu p_1 :

$$p_1 = K(\mathbf{P}, \ \mathbf{Q}, \ T; h),$$

unde $\mathbf{P} = (p_2, \ldots, p_n)$; $\mathbf{Q} = (q_2, \ldots, q_n)$; $T = -q_1$. În această ipoteză, obținem

$$\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\, dt = \mathbf{P}\, d\mathbf{Q} - K\, dt - d(Ht) + t\, dH.$$

Fie acum γ o curbă integrală a ecuațiilor canonice (1), conținută în hipersuprafața de dimensiune $2n$ $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ în $\mathbf{R}^{2n+1}$. În acest caz γ este o linie a rotorului formei $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\, dt$ (fig. 186). Să proiectăm spațiul de faze extins $\mathbf{R}^{2n+1} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$ pe spațiul de faze $\mathbf{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$. Hipersuprafața $H = h$ se proiectează pe o subvarietate de dimensiune $2n-1$, M^{2n-1} a lui $\mathbf{R}^n$: $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$, iar curba γ — pe o curbă $\bar{\gamma}$ conținută în această subvarietate. $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ și T formează un sistem de coordonate locale în M^{2n-1}.

Problemă. Să se demonstreze că $\bar{\gamma}$ *este linie a rotorului formei* $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} = \mathbf{P}\ d\mathbf{Q} - K\, dT$ *pe* M^{2n-1}.

Indicație. $d(Ht)$ nu influențează liniile rotorului, iar dH restrictată la M este zero.

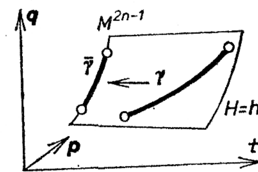


Fig. 186. Coborîrea ordinului unui sistem hamiltonian.

Dar liniile rotorului formei $\mathbf{P}\ d\mathbf{Q} - K\, dT$ satisfac ecuațiile lui Hamilton (2) și în acest fel am demonstrat următoarea

Teoremă. *Orbitele ecuației* (1) *pe hipersuprafața* M^{2n-1}, $H = h$ *satisfac ecuațiile canonice*

$$\frac{dp_i}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_i} \quad (i = 2, \ldots, n)$$

unde funcția $K(p_2, \ldots, p_n; \ q_2, \ldots, q_n; \ T, h)$ *se definește din ecuația* $H(K, p_2, \ldots, p_n; \ -T, q_2, \ldots, q_n) = h.$

C. Principiul minimei acțiuni în spațiul fazelor. Să considerăm în spațiul de faze extins $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$ o curbă integrală γ a ecuațiilor canonice (1), care unește punctele $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0)$ și $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1)$.

Teoremă. *Integrala* $\int \mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$ *are pe* γ *ca extremală în raport cu variațiile lui* γ *în care capetele curbelor rămîn în subspațiile n-dimensionale* $(t = t_0, \ \mathbf{q} = \mathbf{q}_0)$ *și* $(t = t_1, \ \mathbf{q} = \mathbf{q}_1)$.

Demonstrație. Curba γ este linie a rotorului formei $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$ (fig. 187). Din acest motiv, integrala formei $\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt$ pe „un paralelogram infinit mic care trece prin direcția rotorului'' este egală cu zero.

Cu alte cuvinte, creșterea $\left(\int_\gamma - \int_{\gamma'}\right)$ $(\mathbf{p}\ d\mathbf{q} - H\ dt)$ este un infinit mic de ordin superior celui al diferenței dintre curbele γ' și γ, c.c.t.d.

Dacă acest raţionament nu pare suficient de riguros, el poate fi înlocuit cu calculul:

$$\delta \int_\gamma (\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}} - H)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \left(\dot{\mathbf{q}}\,\delta\mathbf{p} + \mathbf{p}\,\delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,\delta\mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,\delta\mathbf{q}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \mathbf{p}\,\delta\mathbf{q}\Big|_0^1 + \int_\gamma \left[\left(\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\mathbf{p} - \left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}\right]\mathrm{d}t.$$

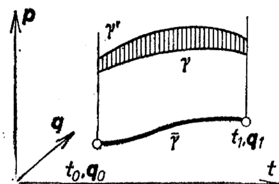


Fig. 187. Principiul minimei acţiuni în spaţiul fazelor.

Vedem că curbele integrale ale ecuaţiilor lui Hamilton sînt unicele extremale ale integralei $\int \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t$ în clasa curbelor γ ale căror capete rămîn în subspaţiile n-dimensionale $(t = t_0, \mathbf{q} = \mathbf{q}_0)$ şi $(t = t_1, \mathbf{q} = \mathbf{q}_1)$ ale spaţiului de faze extins. Teorema este astfel demonstrată.

Observaţie. Principiul minimei acţiuni sub forma lui Hamilton este un caz particular al principiului considerat mai sus. Într-adevăr, de-a lungul extremalelor avem

$$\int_{t_0,\mathbf{q}_0}^{t_1,\mathbf{q}_1} \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}} - H)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t$$

(căci lagrangeanul L şi hamiltonianul H se transformă unul în altul prin transformarea Legendre).

În continuare, fie $\bar{\gamma}$(fig. 188) proiecţia extremalei γ în planul $\mathbf{q}, t$. Oricărei curbe $\bar{\gamma}'$ învecinate cu $\bar{\gamma}$, care uneşte aceleaşi puncte $(t_0, \mathbf{q}_0)$ şi $(t_1, \mathbf{q}_1)$ în planul $\mathbf{q}, t$, îi asociem o curbă γ' în spaţiul de faze $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$, luînd $\mathbf{p} = \partial L/\partial\dot{\mathbf{q}}$. Atunci de-a lungul lui γ' avem şi $\int_{\gamma'} \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma'} L\,\mathrm{d}t$. Dar, conform teoremei demonstrate, $\delta \int_\gamma \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} - H\,\mathrm{d}t = 0$,

pentru orice variaţii ale curbei γ (cu condiţiile la limită $(t=t_0, \mathbf{q} = \mathbf{q}_0)$ şi $(t = t_1, \mathbf{q} = \mathbf{q}_1)$). În particular, acest lucru este adevărat pentru variaţiile de un tip special, care transformă pe γ în γ'. Prin urmare, $\bar{\gamma}$ este o extremală a lui $\int L\,\mathrm{d}t$, ceea ce trebuia demonstrat.

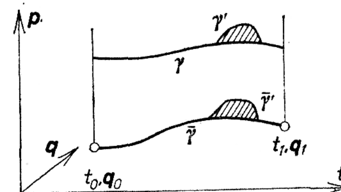


Fig. 188. Curbe care se compară în principiul minimei acţiuni în spaţiul configuraţiilor şi în spaţiul fazelor.

În teorema demonstrată, se comparau cu γ curbe γ' dintr-o clasă mai largă decît cea care apare în principiul lui Hamilton: nu se impun nici un fel de restricţii privind legătura dintre $\mathbf{p}$ şi $\mathbf{q}$. Poate părea uimitor faptul că, cu toate acestea, cele două principii sînt echivalente: din extremalitatea într-o clasă mai îngustă de variaţii $(\mathbf{p} = \partial L/\partial\dot{\mathbf{q}})$ rezultă extremalitatea pentru orice variaţii. Explicaţia constă în faptul că, pentru $\mathbf{q}$ fixat, mărimea $\mathbf{p} = \partial L/\partial\dot{\mathbf{q}}$ extremizează pe $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H$ (vezi definiţia transformării Legendre, § 14, p. 82).

D. Principiul minimei acţiuni în forma Maupertuis—Euler—Lagrange—Jacobi. Să presupunem că funcţia lui Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nu depinde de timp. Atunci $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este integrală primă a ecuaţiilor lui Hamilton (1). Să proiectăm suprafaţa $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ din spaţiul de faze extins $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$ pe spaţiul $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$.

Se obţine suprafaţa de dimensiune $2n-1$ în $\mathbf{R}^{2n}$ dată de ecuaţia $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$, pe care am considerat-o la punctul **B** şi am notat-o cu M^{2n-1}.

Traiectoriile ecuaţiilor canonice (1) care intersectează suprafaţa M^{2n-1} sînt conţinute în întregime în M^{2n-1}. Ele sînt linii ale rotorului formei $\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{q} = \mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{Q} - K\,\mathrm{d}T$ pe M^{2n-1} (în notaţiile de la punctul B). Conform teoremei de la punctul C, curbele (1) de pe M^{2n-1} sînt extremale pentru principiul variaţional corespunzător acestei forme. Prin urmare, am demonstrat următoarea

Teoremă. *Dacă funcţia lui Hamilton* $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *nu depinde de timp, atunci traiectoriile ecuaţiilor canonice* (1) *care sînt conţinute în suprafaţa* $M^{2n-1}: H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ *sînt extremale ale integralei* $\int \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q}$ *în clasa curbelor conţinute în* M^{2n-1} *care unesc subspaţiile* $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ *şi* $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1$.

Să considerăm acum proiecția extremalei care unește pe $\mathbf{q}_0$ cu $\mathbf{q}_1$ pe suprafața M^{2n-1} : $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$, pe spațiul $\{\mathbf{q}\}$. Această curbă unește punctele $\mathbf{q}_0$ și $\mathbf{q}_1$.

În continuare, fie γ o altă curbă care unește punctele $\mathbf{q}_0$ și $\mathbf{q}_1$ (fig. 189). Această curbă γ este proiecția unei curbe conținute

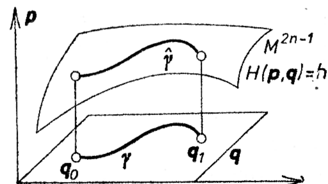


Fig. 189. Principiul lui Maupertuis.

în suprafața M^{2n-1}. Anume, să alegem pe γ un parametru τ, $a \leqslant \tau \leqslant b$, $\gamma(a) = \mathbf{q}_0$, $\gamma(b) = \mathbf{q}_1$. Atunci în fiecare punct $\mathbf{q}$ al curbei γ este definit vectorul viteză $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma(\tau)$ și impulsul corespunzător $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$. Dacă parametrul τ este astfel ales încît $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$, atunci obținem o curbă $\tilde{\gamma} : \mathbf{q} = \gamma(\tau), \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ pe suprafața M^{2n-1}. Aplicînd teorema precedentă curbelor $\tilde{\gamma}$ pe M^{2n-1} obținem un

Corolar. *Printre toate curbele $\mathbf{q} = \gamma(\tau)$ care unesc două puncte $\mathbf{q}_0$ și $\mathbf{q}_1$ în planul $\mathbf{q}$ și sînt parametrizate astfel încît funcția lui Hamilton are o valoare fixată $H\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}\right) = h$, traiectoriile ecuațiilor dinamicii* (1) *sînt extremalele integralei «acțiunii reduse»*

$$\int_\gamma \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q} = \int_\gamma \mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}\tau = \int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\tau)\,\dot{\mathbf{q}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Acesta este *principiul minimei acțiuni al lui Maupertuis-Euler-Lagrange-Jacobi**). Este important să remarcăm că segmentul

*) „În aproape toate manualele, chiar și în cele bune, acest principiu este prezentat astfel încît el nu poate fi priceput" (**C. Jacobi,** *Lecții de dinamică*, 1842—1843). Nu m-am hotărît să încalc tradiția. O „demonstrație" instructivă se găsește în §44 al lucrării de mecanică citată a lui Landau și Lifschitz.

$a \leqslant \tau \leqslant b$ care parametrizează curba γ nu este fixat și poate fi diferit pentru curbele care se compară. Unică trebuie să fie însă energia (valoarea funcției lui Hamilton). Observăm de asemenea că principiul definește forma traiectoriilor, dar nu și timpul : pentru determinarea timpului trebuie utilizată constanta energiei.

Principiul demonstrat capătă o formă deosebit de simplă în cazul în care sistemul reprezintă mișcarea inerțială pe o varietate netedă.

Teoremă. *Un punct material, constrîns să rămînă pe o varietate riemanniană netedă, se mișcă pe liniile geodezice (deci pe extremalele lungimii $\int \mathrm{d}s$).*

D e m o n s t r a ț i e . Într-adevăr, în cazul nostru

$$H = L - T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\,\dot{\mathbf{q}} = 2\,T = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.$$

Prin urmare, pentru a face constantă valoarea lui H, $H = h$, parametrul τ trebuie ales proporțional cu lungimea : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/\sqrt{2h}$. Integrala acțiunii reduse este atunci egală cu

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\,\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}\tau = \int_\gamma \sqrt{2h}\,\mathrm{d}s = \sqrt{2h}\int_\gamma \mathrm{d}s$$

și deci extremalele sînt geodezicele varietății noastre, c.c.t.d.

În cazul în care există și o energie potențială, traiectoriile ecuațiilor dinamicii sînt de asemenea geodezicele unei anumite metrici Riemann.

Fie $\mathrm{d}s^2$ metrica riemanniană pe spațiul configurațiilor, care definește energia cinetică $\left(\text{astfel încît } T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)$. Fie h o constantă.

Teoremă. *Să introducem în domeniul din spațiul configurațiilor, definit de $U(\mathbf{q}) < h$, o metrică riemanniană prin formula*

$$\mathrm{d}\rho = \sqrt{h - U(\mathbf{q})}\,\mathrm{d}s.$$

Atunci traiectoriile sistemului cu energia cinetică $T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ *și energia potențială* $U(\mathbf{q})$ *care au energia totală* h *sînt linii geodezice ale metricii* $d\rho$.

D e m o n s t r a ț i e. Într-adevăr, în cazul nostru $L = T - U$, $H = T + U$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} = 2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(h - U)$. Prin urmare, pentru a realiza valoarea fixată $H = h$, parametrul τ trebuie ales proporțional cu lungimea : $d\tau = ds/\sqrt{2(h-U)}$. Integrala acțiunii reduse este atunci egală cu

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\, d\tau = \int_\gamma \sqrt{2(h-U)}\, ds = \sqrt{2}\int_\gamma d\rho.$$

Conform principiului lui Maupertuis, traiectoriile sînt geodezicele metricii $d\rho$, c.c.t.d.

O b s e r v a ț i a 1. Metrica $d\rho$ se obține din ds printr-o „dilatare" care depinde de punctul $\mathbf{q}$*), dar nu depinde de direcție. Din acest motiv, unghiurile în metrica $d\rho$ coincid cu cele din metrica ds. Pe frontiera domeniului $U < h$ metrica $d\rho$ devine singulară : cu cît ne apropiem mai mult de frontieră, cu atît lungimea ρ devine mai mică. În particular, lungimea unei curbe conținute chiar în frontiera ($U = h$) este egală cu zero.

O b s e r v a ț i a 2. Dacă punctul inițial și cel final al unei geodezice γ sînt suficient de apropiate, extremumul lungimii este un minim. Acest fapt justifică denumirea de „principiu al minimei acțiuni". În general, extremumul acțiunii nu este neapărat un minim așa cum se vede dacă se consideră geodezicele sferei unitate (fig. 190). Fiecare arc de meridian este o geodezică, dar minimal este numai un arc de lungime mai mică ca π : arcul $NS'M$ este mai scurt ca arcul de meridian NSM.

O b s e r v a ț i a 3. Dacă h este mai mare decît valoarea maximă a lui U pe spațiul configurațiilor, atunci metrica $d\rho$ nu are singularități. Din acest motiv, putem utiliza în studiul problemelor de mecanică teoremele topologice privind geodezicele varietăților riemanniene.

*) În geometrie se spune că în domeniul $U < h$, $d\rho$ se obține din ds printr-o transformare *conformă*. (*N. T.*)

De exemplu, să considerăm torul T^2 cu o metrică Riemann oarecare. Printre toate curbele închise de pe T^2 care se rotesc de m ori pe paralelă și de n ori pe meridian există o curbă de lungime minimă (fig. 191). Această curbă este o geodezică închisă

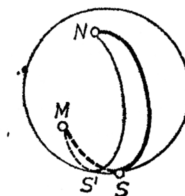


Fig. 190. Geodezică care nu este minimală.

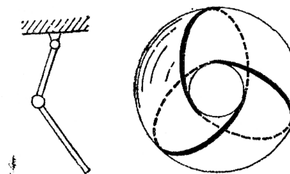


Fig. 191. Mișcare periodică a pendulului dublu.

pentru demonstrație se pot consulta lucrările de calcul variațional global sau cele de „teorie Morse").

Pe de altă parte, torul T^2 este spațiul de configurații al unui pendul dublu plan. Rezultă următoarea

Teoremă. *Pentru orice numere întregi m și n există o mișcare periodică a pendulului dublu în care unul din brațe efectuează m rotații în timpul în care celălalt efectuează n rotații.*

În plus, astfel de mișcări periodice există pentru orice valoare suficient de mare a constantei energiei h (h trebuie să fie mai mare ca energia potențială în poziția superioară).

Ca un al doilea exemplu, să considerăm un solid rigid avînd un punct fix și care se află într-un cîmp potențial arbitrar. Spațiul configurațiilor (SO(3)) nu este simplu conex : există în el curbe care nu se pot contracta la un punct. Din raționamentele precedente rezultă o

Teoremă. *Oricare ar fi cîmpul de forțe care derivă dintr-un potențial, există cel puțin o mișcare periodică a rigidului. În plus, există astfel de mișcări periodice pentru care constanta energiei h este oricît de mare.*

§ 46. PRINCIPIUL LUI HUYGENS

Noțiunile fundamentale ale mecanicii hamiltoniene (impulsurile $\mathbf{p}$, funcția lui Hamilton H, forma $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H\, dt$, ecuația Hamilton-Jacobi, despre care vom vorbi mai jos) au apărut atunci cînd s-au extins la principii variaționale generale (și, în

particular, la principiul acțiunii staționare al lui Hamilton $\delta \int L\, dt = 0$) cîteva noțiuni deosebit de simple și naturale ale opticii geometrice care este subordonată unui principiu variațional particular — principiul lui Fermat.

A. Fronturi de undă. Să trecem în revistă pe scurt*) noțiunile fundamentale ale opticii geometrice. Conform principiului variațional al lui Fermat, *lumina se propagă din punctul* $\mathbf{q}_0$ *în punctul* $\mathbf{q}_1$ *în timpul cel mai scurt.* Viteza luminii poate depinde atît de punctul $\mathbf{q}$ („mediu neomogen") cît și de direcția razei („mediu neizotrop" — de exemplu, cristalele).

Proprietățile mediului pot fi descrise dacă se asociază fiecărui punct $\mathbf{q}$ o suprafață în spațiul tangent în $\mathbf{q}$ („indicatoarea"). Pentru aceasta, să punem în corespondență fiecărei direcții viteza luminii în punctul $\mathbf{q}$ și în direcția dată (fig. 192).

Fie acum $t > 0$. Să considerăm mulțimea punctelor $\mathbf{q}$ pînă la care lumina emisă într-un punct dat $\mathbf{q}_0$ poate ajunge într-un timp mai mic sau egal cu t. Frontiera $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$ a acestei mulțimi se numește *frontul de undă al punctului* q_0 *după timpul* t și este formată din acele puncte pînă la care lumina poate ajunge în timpul t dar nu și mai repede.

Între fronturile de undă corespunzătoare unor valori diferite ale lui t există o relație remarcabilă, descoperită de Huygens (fig. 193).

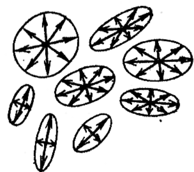


Fig. 192. Mediul anizotrop și neomogen.

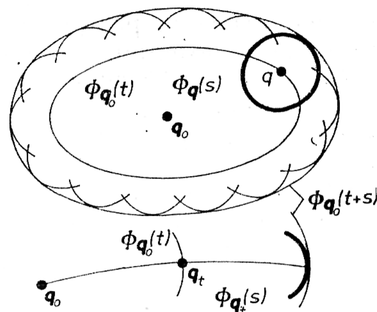


Fig. 193. Înfășurătoarea fronturilor de undă.

*) Nu vom urmări aici o tratare riguroasă și de aceea vom considera că toți determinanții sînt diferiți de zero ș. a. m. d. Demonstrațiile teoremelor viitoare nu depind de raționamentele semieuristice de la acest punct.

Teorema lui Huygens. *Să considerăm frontul de undă al punctului* $\mathbf{q}_0$ *după timpul* t : $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$. *Pentru fiecare punct* $\mathbf{q} \in \Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$ *al acestui front, să construim frontul de undă după timpul* s, $\Phi_{\mathbf{q}}(s)$. *Atunci frontul de undă al punctului* $\mathbf{q}_0$ după timpul $t+s$, $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$ *va fi înfășurătoarea fronturilor de undă* $\Phi_{\mathbf{q}}(s)$, $\mathbf{q} \in \Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$, *astfel construite.*

Într-adevăr, fie $\mathbf{q}_{t+s} \in \Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$. În acest caz există un drum din $\mathbf{q}_0$ în $\mathbf{q}_{t+s}$ pe care timpul de propagare a luminii este egal cu $t+s$ și nu există un drum cu timp mai scurt. Să considerăm punctul $\mathbf{q}_t$ de pe acest drum la care lumina din $\mathbf{q}_0$ ajunge în timpul t. Nu există nici un drum de la $\mathbf{q}_0$ la $\mathbf{q}_t$ cu timp mai scurt: în caz contrar, drumul $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_{t+s}$ nu ar fi cel mai scurt. Rezultă că punctul $\mathbf{q}_t$ este conținut în frontul $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$. În mod analog, lumina parcurge drumul $\mathbf{q}_t\mathbf{q}_{t+s}$ în timpul s, și nu există un drum de la $\mathbf{q}_t$ la $\mathbf{q}_{t+s}$ cu timp mai scurt. Din acest motiv, $\mathbf{q}_{t+s} \in \Phi_{\mathbf{q}_t}(s)$ — frontul de undă al punctului $\mathbf{q}_t$ după timpul s. Să arătăm că fronturile $\Phi_{\mathbf{q}_t}(s)$ și $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$ sînt tangente în punctul $\mathbf{q}_{t+s}$. Într-adevăr, dacă aceste două fronturi s-ar intersecta transversal (fig. 194), atunci ar exista puncte ale lui $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$ în care s-ar putea ajunge din $\mathbf{q}_t$ într-un timp mai mic ca s și deci, din $\mathbf{q}_0$, într-un timp mai scurt ca $t+s$. Aceasta ar contrazice definiția lui $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$; prin urmare, fronturile $\Phi_{\mathbf{q}_t}(s)$ și $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t+s)$ sînt tangente în punctul $\mathbf{q}_{t+s}$, c.c.t.d.

Teorema demonstrată se numește *principiul lui Huygens*. Evident, punctul $\mathbf{q}_0$ ar fi putut fi înlocuit cu o curbă, suprafață sau o mulțime închisă oarecare, spațiul $\{\mathbf{q}\}$ tridimensional — cu o varietate netedă arbitrată, iar propagarea luminii — cu propagarea oricărei perturbații care se transmite „local".

Principiul lui Huygens conduce la două moduri de descriere a procesului de propagare. În primul rînd putem urmări *razele*,

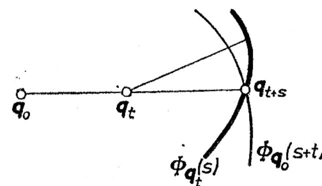


Fig. 194. Demonstrația teoremei lui Huygens.

deci drumurile pe care propagarea luminii se face în timpul cel mai scurt. În acest caz, caracterul local al propagării este dat prin intermediul vectorului viteză $\dot{\mathbf{q}}$. Dacă direcția razei este cunoscută,

atunci mărimea vectorului viteză este dată de proprietăţile mediului (de indicatoare).

Pe de altă parte, putem urmări *fronturile de undă.*

Să presupunem că în spaţiul $\{\mathbf{q}\}$ se dă o metrică riemanniană. În acest caz se poate vorbi de *viteza de mişcare a frontului de undă.* De exemplu, să considerăm că lumina se propagă într-un mediu care umple spaţiul euclidian obişnuit. Atunci mişcarea frontului de undă se poate caracteriza prin vectorul $\mathbf{p}$ perpendicular frontului, care se construieşte în modul următor.

Pentru orice punct $\mathbf{q}_0$ definim funcţia $S_{\mathbf{q}_0}(\mathbf{q})$ ca fiind *lungimea optică a drumului de la* $\mathbf{q}_0$ *la* $\mathbf{q}$, adică *timpul cel mai scurt de propagare a luminii din* $\mathbf{q}_0$ *în* $\mathbf{q}$.

Mulţimea de nivel constant $\{\mathbf{q} : S_{\mathbf{q}_0}(\mathbf{q}) = t\}$ nu este altceva decît frontul de undă $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$ (fig. 195). Gradientul funcţiei S (relativ la metrica menţionată mai sus) este perpendicular pe frontul de undă şi caracterizează mişcarea acestui front. Şi anume, cu cît este *mai mare* gradientul, cu atît *mai încet* se mişcă frontul. Din acest motiv, Hamilton a denumit vectorul

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}$$

vectorul încetinelii normale a frontului.

Direcţia $\dot{\mathbf{q}}$ a razei şi direcţia $\mathbf{p}$ de mişcare a frontului nu coincid într-un mediu neizotrop. Ele sînt însă legate printr-o relaţie simplă care se deduce uşor din principiul lui Huygens. Reamintesc că în fiecare punct proprietăţile mediului sînt caracterizate de indicatoare — suprafaţa vectorilor viteză ai luminii.

D e f i n i ţ i e . Direcţia hiperplanului tangent la indicatoare în punctul $\mathbf{v}$ se numeşte *conjugata* direcţiei $\mathbf{v}$ (fig. 196).

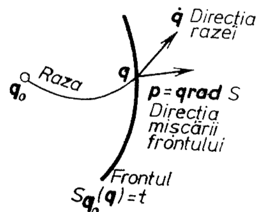


Fig. 195. Direcţia razei şi direcţia mişcării frontului de undă.

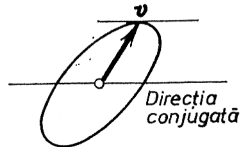


Fig. 196. Hiperplan conjugat.

Teoremă. *Direcţia frontului de undă* $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$ *în punctul* $\mathbf{q}_t$ *coincide cu conjugata direcţiei razei* $\dot{\mathbf{q}}$.

D e m o n s t r a ţ i e . Să considerăm (fig. 197) punctele $\mathbf{q}_\tau$ ale razei $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_t$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Fie ε foarte mic. Atunci frontul $\Phi_{\mathbf{q}_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ diferă de indicatoarea punctului $\mathbf{q}_t$ contractată de ε ori prin

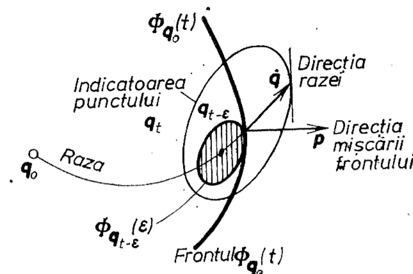


Fig. 197. Direcţia razei şi direcţia frontului de undă sînt conjugate.

mărimi mici de ordinul $O(\varepsilon^2)$. Conform principiului lui Huygens, acest front $\Phi_{\mathbf{q}_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ este tangent la frontul $\Phi_{\mathbf{q}_0}(t)$ în punctul $\mathbf{q}_t$. Trecînd la limită pentru $\varepsilon \to 0$, obţinem teorema formulată.

Modificînd metrica ajutătoare cu care am definit vectorul $\mathbf{p}$, se modifică şi noţiunea de viteză a frontului, deci şi mărimea şi direcţia vectorului $\mathbf{p}$. Pe de altă parte, forma diferenţială $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} = dS$ în spaţiul $\{\mathbf{q}\} = \mathbf{R}^3$ este definită indiferent de metrica ajutătoare; valoarea ei depinde numai de frontul ales (sau raza aleasă). Pe hiperplanul conjugat al vectorului viteză al razei, această formă este egală cu 0, iar valoarea sa pe vectorul viteză este 1[*].

B. Analogia dintre optică şi mecanică. Să ne întoarcem la mecanică. Aici traiectoriile mişcării sînt extremale ale unui principiu variaţional şi mecanica se poate construi ca o optică geometrică într-un spaţiu cu mai multe dimensiuni. Aşa a procedat şi Hamilton; nu vom prezenta în detaliu această construcţie, ci vom enumera numai acele noţiuni din optică care l-au condus pe Hamilton la noţiuni fundamentale ale mecanicii.

---

*) În acest mod, vectorii $\mathbf{p}$, corespunzători tuturor fronturilor de undă care trec printr-un punct dat, nu sînt arbitrari, ci sînt supuşi unei condiţii: valorile admise pentru $\mathbf{p}$ formează în spaţiul $\{\mathbf{p}\}$ o hipersuprafaţă care este duală indicatoarei vitezelor.

Optică.	Mecanică.
Mediul optic.	Spațiul de configurații extins $\{(\mathbf{q}, t)\}$.
Principiul lui Fermat.	Principiul lui Hamilton $\delta \int L \, dt = 0.$
Razele.	Traiectoriile $\mathbf{q}(t)$.
Indicatoarea.	Lagrangeanul L.
Încetineala normală $\mathbf{p}$ a frontului.	Impulsul $\mathbf{p}$.
Exprimarea lui $\mathbf{p}$ prin viteza $\dot{\mathbf{q}}$ a razei.	Transformarea Legendre.
1-forma $\mathbf{p}d\mathbf{q}$.	1-forma $\mathbf{p}d\mathbf{q} - H\, dt$.

Au rămas neutilizate numai lungimea optică a drumului $S_{\mathbf{q}_0}(\mathbf{q})$ și principiul lui Huygens. Noțiunile analoage din mecanică sînt : *funcția acțiune* și *ecuația lui Hamilton-Jacobi*, la care vom trece în continuare.

C. Acțiunea ca funcție de coordonate și timp.

Definiție. Se numește *funcția acțiune* S $(\mathbf{q}, t)$ integrala

$$S_{\mathbf{q}_0, t_0}(\mathbf{q}, t) = \int_\gamma L \, dt$$

luată de-a lungul extremalei γ care unește punctele $(\mathbf{q}_0, t_0)$ și $(\mathbf{q}, t)$.

Pentru ca această definiție să fie corectă, trebuie luate anumite precauții: trebuie cerut ca extremalele care pleacă din punctul $(\mathbf{q}_0, t_0)$ să nu se mai intersecteze, ci să formeze ceea ce se cheamă un *«cîmp central de extremale»* (fig. 198). Mai precis, să asociem fiecărui punct $(\mathbf{q}_0, t_0)$ punctul $(\mathbf{q}, t)$ care este capătul extremalei cu condițiile inițiale $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$. Se spune că *extremala γ este inclusă într-un cîmp central* dacă aplicația $(\dot{\mathbf{q}}_0, t) \to (\mathbf{q}, t)$ este nedegenerată (în punctul corespunzător extremalei considerate γ și prin urmare și într-o vecinătate a acestui punct).

Se poate demonstra că pentru $|t - t_0|$ suficient de mic extremala γ este inclusă într-un cîmp central*).

Să considerăm acum o vecinătate destul de mică a punctului final $(\mathbf{q}, t)$ al extremalei date. Fiecare punct al acestei vecinătăți

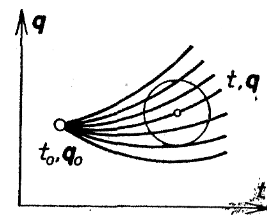


Fig. 198. Cîmp central de extremale.

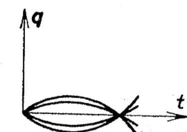


Fig. 199. Extremală cu punct focal, care nu poate fi inclusă într-un cîmp central.

este unit cu $(\mathbf{q}_0, t_0)$ printr-o extremală unică a cîmpului central pus în evidență. Această extremală depinde diferențiabil de punctul final $(\mathbf{q}, t)$. Rezultă că în vecinătatea aleasă este corect definită funcția acțiune

$$S_{\mathbf{q}_0, t_0}(\mathbf{q}, t) = \int_\gamma L \, dt.$$

În optica geometrică am considerat diferențiala lungimii optice a drumului. Este natural ca și aici să considerăm diferențiala funcției acțiune.

Teoremă. *Diferențiala funcției acțiune (cînd punctul inițial este fixat) este egală cu*

$$dS = \mathbf{p} \, d\mathbf{q} - H \, dt,$$

unde $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ și $H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L$ *se determină din viteza finală* $\dot{\mathbf{q}}$ *a traiectoriei* γ.

---

*) Problemă. Să se arate că pentru $|t - t_0|$ mare acest lucru nu se mai întîmplă în general.

Indicație. $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}$ (fig. 199).

D e m o n s t r a ț i e. Să ridicăm fiecare din extremale din spațiul $\{(\mathbf{q}, t)\}$ în spațiul de faze extins $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)\}$, luînd $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$; înlocuim deci extremala cu orbita corespunzătoare. Obținem atunci în spațiul de faze extins o varietate de dimensiune $n+1$ formată din traiectorii, deci din liniile rotorului formei $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$. Să dăm acum punctului final $(\mathbf{q}, t)$ o creștere $(\Delta\mathbf{q}, \Delta t)$ și să considerăm familia de extremale care unește punctul $(\mathbf{q}_0, t_0)$ cu punctele segmentului $\mathbf{q} + \theta\Delta\mathbf{q}$, $t + \theta\Delta t$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (fig. 200). Obținem în spațiul

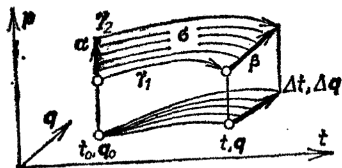


Fig. 200. Calculul diferențialei funcției acțiune.

fazelor un patrulater σ format din liniile rotorului formei $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$; frontiera acestuia

$$\partial\sigma = \gamma_1 - \gamma_2 + \beta - \alpha$$

este formată din două traiectorii γ_1 și γ_2, un arc de curbă α, conținut în spațiul $(\mathbf{q} = \mathbf{q}_0, t = t_0)$, și un arc de curbă β, care se proiectează pe segmentul $(\mathbf{q} + \theta\Delta\mathbf{q}, t + \theta\Delta t)$. σ fiind format din linii ale rotorului formei $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$, avem

$$0 = \iint_\sigma d(\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt) = \int_{\partial\sigma} \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt = \left(\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\alpha} - \int_{\beta}\right)(\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt).$$

Pe arcul α avem însă $d\mathbf{q} = 0$, $dt = 0$, iar pe traiectoriile γ_1 și γ_2, $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt = L\,dt$ (§ 45, B). Prin urmare, diferența $\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)(\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt)$ este egală cu creșterea funcției acțiune și obținem

$$\int \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt = S(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, t + \Delta t) - S(\mathbf{q}, t).$$

Dacă facem acum ca $\Delta\mathbf{q} \to 0$, $\Delta t \to 0$, rezultă

$$\int_\beta \mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt = \mathbf{p}\,\Delta\mathbf{q} - H\,\Delta t + o(\Delta\mathbf{q}, \Delta t),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Vedem că forma $\mathbf{p}\,d\mathbf{q} - H\,dt$ pe care am introdus-o mai întîi artificial apare de la sine atunci cînd se pune în evidență analogia dintre optică și mecanică, și anume din considerarea funcției acțiune care corespunde lungimii optice a drumului.

D. Ecuația lui Hamilton-Jacobi. Să ne reamintim că „vectorul încetinelii normale $\mathbf{p}$" nu poate fi complet arbitrar : el satisface condiția $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} = 1$, care rezultă din principiul lui Huygens (p. 307). O condiție similară este satisfăcută și de gradientul funcției acțiune S.

Teoremă. *Funcția acțiune satisface ecuația*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0. \tag{1}$$

Această ecuație neliniară de ordinul întîi cu derivate parțiale se numește *ecuația lui Hamilton-Jacobi*.

Pentru a demonstra teorema este suficient să remarcăm că din teorema precedentă rezultă

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \ \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Legătura astfel stabilită între traiectoriile unui sistem mecanic („raze") și o ecuație cu derivate parțiale („fronturi de undă") poate fi utilizată în două direcții.

În primul rînd, anumite soluții ale ecuației (1) pot fi utilizate în integrarea ecuațiilor diferențiale ordinare ale mecanicii. În aceasta constă metoda lui Jacobi de integrare a ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, metodă care va fi analizată în paragraful următor.

În al doilea rînd, legătura dintre cele două puncte de vedere — al razelor și al fronturilor de undă — permite ca integrarea ecuației cu derivate parțiale (1) să fie redusă la integrarea sistemului de ecuații diferențiale canonice ale lui Hamilton.

Să ne oprim mai mult asupra acestei alternative. Să punem problema Cauchy pentru ecuaţia lui Hamilton-Jacobi (1):

$$S(\mathbf{q},\ t_0)=S_0(\mathbf{q}),\qquad \frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}},\ \mathbf{q},\ t\right)=0. \tag{2}$$

Pentru a construi soluţia acestei probleme, să introducem sistemul de ecuaţii canonice ale lui Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},\quad \dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

împreună cu condiţiile iniţiale (fig. 201)

$$\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0,\quad \mathbf{p}(t_0)=\left.\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0}.$$

Soluţia corespunzătoare acestor condiţii iniţiale este reprezentată în spaţiul $\{(\mathbf{q},\ t)\}$ de curba $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$ care este extremală a principiului $\delta\int L\,dt=0$ (unde lagrangeanul $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ este transformata Legendre în $\mathbf{p}$ a funcţiei $H(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t)$. Această extremală se numeşte caracteristică a problemei (2) care pleacă din punctul $\mathbf{q}_0$.

Dacă t_1 este suficient de aproape de t_0, caracteristicile care pleacă din puncte apropiate de $\mathbf{q}_0$ nu se intersectează pentru $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0|<R$. Mai mult, valorile $\mathbf{q}_0$ şi t pot fi luate drept coordonate ale punctului A în domeniul $|\mathbf{q}|\leqslant R,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (fig. 201).

Să construim acum „funcţia acţiune cu condiţia iniţială S_0":

$$S(A)=S_0(q_0)+\int_{\mathbf{q}_0,t_0}^{A} L(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t)\ dt \tag{3}$$

(integrarea se face de-a lungul caracteristicii care duce la A).

Teoremă. *Funcţia* (3) *este soluţie a problemei* (2).

Într-adevăr, condiţia iniţială este evident îndeplinită. Se verifică şi faptul că este satisfăcută ecuaţia lui Hamilton-Jacobi, la fel ca în teorema privind diferenţiala funcţiei acţiune (fig. 202).

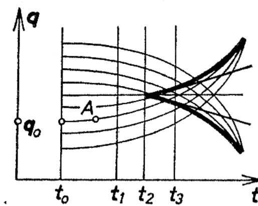


Fig. 201. Caracteristicile problemei lui Cauchy pentru ecuaţia lui Hamilton-Jacobi.

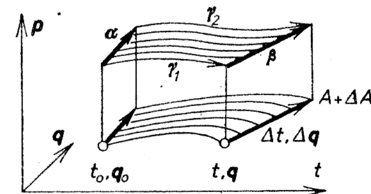


Fig. 202. Funcţia acţiune ca soluţie a ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi.

Conform lemei lui Stokes

$$\left(\int_{\gamma_1}-\int_{\gamma_2}+\int_{\beta}-\int_{\alpha}\right)(\mathbf{p}\ d\mathbf{q}-H\ dt)=0.$$

Dar pe α, $dt=0$, $\mathbf{p}=\partial S_0/\partial\mathbf{q}$ şi deci

$$\int_\alpha \mathbf{p}\ d\mathbf{q}-H\ dt=\int_\alpha \mathbf{p}\ d\mathbf{q}=\int_\alpha dS_0=S_0(\mathbf{q}_0+\Delta\mathbf{q})-S_0(\mathbf{q}_0).$$

Continuînd, $\gamma_{1,2}$ sînt traiectorii şi deci

$$\int_{\gamma_{1,2}}\mathbf{p}\ d\mathbf{q}-H\ dt=\int_{\gamma_{1,2}}L\ dt.$$

Rezultă

$$\int_\beta(\mathbf{p}\ d\mathbf{q}-H\ dt)=\left[S_0(\mathbf{q}_0+\Delta\mathbf{q})+\int_{\gamma_2}L\ dt\right]-\left[S_0(\mathbf{q}_0)+\int_{\gamma_1}L\ dt\right]=$$
$$=S(A+\Delta A)-S(A).$$

Cînd $\Delta t \to 0$, obținem $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$, $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}$, ceea ce demonstrează teorema.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze unicitatea soluției problemei (2).

I n d i c a ț i e. Se diferențiază S de-a lungul caracteristicilor.

P r o b l e m ă. Să se deseneze graficele funcțiilor multiforme $S(\mathbf{q})$ și $\mathbf{p}(\mathbf{q})$ pentru $t = t_3$ (fig. 201).

Răspuns. Vezi fig. 203.

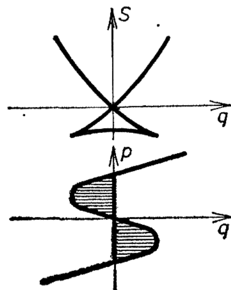


Fig. 203. Singularitate tipică pentru o soluție a ecuației lui Hamilton-Jacobi.

Unui punct de autointersecție al graficului lui S îi corespunde pe graficul lui $\mathbf{p}$ o *dreaptă Maxwell*: ariile hașurate sînt egale. Graficul $S(\mathbf{q}, t)$ are în punctul $(\mathbf{q}_0, t_2)$ o singularitate numită *coadă de rîndunică*.

§ 47. METODA LUI JACOBI-HAMILTON DE INTEGRARE A ECUAȚIILOR CANONICE ALE LUI HAMILTON

În acest paragraf se definește funcția generatoare a unei transformări canonice libere.

Ideea metodei lui Jacobi-Hamilton este următoarea: la o schimbare canonică de coordonate se păstrează atît forma canonică a ecuațiilor de mișcare cît și funcția lui Hamilton (§ 45, A). Prin urmare, dacă reușim să găsim o transformare canonică care aduce funcția lui Hamilton la o formă pentru care se poate efectua integrarea ecuațiilor canonice corespunzătoare, atunci am reușit în același timp să integrăm și ecuațiile canonice inițiale. Se dovedește că problema construirii unei astfel de transformări canonice se reduce la căutarea unui număr suficient de mare de soluții ale ecuației cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi. Aceasta este tocmai ecuația pe care trebuie s-o satisfacă funcția generatoare a transformării canonice căutate.

Trecînd la aparatul funcțiilor generatoare să remarcăm că acesta este deprimant de neinvariant și utilizează în mod esențial structura coordonatelor din spațiul fazelor $\{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$. Din cauza acestei situații trebuie să utilizăm aparatul derivatelor parțiale, acestea fiind obiecte pentru care însăși notațiile ascund o ambiguitate*).

A. Funcția generatoare. Să presupunem că $2n$ funcții $\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ și $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ de $2n$ variabile $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ definesc o transformare canonică $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$. Atunci 1-forma $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q}$ este exactă (o diferențială totală (§ 45, A):

$$\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q} = dS(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \tag{1}$$

P r o b l e m ă. Să se demonstreze și afirmația reciprocă: dacă această formă este o diferențială totală, atunci transformarea g este canonică.

Să presupunem acum că în vecinătatea unui punct $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ se pot lua drept coordonate independente funcțiile $(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$. Cu alte cuvinte, să presupunem că este diferit de zero în $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ jacobianul

$$\det \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right) \neq 0.$$

Transformările canonice care au această proprietate se numesc *libere*. În particular, în acest caz, funcția S se poate exprima local în aceste coordonate:

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = S_1(\mathbf{Q}, \mathbf{q}).$$

D e f i n i ț i e. Funcția $S_1(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$ se numește *funcție generatoare* a transformării canonice g.

Subliniem că S_1 *nu este o funcție pe spațiul de faze* $\mathbf{R}^n$; această funcție este definită pe un domeniu al produsului direct $\mathbf{R}^n_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{R}^n_{\mathbf{q}}$ a două spații numerice de dimensiune n, ale căror puncte se notează cu $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{q}$.

*) Trebuie înțeles clar că, în planul x, y, mărimea $\partial u/\partial x$ depinde nu numai de funcția aleasă drept coordonată x, ci și de cea aleasă drept coordonată y: în niște variabile noi (x, z) valoarea lui $\partial u/\partial x$ va fi diferită. Ar trebui să scriem

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\text{const}}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=\text{const}}.$$

Din (1) rezultă că „derivatele parțiale" ale lui S_1 sînt

$$\frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{Q}} = -\mathbf{P}. \tag{2}$$

Se dovedește că și invers, orice funcție S_1 definește, prin intermediul formulelor (2), o transformare canonică g.

Teoremă. *Fie $S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})$ o funcție definită într-o vecinătate a unui punct $(\mathbf{Q}_0, \mathbf{q}_0)$ al produsului direct a două spații numerice euclidiene de dimensiune n. Dacă*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{Q} \partial \mathbf{q}}\right)\bigg|_{(\mathbf{Q}_0,\mathbf{q}_0)} \neq 0,$$

atunci funcția S_1 este funcția generatoare a unei transformări canonice libere.

Demonstrație. Să considerăm următoarea ecuație în raport cu coordonatele Q:

$$\frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}.$$

Conform teoremei funcției implicite, această ecuație se poate rezolva și definește în vecinătatea punctului $\left(\mathbf{p}_0 = \frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\bigg|_{(\mathbf{Q}_0,\mathbf{q}_0)}, \mathbf{q}_0\right)$ o funcție $\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ (care satisface $\mathbf{Q}(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0) = \mathbf{Q}_0$. Într-adevăr, determinantul care este important $\det \left(\frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{Q}\, \partial \mathbf{q}}\right)_{(\mathbf{Q}_0,\mathbf{q}_0)}$ este nenul prin ipoteză.

Să considerăm acum funcția

$$P_1(\mathbf{Q},\mathbf{q}) = -\frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial_Q}$$

și să punem

$$\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = P_1(\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{q}).$$

Atunci aplicația locală $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ care transformă punctele $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ în punctele $(\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ este canonică și are funcția generatoare S_1; într-adevăr, prin construcție

$$\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q} = \frac{\partial S(\mathbf{Q},\mathbf{p})}{\partial_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q} + \frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial_{\mathbf{Q}}} d\mathbf{Q}.$$

Ea este și liberă, căci $\det(\partial \mathbf{Q}/\partial \mathbf{p}) = \det(\partial^2 S_1/\partial_{\mathbf{Q}}\, \partial_{\mathbf{q}})^2 \neq 0$. Teorema este demonstrată.

O transformare $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este dată în general de $2n$ *funcții de* $2n$ *variabile.* Am văzut că o transformare canonică este dată, de fapt, de *o singură funcție de* $2n$ *variabile* — funcția ei generatoare. Este ușor de imaginat avantajul pe care îl aduce aplicarea funcțiilor generatoare în toate calculele legate de transformările canonice. Cîștigul este cu atît mai mare cu cît numărul $2n$ al variabilelor este mai mare.

B. Ecuația lui Hamilton-Jacobi pentru funcția generatoare. Să observăm că ecuațiile diferențiale canonice pentru care funcția lui Hamilton H depinde numai de variabilele $\mathbf{Q}$ se integrează ușor. Într-adevăr, dacă $H = K(\mathbf{Q})$, atunci ecuațiile canonice sînt de forma

$$\dot{\mathbf{Q}} = 0, \quad \dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \tag{3}$$

de unde rezultă

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0), \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) + t\, \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}\bigg|_{\mathbf{Q}_0}.$$

Vom căuta acum o transformare canonică care să reducă funcția lui Hamilton $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ la forma $K(\mathbf{Q})$. În acest scop, vom căuta funcția generatoare $S(\mathbf{Q},\mathbf{q})$ a unei asemenea transformări. Din (2) obținem condiția

$$H\left(\frac{\partial S(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = K(\mathbf{Q}) \tag{4}$$

în care, după derivare în loc de $\mathbf{q}$ trebuie pus $\mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Să observăm că pentru $\mathbf{Q}$ fixat, ecuația (4) are forma ecuației lui Hamilton-Jacobi.

Teorema lui Jacobi. *Dacă se cunoaşte o soluţie* $S(\mathbf{Q},\mathbf{q})$ *a ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi* (4), *care depinde de n parametri* Q_i*) *şi satisface condiţia* det $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{Q}\,\partial \mathbf{q}}\right) \neq 0$, *atunci ecuaţiile canonice*

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{5}$$

se rezolvă explicit prin cvadraturi. În plus, funcţiile $\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ *definite de ecuaţiile* $\partial S(\mathbf{Q},\mathbf{q})/\partial \mathbf{q} = \mathbf{p}$, *reprezintă n integrale prime ale ecuaţiilor* (5).

D e m o n s t r a ţ i e. Să considerăm transformarea canonică cu funcţia generatoare $S(\mathbf{Q},\mathbf{q})$. Avem, conform formulelor (2), $\mathbf{p} = \partial S(\mathbf{Q},\mathbf{q})/\partial \mathbf{q}$ ecuaţie din care obţinem $\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Să calculăm funcţia $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ în noile coordonate $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$. Avem $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H(\partial s(\mathbf{Q},\mathbf{q})/\partial \mathbf{q},\mathbf{q})$. Pentru a calcula funcţia lui Hamilton în noile coordonate, ar fi trebuit să introducem în această expresie (după derivare), în loc de $\mathbf{q}$, expresia lui $\mathbf{q}$ ca funcţie de $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{Q}$. Conform relaţiei (4), această expresie nu depinde însă deloc de $\mathbf{q}$, astfel încît avem pur şi simplu

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = K(\mathbf{Q})$$

Prin urmare, în noile coordonate ecuaţiile (5) au forma (3), de unde rezultă în mod direct şi teorema lui Jacobi.

Teorema lui Jacobi reduce rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare (5) la căutarea unei integrale complete a ecuaţiei cu derivate parţiale (4). Poate părea uimitor că o astfel de reducere, de la ceva simplu la ceva mai complicat, reprezintă o metodă eficace de rezolvare a problemelor concrete. Cu toate acestea se dovedeşte că această metodă este cea mai puternică dintre metodele de integrare exactă şi că multe din problemele rezolvate de Jacobi nu pot fi rezolvate prin alte metode.

C. Exemple. Să considerăm problema *atracţiei de către două centre fixe*. Interesul pentru această problemă a crescut în ultimul timp în legătură cu studierea mişcării sateliţilor artificiali ai Pămîntului. Este suficient de clar că două centre de atracţie apropiate situate pe axa z aproximează forţa de atracţie a unui elipsoid uşor alungit de-a lungul axei z. Din nefericire, Pămîntul nu este alungit, ci turtit. Soluţia constă în a situa centrele de atracţie în puncte imaginare la distanţele $\pm i\varepsilon$ de-a lungul axei z. Formulele analitice ale soluţiilor îşi păstrează desigur valabilitatea şi în domeniul complex. În acest mod, se obţine o aproximare a cîmpului gravitaţional al Pămîntului, în care ecuaţiile de mişcare se integrează exact şi care este mai aproape de realitate decît aproximaţia kepleriană (în care Pămîntul este considerat un punct).

*) O familie cu n parametri de soluţii ale ecuaţiei (4) se numeşte *integrală completă*.

Pentru simplitate, să considerăm aici numai problema plană a atracţiei de către două mase fixe egale. Succesul metodei lui Jacobi se bazează pe utilizarea unui sistem de coordonate adecvat, aşa-numitele *coordonate eliptice*. Fie $2c$ distanţa dintre cele două puncte fixe O_1 şi O_2 (fig. 204), iar distanţele masei care se mişcă la O_1 şi O_2 — r_1 respectiv r_2. Coordonatele eliptice ξ, η se definesc ca fiind suma şi diferenţa distanţelor pînă la punctele O_1 şi O_2: $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$.

P r o b l e m ă. Să se exprime funcţia lui Hamilton cu ajutorul coordonatelor eliptice.

R e z o l v a r e. Curbele ξ = const sînt elipse cu focarele în O_1 şi O_2, iar curbele η = const, hiperbole cu aceleaşi focare (fig. 205). Ele sînt reciproc ortogonale şi deci $ds^2 = a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2$ *). Să determinăm coeficienţii a şi b. În mişcarea de-a lungul

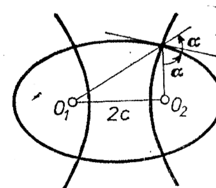
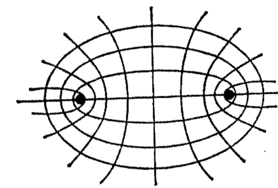


Fig. 204. Coordonate eliptice.


Fig. 205. Elipse şi hiperbole omofocale.

unei elipse avem $dr_1 = \cos\alpha\, ds$, $dr_2 = -\cos\alpha\, ds$, $d\eta = 2\cos\alpha\, ds$. În mişcarea de-a lungul unei hiperbole avem $dr_1 = \sin\alpha\, ds$, $dr_2 = \sin\alpha\, ds$, $d\xi = 2\sin\alpha\, ds$. Prin urmare, $a = \frac{1}{2\sin\alpha}$, $b = \frac{1}{2\cos\alpha}$. În continuare, din triunghiul O_1MO_2 găsim

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha = 4c^2,$$

*) Este vorba de exprimarea metricii euclidiene în coordonatele ξ, η. (*N. T.*)

de unde

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2},$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{2r_1r_2}{2r_1r_2}$$

și deci

$$\cos^2\alpha = \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4r_1r_2}.$$

Dar, dacă $ds^2 = \sum a_i\, dq_i^2$, atunci $T = \sum a_i^2 \frac{\dot{q}_i^2}{2}$, $p_i = a_i^2 \dot{q}_i$, $H = \sum \frac{p_i^2}{2a_i^2} + U$. Obținem deci

$$H = p_\xi^2 \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{2r_1r_2} + p_\eta^2 \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_1r_2} - \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}.$$

Cum $r_1 + r_2 = \xi$, $r_1 - r_2 = \eta$ și $4r_1r_2 = \xi^2 - \eta^2$, obținem în final

$$H = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2\, p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4\,k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Vom rezolva acum ecuația lui Hamilton-Jacobi.

Definiție. Dacă în ecuația

$$\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, p_1 \ldots, p_n\right) = 0$$

variabila q_1 și derivata $\partial S/\partial q_1$ apar numai sub forma unei combinații $\varphi(\partial S/\partial q_1, q_2)$, atunci se spune că *variabila q_1 se separă.*

În acest caz, este util să se caute soluția ecuației sub forma

$$S = S_1(q_1) + S'(q_2, \ldots, q_n).$$

Punînd în ecuația inițială $\varphi(\partial S_1/\partial q_1, q_1) = c_1$ obținem o ecuație cu un număr mai mic de variabile pentru S'

$$\Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q^2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, \ldots, q_n; c_1\right) = 0.$$

Fie $S' = S'(q_2, \ldots, q_n; c_1, c)$ o familie de soluții ale acestei ecuații depinzînd de niște parametri c_i. Funcția $S_1(q_1, c_1) + S'$ va fi soluție a ecuației inițiale dacă S_1 satisface ecuația diferențială ordinară $\varphi(dS/dq_1, q_1) = c_1$. Această ultimă ecuație se rezolvă ușor; exprimînd pe dS_1/dq_1 prin q_1 și c_1 obținem $dS_1/dq_1 = \psi(q_1, c_1)$, de unde $S_1 = \int^{q_1} \psi(q_1, c_1)\, dq_1$.

Dacă în noua ecuație (cu Φ_2) se separă una din variabile, să spunem q_2, putem repeta această procedură și continuînd (în situațiile fericite) obținem o soluție a ecuației inițiale care depinde de n constante

$$S_1(q_1; c_1) + S_2(q_2; c_1, c_2) + \ldots S_n(q_n; c_1, \ldots, c_n).$$

Într-un asemenea caz se spune că *variabilele se separă complet.*

Dacă variabilele se separă complet, atunci soluția depinzînd de n parametri a ecuației lui Hamilton-Jacobi $\Phi_1(\partial S/\partial q, q) = 0$ se obține prin cvadraturi. În acest caz se integrează prin cvadraturi și sistemul corespunzător de ecuații canonice (teorema lui Jacobi).

Să aplicăm cele spuse problemei celor două centre fixe. Ecuația lui Hamilton-Jacobi (4) este de forma

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2(\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2(4c^2 - \eta^2) = K(\xi^2 - \eta^2) + 4k\xi.$$

Putem separa variabilele punînd, de exemplu,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2(\xi^2 - 4c^2) - 4k\xi - K\xi^2 = c_1,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2(4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 = -c_1.$$

Obținem atunci integrala completă a ecuației (4) sub forma

$$S(\xi,\ \eta;c_1,c_2)=\int\sqrt{\frac{c_1+c_2\xi^2+4K\xi}{\xi^2-4c^2}}\,d\xi+\int\sqrt{\frac{-c_1-c_2\eta^2}{4c^2-\eta^2}}\,d\eta.$$

Teorema lui Jacobi furnizează acum expresia explicită a mișcărilor în problema celor două centre fixe prin intermediul integralelor eliptice. Un studiu calitativ amănunțit al acestor mișcări poate fi găsit în cartea lui A. Charlier *Mecanica cerească*, Paris, 1963.

O altă aplicație a problemei atracției de către două centre fixe o reprezintă studierea *mișcării cu o tracțiune constantă în cîmpul unui singur centru atractor.*

Este vorba de mișcarea unui punct material sub acțiunea unui centru fix de atracție newtoniană și a încă unei forțe („tracțiune"), constantă ca mărime și direcție.

Această problemă poate fi considerată ca un caz limită al problemei atracției de către două centre fixe. În procesul de trecere la limită, al doilea centru se îndepărtează la infinit în direcția forței de tracțiune (astfel încît masa lui crește pentru a fi realizată constanța tracțiunii, deci proporțional cu pătratul distanței).

Cazul limită al problemei atracției de către două centre fixe astfel obținut se integrează în mod explicit (în funcții eliptice). Ne putem convinge de acest lucru cu ajutorul trecerii la limită sau separînd direct variabilele în problema mișcării cu tracțiune constantă în cîmpul unui centru.

Coordonatele în care se separă variabilele, în această problemă, se obțin prin trecerea la limită din coordonatele eliptice, atunci cînd unul dintre centre se îndepărtează la infinit. Ele se numesc *coordonate parabolice* și sînt date de formulele

$$u=r-x,\quad v=r+x$$

(tracțiunea este îndreptată de-a lungul axei x).

Descrierea traiectoriilor mișcării cu tracțiune constantă (dintre care multe sînt destul de întortocheate) poate fi găsită în cartea lui V.V. Belețki, *Studii privind mișcarea aparatelor cosmice* Nauka, Moscova, 1972.

Ca alt exemplu, să considerăm problema determinării geodezicelor unui elipsoid cu trei axe (inegale)*). În acest caz sînt utile coordonatele eliptice ale lui Jacobi λ_1, λ_2, λ_3, care sînt cele trei rădăcini ale ecuației

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda}=1,\quad \lambda_1>\lambda_2>\lambda_3,$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt coordonatele carteziene. Nu voi efectua aici calculele care arată că variabilele se separă (ele pot fi găsite, de exemplu, în *Lecțiile de dinamică* ale lui Jacobi), ci voi da numai rezultatul: mai precis, voi descrie comportarea geodezicelor.

Suprafețele $\lambda_1=\text{const}$, $\lambda_2=\text{const}$, $\lambda_3=\text{const}$ sînt suprafețe de gradul al doilea numite omofocale. Una din ele este un elipsoid, alta un hiperboloid cu o pînză, iar a treia, un hiperboloid cu două pînze. Elipsoidul poate degenera în interiorul unei elipse; hiperboloidul cu o pînză—în exteriorul unei elipse sau în partea de plan cuprinsă între ramurile unei hiperbole, iar cel cu două pînze — în partea din plan din exteriorul unei hiperbole sau într-un întreg plan.

Să presupunem că elipsoidul pe care îl considerăm este unul din familia de elipsoizi cu semiaxele $a>b>c$. Fiecare din cele trei elipse $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ este o geodezică închisă. Orice geodezică care pleacă dintr-un punct al elipsoidei celei mai mari (cu semiaxele a și b) într-o direcție apropiată de direcția elipsei (fig. 206) este tangentă pe rînd la cele două curbe închise care formează

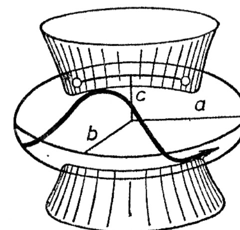


Fig. 206. Geodezice pe un elipsoid cu trei axe.

intersecția elipsoidului cu unul din hiperboloidele cu o pînză a familiei noastre $\lambda=\text{const}$**).

*) Problema geodezicelor pe elipsoid și problema înrudită privind biliardul elipsoidal și-au găsit aplicare într-o serie de lucrări recente de fizică legate de aparatura laser.

**) Aceste curbe de intersecție a suprafețelor focale se mai numesc și *linii de curbură*.

Această geodezică este sau închisă, sau umple dens (peste tot) inelul dintre cele două curbe de intersecție. Pe măsura măririi încălzirii geodezicei, hiperboloizii se contractă spre domeniul din „interiorul" unei hiperbole care intersectează elipsoidul nostru în cele patru „puncte ombilicale" ale sale. În cazul limită se obțin geodezice care trec prin punctele ombilicale (fig. 207).

Este interesant să observăm că toate geodezicele care pleacă dintr-un punct ombilical se strîng din nou în punctul ombilical opus și au toate, între punctele ombilicale, aceeași lungime. Numai una dintre aceste geodezice este însă închisă; aceasta este elipsa medie de semiaxele a și c. Dacă ne vom deplasa de-a lungul oricărei alte geodezice care trece printr-un punct ombilical atunci ne vom apropia asimptotic de această elipsă.

În sfîrșit, geodezicele care taie elipsa mare sub un unghi și mai mare (fig. 208) sînt pe rînd tangente la cele două curbe de intersecție ale elipsoidului nostru cu un hiperboloid cu două pînze*). În general, ele umplu dens (peste tot) inelul dintre aceste două curbe.

Printre aceste geodezice se distinge elipsa mică cu semiaxele b și c.

„Dificultatea principală care apare la integrarea unor ecuații diferențiale date constă în alegerea unor coordonate adecvate, pentru găsirea cărora nu există nici o regulă. Din acest motiv trebuie să mergem pe calea inversă și găsind o anumită substituție remarcabilă, să căutăm problemele în care ea poate fi aplicată cu succes" (Jacobi, *Lecții de dinamică*).

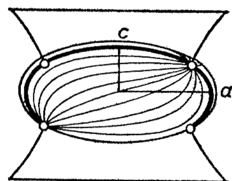


Fig. 207. Geodezice care pleacă dintr-un punct ombilical.

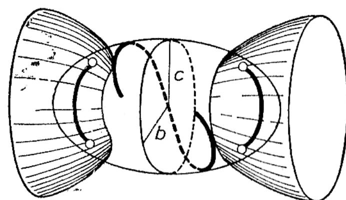


Fig. 208. Geodezicele unui elipsoid, tangente la un hiperboloid cu două pînze.

*) Și aceste curbe sînt linii de curbură.

Un tabel de probleme care admit separarea variabilelor în coordonate sferice, eliptice și parabolice se găsește în § 48 al *Mecanicii* lui Landau și Lifschitz.

§ 48. FUNCȚII GENERATOARE

În acest paragraf se construiește aparatul funcțiilor generatoare pentru transformări canonice care nu sînt libere.

A. Funcția generatoare S_2 **(P,q).** Fie $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ o transformare canonică $g(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Conform definiției formei canonice, 1-forma diferențială pe $\mathbf{R}^{2n}$

$$\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q} = dS$$

este diferențiala totală a unei funcții anumite $S(\mathbf{p},\mathbf{q})$. O transformare canonică este *liberă* dacă se pot lua ca $2n$ variabile independente $\mathbf{q}$ și $\mathbf{Q}$. În acest caz, funcția $S(\mathbf{p},\mathbf{q})$, exprimată prin coordonatele $\mathbf{q}$ și $\mathbf{Q}$, se numește *funcția generatoare* $S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})$. Cunoscînd numai această funcție, se pot determina cele $2n$ funcții care definesc transformarea canonică, din relațiile

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial S_1(\mathbf{Q},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{Q}}. \tag{1}$$

Dar transformările canonice nu sînt toate nici pe departe libere. De exemplu, în cazul transformării identice, $\mathbf{q}$ și $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ sînt dependente. Prin urmare, transformarea identică nu poate fi dată printr-o funcție generatoare $S_1(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$.

Se poate însă trece la o funcție generatoare de altă formă, prin intermediul transformării Legendre. De exemplu, să presupunem că $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$ pot fi considerate ca coordonate locale independente în $\mathbf{R}^{2n}$ (deci că determinantul $\det \partial(\mathbf{P},\mathbf{q})/\partial(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \det(\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{p})$ este nenul). Avem deci

$$\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q} = dS, \quad \mathbf{p}\, d\mathbf{q} + \mathbf{Q}\, d\mathbf{P} = d(\mathbf{P}\mathbf{Q} + S).$$

Funcţia $\mathbf{PQ} + S$, exprimată prin coordonatele $(\mathbf{P},\mathbf{q})$, se numeşte şi ea *funcţie generatoare*

$$S_2(\mathbf{P},\mathbf{q}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} + S(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Pentru această funcţie găsim că

$$\mathbf{P} = \frac{\partial S_2(\mathbf{P},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_2(\mathbf{P},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{P}}. \tag{2}$$

Reciproc fie $S_2(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ o funcţie oarecare pentru care determinantul $\det\left(\frac{\partial^2 S_2(\mathbf{P},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{P}\partial \mathbf{q}}\right)\Big|_{(\mathbf{P}_0,\mathbf{q}_0)}$ este nenul. Atunci, într-o vecinătate a punctului $\left(\mathbf{p}_0 = \partial S_2(\mathbf{P}, \mathbf{q})/\partial \mathbf{q}\Big|_{(\mathbf{P}_0,\mathbf{q}_0)}, \mathbf{q}_0\right)$ se poate rezolva primul grup de ecuaţii din (2) în raport cu $\mathbf{P}$ şi se obţine o funcţie $\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ (care satisface $\mathbf{P}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{P}_0$). După aceea, a doua grupă de ecuaţii din (2) defineşte pe $\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ şi aplicaţia $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\mathbf{P},\mathbf{Q})$ este canonică (demonstraţi!)

Problemă. Să se determine funcţia generatoare S_2 a transformării identice $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$.

Răspuns. $\mathbf{P}\,\mathbf{q}$.

Observaţie. Funcţia generatoare $S_2(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ este în plus comodă şi pentru că în formulele (2) nu apar semne minus şi ele pot fi uşor ţinute minte dacă se memorează că funcţia generatoare a transformării identice este $\mathbf{Pq}$.

B. Există 2^n funcţii generatoare. Din păcate, nici variabilele $\mathbf{P}, \mathbf{q}$ nu pot fi luate totdeauna drept coordonate locale. *Totdeauna* se poate însă alege *un ansamblu de n noi coordonate*

$$P_i = (P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}), \; Q_j = (Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_{n-k}})$$

care, împreună cu vechile funcţii $\mathbf{q}$, să formeze $2n$ coordonate independente.

În notaţia de mai sus, $(i_1,\ldots,i_k)$, $(j_1,\ldots,j_{n-k})$ reprezintă o partiţie arbitrară a mulţimii $(1,\ldots, n)$ (în două părţi disjuncte) astfel încît numărul total de cazuri este 2^n.

Teoremă. *Fie g: $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ o transformare canonică definită de funcţiile* $\mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q})$. *În vecinătatea oricărui punct* $(\mathbf{p}_0\ \mathbf{q}_0)$

se poate alege drept sistem de coordonate locale în $\mathbf{R}^{2n}$ *cel puţin unul din cele* 2^n *ansambluri de funcţii* $(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j\ \mathbf{q})$:

$$\det \frac{\partial(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{q})} = \det \frac{\partial(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j)}{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)} = 0.$$

În vecinătatea unui astfel de punct, transformarea canonică g poate fi regăsită, cu ajutorul funcţiei

$$S_3(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{q}) = (\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i) + \int (\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \mathbf{P}\, d\mathbf{Q}),$$

din relaţiile

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q}_i = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}_i}, \qquad \mathbf{P}_j = -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}_j}. \tag{3}$$

Reciproc, dacă $S_3(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{q})$ *este o funcţie oarecare pentru care determinantul* $\det\left(\frac{\partial^2 S_3}{\partial \mathbf{U}\partial \mathbf{q}}\right)_{(\mathbf{U}_0,\mathbf{q}_0)}$ $(\mathbf{U} = \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j))$ *este nenul atunci relaţiile* (3) *definesc o transformare canonică în vecinătatea punctului* $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$.

Demonstraţia acestei teoreme se poate face aproape la fel ca cea din cazul particular $k = n$. Trebuie numai să se verifice că pentru unul din cele 2^n ansambluri $(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j, \mathbf{q})$, determinantul $\det \frac{\partial(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j)}{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)}$ este nenul.

Să considerăm diferenţiala transformării g în punctul $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$. Identificînd spaţiile tangente la $\mathbf{R}^{2n}$ cu $\mathbf{R}^{2n}$, putem considera că g_* este o transformare liniară simplectică $A: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$.

Să notăm cu π planul $\mathbf{p}$-coordonatelor în $\mathbf{R}^{2n}$ (fig. 209). π este un subspaţiu izotrop n-dimensional; imaginea sa $A\pi$ este şi ea un subspaţiu izotrop. Să proiectăm planul $A\pi$ pe planul σ de coordonate $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$, paralel cu axele coordonate rămase, deci în direcţia planului de dimensiune n izotrop $\sigma = \{(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_i)\}$. Fie $T: A\pi \to \sigma$ operatorul de proiectare.

Condiţia $\det \frac{\partial(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j)}{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)} \neq 0$ are ca semnificaţie faptul că aplicaţia liniară $T \circ A: \pi \to \sigma$ este nedegenerată. Transformarea A este nedegenerată şi deci pentru ca $T \circ A$ să fie nedegenerată este necesar şi suficient ca proiecţia $T: A\pi \to \sigma$ să nu fie degenerată. Cu alte cuvinte, subspaţiul izotrop $A\pi$ trebuie să fie transversal la subspaţiul izotrop $\bar{\sigma}$. Am arătat însă în §41 că cel puţin unul din cele 2^n subspaţii izotrope de coordonate este transversal la $A\pi$. Prin urmare, unul din cei 2^n determinanţi de care ne interesăm este nenul, ceea ce trebuia demonstrat.

Problemă. Să se demonstreze că sistemul de 2^n funcţii generatoare pus în evidenţă este minimal: există transformări canonice pentru care numai unul din cei 2^n determinanţi este nenul*).

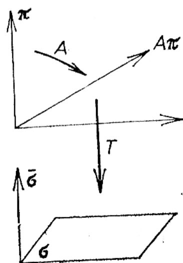


Fig. 209. Pentru verificarea nedegenerării.

C. Transformări canonice infinitezimale. Să considerăm acum o transformare canonică apropiată de transformarea identică. Funcţia ei generatoare poate fi luată aproape de funcţia generatoare $\mathbf{Pq}$ a transformării identice. Să considerăm o familie g_ε de transformări canonice, care depinde de un parametru ε, astfel încît funcţia generatoare are forma

$$\mathbf{Pq} + \varepsilon S\,(\mathbf{P}, \mathbf{q}; \varepsilon); \; \mathbf{p} = \mathbf{P} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}. \tag{4}$$

Se numeşte *transformare canonică infinitezimală* o clasă de echivalenţă de familii g_ε: două familii g_ε şi h_ε sînt echivalente dacă ele se deosebesc printr-o mărime mică de ordinul doi:

$$|g_\varepsilon - h_\varepsilon| = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Teoremă. *O transformare canonică infinitezimală satisface ecuaţiile diferenţiale ale lui Hamilton*

$$\left.\frac{d\mathbf{P}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \left.\frac{d\mathbf{Q}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}.$$

cu funcţia lui Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = S\,(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0)$.

*) Numărul de tipuri de funcţii generatoare oscilează în diverse lucrări de la 4 la 4^n!

Demonstraţia se obţine din formulele (4): $\mathbf{P} \to \mathbf{q}$, cînd $\varepsilon \to 0$.

Corolar. *Un grup cu un parametru de transformări ale spaţiului de faze* $\mathbf{R}^{2n}$ *satisface ecuaţiile canonice ale lui Hamilton dacă şi numai dacă transformările sînt canonice.*

Legat de această teoremă, funcţia lui Hamilton H este denumită «*funcţia generatoare a transformării canonice infinitezimale*». Să observăm că, spre deosebire de funcţiile generatoare S, H este o funcţie de punctele spaţiului fazelor, legată invariant de transformarea canonică.

Funcţia H are o interpretare geometrică simplă. Fie $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ două puncte din $\mathbf{R}^{2n}$ (fig. 210), γ — o curbă care le uneşte, $\partial\gamma = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

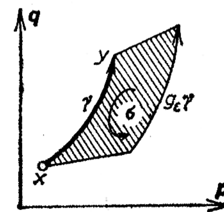


Fig. 210. Sensul geometric al hamiltonianului.

Să considerăm evoluţia curbei γ prin transformările noastre, $g_\tau\gamma$, $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon$. Ea descrie o bandă $\sigma(\varepsilon)$. Să calculăm integrala formei $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ pe 2-lanţul

$$\sigma(\varepsilon); \; \partial\sigma(\varepsilon) = g_\varepsilon\gamma - \gamma + \{g_\tau \mathbf{y}\} - \{g_\tau \mathbf{x}\}.$$

Problemă. Să se arate că limita

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{\sigma(\varepsilon)} \omega^2 = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{x})$$

există şi nu depinde de reprezentantul clasei lui g_ε.

Din acest rezultat obţinem încă o dată un rezultat deja cunoscut.

Corolar. *O transformare canonică păstrează atît forma ecuaţiilor canonice, cît şi mărimea funcţiei lui Hamilton.*

Într-adevăr, am calculat creşterea funcţiei lui Hamilton utilizînd numai o transformare canonică infinitezimală şi structura simplectică a lui $\mathbf{R}^{2n}$ — forma ω^2.

CAPITOLUL 10
INTRODUCERE ÎN TEORIA PERTURBAŢIILOR

Teoria perturbaţiilor reprezintă un ansamblu foarte util de metode destinate rezolvării aproximative a „problemelor" „perturbate", apropiate de probleme „neperturbate" care sînt rezolvate exact. Aceste metode se justifică uşor atunci cînd este vorba de studierea mişcării într-un interval de timp nu prea mare. În ce măsură rezultatele teoriei perturbaţiilor pot fi considerate ca valabile atunci cînd se studiază mişcarea pe intervale mari sau infinite de timp reprezintă o problemă destul de puţin studiată.

Vom vedea că în multe probleme integrabile neperturbate mişcarea este cvasiperiodică. Pentru studierea mişcării atît în cazul neperturbat cît mai ales în cel perturbat sînt utile nişte coordonate simplectice speciale: variabilele „acţiune—unghi". În încheiere, vom demonstra o teoremă care fundamentează teoria perturbaţiilor pentru sistemele cu o singură frecvenţă şi vom demonstra invarianţa adiabatică a variabilei acţiune pentru sistemele de acest tip.

§ 49. SISTEME INTEGRABILE

Pentru a integra un sistem de $2n$ ecuaţii diferenţiabile ordinare trebuie să cunoaştem $2n$ integrale prime. Se dovedeşte că dacă se dă un sistem canonic de ecuaţii diferenţiale, atunci în multe cazuri este suficient să se cunoască numai n integrale prime — fiecare din ele permite reducerea cu două unităţi, şi nu cu una, a ordinului sistemului.

A. Teorema lui Liouville privind sistemele integrabile. Reamintim că o funcţie F este integrală primă a sistemului cu funcţia lui Hamilton H dacă şi numai dacă paranteza lui Poisson (H, F) este identic egală cu 0:

$$(H, F) \equiv 0.$$

Definiţie. Două funcţii F_1 şi F_2, definite pe o varietate simplectică, sînt *în involuţie* dacă paranteza lui Poisson este identic egală cu zero.

Liouville a demonstrat că *dacă pentru un sistem cu n grade de libertate (deci cu un spaţiu de faze de dimensiuni $2n$) se cunosc n integrale prime independente în involuţie, atunci sistemul se integrează prin cvadraturi.*

Iată formularea exactă a acéstei teoreme:

Să presupunem că pe o varietate simplectică de dimensiune $2n$ se dau n funcţii în involuţie $F_1, \ldots, F_n$:

$$(F_i, F_j) \equiv 0, \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Să considerăm o mulţime de nivel constant a funcţiilor F_i

$$M_{\mathbf{f}} = \{x : F_i(x) = f_i, \ i = 1, \ldots, n\}, f_i \in \mathbf{R}.$$

Să presupunem că pe $M_{\mathbf{f}}$ cele n funcţii F_i sînt independente (deci că cele n 1-forme diferenţiale dF_i sînt liniar independente în orice punct din $M_{\mathbf{f}}$).

În aceste condiţii:

1) *$M_{\mathbf{f}}$ este o varietate netedă invariantă la curentul cu funcţia lui Hamilton $H = F_1$;*

2) *Dacă varietatea $M_{\mathbf{f}}$ este compactă şi conexă, atunci ea este difeomorfă cu torul n-dimensional*

$$T^n = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \bmod 2\pi\};$$

3) *Curentul cu funcţia lui Hamilton H defineşte pe $M_{\mathbf{f}}$ o mişcare cvasiperiodică: în coordonatele unghiulare $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$*

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}, \ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f});$$

4) *Ecuaţiile canonice cu funcţia lui Hamilton H se integrează prin cvadraturi.*

Înainte de a demonstra această teoremă, să enunţăm cîteva din corolarele ei.

Corolarul 1. *Dacă într-un sistem canonic cu două grade de libertate se cunoaşte o integrală primă F care nu depinde de funcţia lui*

Hamilton H, atunci sistemul se integrează prin cvadraturi; o subvarietate compactă, conexă și de dimensiune 2, $H = h$, $F = f$, a spațiului fazelor este un tor invariant pe care mișcarea este cvasiperiodică.

Într-adevăr, F și H sînt în involuție, F fiind integrală primă a sistemului cu funcția lui Hamilton H.

Ca un exemplu de sistem cu trei grade de libertate, să considerăm un titirez greu lagrangean simetric, fixat într-un punct de pe o axă. Se vede imediat că există trei integrale prime H, M_z și M_3. Se verifică ușor că integralele M_z și M_3 sînt în involuție. Mai departe, varietatea $H = h$ în spațiul fazelor este compactă. Prin urmare, fără nici un fel de calcule, putem spune imediat că pentru majoritatea condițiilor inițiale*) mișcarea titirezului este cvasiperiodică: orbitele umplu torii tridimensionali $H = c_1$, $M_z = c_2$, $M_3 = c_3$. Cele trei frecvențe corespunzătoare se numesc frecvențele de rotație proprie, precesie și respectiv nutație.

Alte exemple se obțin din următoarea observație: ***dacă un sistem canonic se integrează prin metoda lui Jacobi-Hamilton, atunci el are n integrale prime în involuție.***

Într-adevăr, metoda constă în a determina o transformare canonică $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ în care funcțiile P_i să fie integrale prime. Este însă evident că funcțiile P_i și P_j sînt în involuție.

Cele arătate se aplică, în particular, la problema atracției de către două centre fixe. Numărul de exemple se poate mări ușor; de fapt, teorema lui Liouville formulată mai sus acoperă toate problemele dinamicii integrate pînă în ziua de azi.

B. Începutul demonstrației teoremei lui Liouville. Să trecem la demonstrarea teoremei. Să considerăm mulțimea de nivel constant a integralelor prime:

$$M_{\mathbf{f}} = \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

Conform ipotezei, cele n 1-forme diferențiale dF_i sînt liniar independente, în fiecare punct al lui $M_{\mathbf{f}}$. Aplicînd teorema funcțiilor implicite rezultă că $M_{\mathbf{f}}$ este o subvarietate de dimensiune n a spațiului de faze de dimensiune $2n$.

*) Excepție fac mulțimile de nivel constant singulare, unde nu este satisfăcută independența integralelor.

Lema 1. *Pe varietatea $M_{\mathbf{f}}$ de dimensiune n există n cîmpuri de vectori liniar independente în fiecare punct și care comută între ele.*

D e m o n s t r a ț i e. Structura simplectică a spațiului fazelor definește operatorul I care transformă 1-formele diferențiale în cîmpuri de vectori. Operatorul I transformă 1-forma dF_i în cîmpul $I\, dF_i$ de viteze al sistemului hamiltonian cu funcția lui Hamilton F_i. Să arătăm că *cele n cîmpuri $I\, dF_i$ sînt tangente la $M_{\mathbf{f}}$, comută și sînt independente.*

Într-adevăr, din independența 1-formelor dF_i și faptul că operatorul I este nedegenerat (I este izomorfism!) rezultă independența cîmpurilor $I\, dF_i$ în fiecare punct. Cîmpurile $I\, dF_i$ comută două cîte două deoarece parantezele lui Poisson ale funcțiilor lor Hamilton sînt nule: $(F_i, F_j) \equiv 0$. Din același motiv derivata funcției F_i în direcția cîmpului $I\, dF_j$ este nulă, pentru orice $i, j = 1, \ldots, n$. Prin urmare, cîmpurile $I\, dF_i$ sînt tangente la $M_{\mathbf{f}}$ și lema 1 este demonstrată.

Să observăm că, de fapt, am demonstrat ceva mai mult ca lema 1:

1′) *Varietatea $M_{\mathbf{f}}$ este invariantă la fiecare din cei n curenți care comută g_i^t cu funcțiile lui Hamilton F_i; $g_i^t g_j^s = g_j^s g_i^t$;*

1″) *Varietatea $M_{\mathbf{f}}$ este izotropă (altfel spus, 2-forma ω^2 se anulează pe $TM_{\mathbf{f}}\big|_x$* pentru orice $x \in M_{\mathbf{f}}$).

Într-adevăr, cei n vectori $I\, dF_i\big|_x$ sînt doi cîte doi antiortogonali ($(F_i, F_j) \equiv 0$) și formează o bază în spațiul tangent la varietatea $M_{\mathbf{f}}$ în punctul x.

C. Varietățile pe care acționează tranzitiv grupul $\mathbf{R}^n$. Vom utiliza acum următorul rezultat de topologie.

Lema 2. *Fie M^n o varietate topologică diferențială compactă și conexă pe care se dau n cîmpuri de vectori care comută două cîte două și sînt liniar independente în fiecare punct al lui M^n. Atunci varietatea M^n este difeomorfă cu un tor de dimensiune n.*

D e m o n s t r a ț i e. Să notăm cu g_i^t, $i = 1, \ldots, n$, grupurile cu un parametru de difeomorfisme ale lui M, corespunzătoare celor n cîmpuri de vectori. Cum cîmpurile comută, grupurile g_i^t, g_j^s comută și ele. Putem deci defini o acțiune g a grupului abelian $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{t}\}$ pe varietatea M, punînd

$$g^{\mathbf{t}} : M \to M, \quad g^{\mathbf{t}} = g_1^{t_1} \circ \ldots \circ g_n^{t_n} \; (\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n).$$

Evident, $g^{\mathbf{t}+\mathbf{s}} = g^{\mathbf{t}} \circ g^{\mathbf{s}}$, $\forall\, \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n$. Să fixăm un punct $x_0 \in M$. Atunci este definită aplicația

$$x_0^g : \mathbf{R}^n \to M, \quad x_0^{g(\mathbf{t})} = g^{\mathbf{t}} x_0$$

(punctul x_0 se deplasează pe traiectoria primului curent în intervalul de timp t_1, pe traiectoria celui de-al doilea — în intervalul de timp t_2 ș.a.m.d.).

Problema 1. Să se demonstreze că *aplicația g construită mai sus* (fig. 211) *definește, prin restricție la o vecinătate suficient de mică V a punctului $0 \in \mathbf{R}^n$, o hartă în*

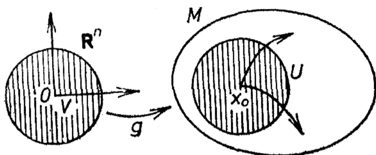


Fig. 211. Problema 1.

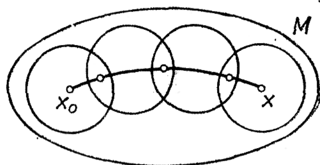


Fig. 212. Problema 2.

vecinătatea punctului x_0 : există o vecinătate U a lui x_0 în M ($x_0 \in U \subset M$) astfel incît ${}_{x_0}g|_V : V \to U$ este difeomorfism pe U. Punctul x_0 este arbitrar.

Indicație. Se aplică teorema funcțiilor implicite și se utilizează independența celor n cîmpuri de vectori în punctul x_0.

Problema 2. Să se demonstreze că aplicația ${}_{x_0}g : \mathbf{R}^n \to M$ este surjectivă.

Indicație. Se unește punctul $x \in M$ cu x_0 printr-o curbă (fig. 212); se acoperă curba cu un număr finit de vecinătăți de tipul celor din problema precedentă*) și se definește $\mathbf{t}$ cu ${}_{x_0}g(\mathbf{t}) = x$ ca suma translațiilor $\mathbf{t}_i$ corespunzătoare punctelor care împart curba.

Să remarcăm că aplicația ${}_{x_0}g : \mathbf{R}^n \to M$ nu poate fi bijectivă : M^n este compactă, iar $\mathbf{R}^n$ — nu. Să studiem imaginea reciprocă ${}_{x_0}g^{-1}(x_0)$ a punctului $x_0 \in M^n$.

Definiție. Se numește grupul de izotropie al punctului x_0 mulțimea Γ a punctelor $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ pentru care $g^{\mathbf{t}} x_0 = x_0$.

Problema 3. Să se demonstreze că Γ este un subgrup al lui $\mathbf{R}^n$ care nu depinde de punctul x_0.

Rezolvare. Dacă $g^{\mathbf{t}} x_0 = x_0$, $g^{\mathbf{s}} x_0 = x_0$, atunci $g^{\mathbf{s}+\mathbf{t}} x_0 = g^{\mathbf{s}}(g^{\mathbf{t}} x_0) = g^{\mathbf{s}} x_0 = x_0$ și $g^{-\mathbf{t}} x_0 = g^{-\mathbf{t}}(g^{\mathbf{t}} x_0) = x_0$. Prin urmare, Γ este un subgrup al lui $\mathbf{R}^n$. Dacă $x = g^{\mathbf{r}} x_0$ și $\mathbf{t} \in \Gamma$, atunci $g^{\mathbf{t}} x = g^{\mathbf{t}+\mathbf{r}} x_0 = g^{\mathbf{r}} g^{\mathbf{t}} x_0 = g^{\mathbf{r}} x_0 = x$.

Prin urmare, grupul de izotropie Γ este un subgrup bine definit al lui $\mathbf{R}^n$, care nu depinde de punctul $\mathbf{x}_0$. În particular este evident că punctul $\mathbf{t} = 0$ este în $\Gamma : 0 \in \Gamma$.

*) „Centrate" în puncte de pe curbă. (*N.T.*)

Problema 4. Să se demonstreze că *într-o vecinătate suficient de mică V a punctului $\mathbf{t} = 0$ în $\mathbf{R}^n$ nu există puncte diferite de 0 ale grupului de izotropie Γ.*

Indicație. Aplicația ${}_{x_0}g : V \to U$ este un difeomorfism.

Problema 5. Să se demonstreze că, *pentru orice punct $\mathbf{t} \in \Gamma$, în vecinătatea $\mathbf{t} + V$ a lui $\mathbf{t}$ în $\mathbf{R}^n$ nu există puncte diferite de $\mathbf{t}$ din grupul de izotropie Γ* (fig. 213).

Prin urmare, punctele grupului de izotropie Γ formează în $\mathbf{R}^n$ o submulțime discretă. Subgrupurile de acest tip se numesc *subgrupuri discrete.*

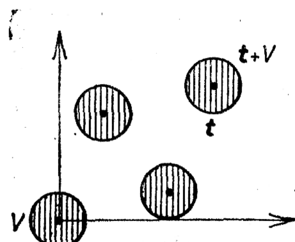


Fig. 213. Problema 5.

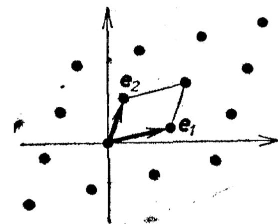


Fig. 214. Subgrup discret al planului.

Exemplu. Fie $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ k vectori liniar independenți din $\mathbf{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu coeficienți întregi de acești vectori (fig. 214)

$$m_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + m_k \mathbf{e}_k, \; m_i \in \mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

este un subgrup discret al lui $\mathbf{R}^n$. De exemplu, mulțimea tuturor punctelor cu coordonate întregi din plan este un subgrup discret al planului.

D. Subgrupurile discrete ale lui $\mathbf{R}^n$. Vom utiliza acum următorul rezultat din algebră : exemplul de mai sus epuizează toate subgrupurile discrete ale lui $\mathbf{R}^n$. Mai precis, vom demonstra următoarea

Lemă 3. *Fie Γ un subgrup discret al lui $\mathbf{R}^n$. Atunci există k ($0 \leqslant k \leqslant n$) vectori liniar independenți $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in \Gamma$ astfel încît Γ coincide cu mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu coeficienți întregi ale acestor vectori.*

Demonstrație. Vom considera în $\mathbf{R}^n$ o structură euclidiană arbitrară. Avem $0 \in \Gamma$. Dacă $\Gamma = \{0\}$, lema este demonstrată. Dacă nu, există un punct $\mathbf{e}_0 \in \Gamma$, $\mathbf{e}_0 \neq 0$ (fig. 215). Să considerăm dreapta $\mathbf{R}\mathbf{e}_0$ și să arătăm că pe această dreaptă există un punct

$\mathbf{e}_1 \in \Gamma$ aflat la distanţa minimă de $\mathbf{0}$. Într-adevăr, în discul de rază $|\mathbf{e}_0|$ cu centrul în $\mathbf{0}$ se găseşte numai un număr finit de puncte din Γ (după cum am văzut, fiecare punct din Γ există o vecinătate standard—translatata lui V — care nu conţine alte puncte din Γ).

Punctul $\mathbf{e}_1$ cel mai apropiat de $\mathbf{0}$ din mulţimea finită de puncte din acest disc, aşezat pe dreapta $\mathbf{Re}_0$, va fi punctul cel mai apropiat de 0 din Γ.

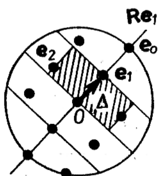


Fig. 215. Pentru demonstraţia lemei 3.

Pe dreapta $\mathbf{Re}_0$ se găsesc, ca puncte din Γ, multiplii întregi de $\mathbf{e}_1$ ($m\mathbf{e}_1$, $m \in \mathbf{Z}$) şi numai aceştia. Într-adevăr, punctele $m\mathbf{e}_1$ împart dreapta $\mathbf{Re}_0$ în segmente de lungime $|\mathbf{e}_1|$. Dacă în interiorul unuia din aceste segmente $[m\mathbf{e}_1, (m+1)\mathbf{e}_1]$ ar fi aşezat un punct $\mathbf{e} \in \Gamma$, atunci punctul $\mathbf{e} - m\mathbf{e}_1 \in \Gamma$ ar fi mai aproape de $\mathbf{0}$ decît $\mathbf{e}_1$.

Dacă Γ nu are puncte situate în afara dreptei $\mathbf{Re}_0$, lema este demonstrată. Să presupunem că există un punct $\mathbf{e} \in \Gamma$, $\mathbf{e} \notin \mathbf{Re}_1$. Să arătăm că există un punct $\mathbf{e}_2 \in \Gamma$, cel mai apropiat de dreapta $\mathbf{Re}_1$ (şi astfel încît $\mathbf{e}_2 \notin \mathbf{Re}_1$). Pentru aceasta să proiectăm ortogonal vectorul $\mathbf{e}$ pe dreapta $\mathbf{Re}_1$. Proiecţia aparţine numai unuia din segmentele $\Delta = \{\lambda\mathbf{e}_1\}$, $m \leqslant \lambda \leqslant m+1$. Să considerăm un cilindru drept $\mathbf{C}$ cu axa Δ şi baza un disc de rază egală cu distanţa de la $\mathbf{e}$ la Δ. În acest cilindru se găseşte numai o mulţime finită (nevidă) de puncte din Γ.

Fie $\mathbf{e}_2$ cel mai aproape de dreapta $\mathbf{Re}_1$ dintre aceste puncte cu $\mathbf{e}_2 \notin \mathbf{Re}_1$.

P r o b l e m a 6. Să se demonstreze că *distanţa de la un punct oarecare al grupului Γ care nu este aşezat pe dreapta $\mathbf{Re}_1$, la această dreaptă nu este mai mică decît distanţa de la $\mathbf{e}_2$ la dreapta $\mathbf{Re}_1$.*

I n d i c a ţ i e. Prin translaţia cu $m\mathbf{e}_1$ se poate face ca proiecţia punctului pe dreapta $\mathbf{Re}_1$ să fie mutată în segmentul Δ.

Combinaţiile liniare cu coeficienţi întregi ale lui $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ formează o reţea în planul $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2$.

P r o b l e m a 7. Să se demonstreze că *în planul $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2$ nu există puncte din Γ diferite de combinaţiile liniare cu coeficienţi întregi ale lui $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$.*

I n d i c a ţ i e. Divizaţi planul în paralelogramele $\Delta = \{\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2\}$ $m_i \leqslant \lambda_i \leqslant m_i+1$ (fig. 216). Dacă am avea $\mathbf{e} \in \Delta$, $\mathbf{e} \neq m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2$, atunci punctul $\mathbf{e} - m_1\mathbf{e}_1 - m_2\mathbf{e}_2 \in \Gamma$ ar fi mai aproape de $\mathbf{Re}_1$ ca $\mathbf{e}_2$.

Dacă Γ nu are puncte în afara planului $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2$, teorema este demonstrată. Să presupunem că există un punct $\mathbf{e} \in \Gamma$ care nu se găseşte în acest plan. Atunci există un punct $\mathbf{e}_3 \in \Gamma$ la distanţă

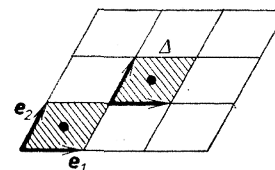


Fig. 216. Problema 7.

minimă de planul $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2$; punctele $m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3$, $m_i \in \mathbf{Z}$, epuizează punctele lui Γ din spaţiul tridimensional $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2 + \mathbf{Re}_3$. Dacă în acest fel Γ nu a fost epuizat, se alege punctul cel mai apropiat de acest spaţiu tridimensional ş.a.m.d.

P r o b l e m a 8. Să se demonstreze că *punctul cel mai apropiat există întotdeauna.*

I n d i c a ţ i e. Se alege punctul cel mai apropiat din numărul finit de puncte ale „cilindrului" corespunzător C.

Să observăm că vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots,$ astfel obţinuţi sînt liniar independenţi şi fiind toţi elemente din $\mathbf{R}^n$, sînt în număr de $k \leqslant n$.

P r o b l e m a 9. Să se arate că Γ *este epuizat de combinaţiile liniare cu coeficienţi întregi ale vectorilor $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$.*

I n d i c a ţ i e. Se împarte spaţiul $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2 + \ldots + \mathbf{Re}_k$ în paralelipipede Δ şi se arată că nici unul din aceste paralelipipede nu conţine în interior puncte din Γ. Dacă există $\mathbf{e}' \in \Gamma$ în exteriorul spaţiului $\mathbf{Re}_1 + \mathbf{Re}_2 + \ldots + \mathbf{Re}_k$, construcţia nu este terminată.

Prin urmare, lema 3 este demonstrată.

Acum este uşor să demonstrăm lema 2 : $M_\mathbf{f}$ este difeomorfă cu un tor T^n.

Să considerăm un produs direct de k cercuri şi $n-k$ drepte :

$$T^k \times \mathbf{R}^{n-k} = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k; y_1, \ldots, y_{n-k})\} \ \boldsymbol{\varphi} \bmod 2\pi$$

împreună cu aplicaţia naturală $p: \mathbf{R}^n \to T^k \times \mathbf{R}^{n-k}$

$$p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{y}) = (\boldsymbol{\varphi} \bmod 2\pi, \mathbf{y}).$$

Punctele $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n(\mathbf{v}_i$ are coordonatele $\varphi_i = 2\pi$, $\varphi_j = 0$, $\mathbf{y} = 0)$ trec în 0 prin această aplicație $\mathbf{p}$.

Fie $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ generatorii grupului de izotropie (vezi lema 3). Să aplicăm spațiul liniar $\mathbf{R}^n = \{(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{y})\}$ pe spațiul $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{t}\}$ astfel încît vectorii $\mathbf{v}_i$ să fie transformați în vectorii $\mathbf{e}_i$. Fie $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ difeomorfismul astfel definit.

Să observăm că $\mathbf{R}^n = \{(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{y})\}$ definește hărțile lui $T^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ iar $\mathbf{R}^n$ — hărțile varietății noastre $M_\mathbf{f}$.

P r o b l e m a 10. Să se demonstreze că *aplicația de hărți* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *definește un difeomorfism* $\tilde{A} : T^k \times \mathbf{R}^{n-k} \to M_\mathbf{f}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n = \{(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{y})\} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathbf{R}^n = \{\mathbf{t}\} \\ \Big\downarrow p & & \Big\downarrow \\ T^k \times \mathbf{R}^{n-k} & \xrightarrow{\quad \tilde{A} \quad} & M_\mathbf{f} \end{array}$$

Prin ipoteză însă varietatea $M_\mathbf{f}$ este compactă; rezultă $k=n$ și $M_\mathbf{f}$ este un tor de dimensiune n. Lema 2 este astfel demonstrată.

Cu ajutorul lemei 1, am demonstrat primele două afirmații ale teoremei.

În același timp am construit pe $M_\mathbf{f}$ coordonatele unghiulare $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mod 2π.

P r o b l e m a 11. Să se arate că *sub acțiunea curentului cu funcția lui Hamilton H, coordonatele unghiulare* $\boldsymbol{\varphi}$ *variază uniform* :

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i \ ; \omega_i = \omega_i(\mathbf{f}) \ ; \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{\omega} t.$$

Cu alte cuvinte, *mișcarea pe torul* $M_\mathbf{f}$ *este cvasiperiodică*.

I n d i c a ț i e. $\boldsymbol{\varphi} = A^{-1}\,\mathbf{t}$.

Dintre toate afirmațiile teoremei a rămas nedemonstrată doar ultima : sistemul se integrează prin cvadraturi.

§ 50. COORDONATELE ACȚIUNE-UNGHI

În acest paragraf se arată că, în ipotezele teoremei lui Liouville, se pot alege niște coordonate simplectice $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ astfel încît integralele prime F_i să depindă numai de $\mathbf{I}$, iar $\boldsymbol{\varphi}$ să fie coordonatele unghiulare pe torul T^n.

A. Descrierea coordonatelor acțiune-unghi. În §49 ne-am ocupat de studierea unei singure varietăți conexe și compacte — varietatea de nivel constant a integralelor prime : $M_\mathbf{f} = \{x : \mathbf{F}(x) = \mathbf{f}\}$; s-a arătat că $M_\mathbf{f}$ este un tor de dimensiune n invariant în raport cu curentul hamiltonian. Am ales coordonatele unghiulare φ_i pe $M_\mathbf{f}$ astfel încît curentul cu funcția lui Hamilton $H = F_1$ să capete pe $M_\mathbf{f}$ o formă deosebit de simplă :

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f}), \ \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f})\, t.$$

Să considerăm acum o vecinătate a varietății de dimensiune n, $M_\mathbf{f}$, în spațiul fazelor de dimensiune $2n$.

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că *varietatea* $M_\mathbf{f}$ *are o vecinătate difeomorfă cu un produs direct al torului de dimensiune n,* T^n, *cu discul de dimensiune n,* D^n, *din spațiul euclidian de dimensiune n.*

I n d i c a ț i e. Se iau drept coordonate funcțiile F_i și variabilele unghiulare φ_i construite mai sus. Cum formele dF_i sînt liniar independente, funcțiile F_i și φ_i $(i=1, \ldots, n)$ definesc un difeomorfism al unei vecinătăți a lui $M_\mathbf{f}$ pe produsul direct $T^n \times D^n$.

În coordonatele $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ introduse, curentul cu funcția lui Hamilton $H = F_1$ se scrie sub forma unui sistem de $2n$ ecuații diferențiale ordinare cu o structură deosebit de simplă :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \omega(\mathbf{F}), \tag{1}$$

care se integrează imediat ; $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(0)$, $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{F}(0))t$.

Prin urmare, pentru a integra explicit sistemul canonic de ecuații diferențiale de la care am plecat, este suficient să găsim sub formă explicită variabilele $\boldsymbol{\varphi}$. Se dovedește că acest lucru se poate face utilizînd numai cvadraturi. O astfel de construcție a variabilelor $\boldsymbol{\varphi}$ este dată mai jos.

Observăm aici că variabilele $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ nu sînt, în general, coordonate canonice. Se arată că există anumite funcții de $\mathbf{F}$ — pe care le notăm cu $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{F})$, $\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_n)$, astfel încît variabilele $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ sînt deja simplectice : structura simplectică inițială ω^2 se exprimă în aceste coordonate în forma standard

$$\omega^2 = \sum dI_i \wedge d\varphi_i.$$

Variabilele I se numesc *variabilele acțiune**) și împreună cu variabilele unghiulare φ formează, în vecinătatea varietății M_f un sistem de coordonate canonice *acțiune-unghi*.

Funcțiile I_i sînt integrale prime pentru sistemul cu funcția lui Hamilton $H = F_1$, fiind funcții de integralele prime F_j. La rîndul lor, variabilele F_i se pot exprima prin $\mathbf{I}$ și, în particular, $H = F_1 = H(\mathbf{I})$. În variabilele acțiune-unghi ecuațiile diferențiale ale curentului studiat (1) au forma

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}). \tag{2}$$

P r o b l e m ă. Funcția $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ din (2) poate fi arbitrară ?

R e z o l v a r e. În variabilele $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ ecuațiile curentului (2) au forma canonică cu funcția lui Hamilton $H(\mathbf{I})$. Prin urmare, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}}$; prin urmare, dacă numărul gradelor de libertate este $n \geqslant 2$, atunci funcția $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ nu este arbitrară, ci satisface condiția de simetrie $\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \equiv \frac{\partial \omega_j}{\partial I_i}$.

Variabilele acțiune-unghi au o importanță deosebită în teoria perturbațiilor; în §52 se indică aplicarea lor în teoria invarianților adiabatici.

B. Construirea variabilelor acțiune-unghi în cazul unui singur grad de libertate. Un sistem cu un grad de libertate este dat în planul (p, q) de o funcție Hamilton $H(p, q)$.

E x e m p l u l 1. Oscilatorul armonic $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$ sau, mai general, $H = \frac{1}{2} a^2 p^2 + \frac{1}{2} b^2 q^2$.

E x e m p l u l 2. Pendulul matematic $H = \frac{1}{2} p^2 - \cos q$.

În ambele cazuri există curbe închise compacte M_h $(H = h)$ și ne aflăm în condițiile teoremei din §49, pentru $n = 1$.

Pentru a construi variabilele acțiune-unghi, vom căuta o ransformare canonică $(p, q) \mapsto (I, \varphi)$ care să satisfacă două condiții:

$$1)\ I = I(h), \quad 2) \oint_{M_h} d\varphi = 2\pi. \tag{3}$$

*) Este clar că $\mathbf{I}$ se măsoară în aceleași unități ca și acțiunea.

P r o b l e m ă. Să se determine variabilele acțiune-unghi în cazul oscilatorului armonic simplu $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$.

R e z o l v a r e. Dacă r și φ sînt coordonate polare, atunci $dp \wedge dq = r\, dr \wedge d\varphi = d\left(\frac{r^2}{2}\right) \wedge d\varphi$. Prin urmare $I = H = \frac{p^2 + q^2}{2}$.

Pentru a construi transformarea canonică $p, q \mapsto I, \varphi$ în cazul general, îi vom căuta funcția generatoare $S(I, q)$:

$$p = \frac{\partial S(I, q)}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S(I, q)}{\partial I}; \tag{4}$$

$$H\left(\frac{\partial S(I, q)}{\partial q}, q\right) = h(I).$$

Pentru început, să presupunem că funcția $h(I)$ este cunoscută și este inversabilă, astfel încît fiecare curbă M_h este definită de valoarea lui $I(M_h = M_{h(I)})$. Atunci, fixînd valoarea lui I, din (4), obținem

$$dS\Big|_{I = \text{const}} = p\, dq.$$

Această relație determină pe curba $M_{h(I)}$ o 1-formă diferențială bine definită dS.

Integrînd această 1-formă de-a lungul curbei $M_{h(I)}$, obținem (în vecinătatea punctului q_0 fixat) o funcție

$$S(I, q) = \int_{q_0}^{q} p\, dq.$$

Această funcție este chiar funcția generatoare a transformării (4) în vecinătatea punctului (I, q_0). Prima dintre condițiile (3) este automat îndeplinită: $I = I(h)$. Pentru a realiza și a doua condiție, să analizăm comportarea „globală" a lui $S(I, q)$.

Atunci cînd se parcurge în întregime curba închisă $M_{h(I)}$, integrala formei $p\, dq$ capătă creșterea

$$\Delta S(I) = \oint_{M_{h(I)}} p\, dq,$$

egală cu aria Π cuprinsă în interiorul curbei $M_{h(I)}$. Prin urmare, funcţia S este o „funcţie multiformă" pe curba $M_{h(I)}$: ea este definită numai pînă la un termen aditiv egal cu un multiplu întreg de Π. Acest termen nu influenţează însă derivata $\partial S(I, q)/\partial q$ dar conduce la un caracter multiform al derivatei $\varphi = \partial S/\partial I$. Această derivată este definită numai pînă la un termen aditiv egal cu un multiplu de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I} \Delta S(I)$. Mai precis, formulele (4) definesc o 1-formă $\mathrm{d}\varphi$ pe curba $M_{h(I)}$, iar integrala acestei forme pe $M_{h(I)}$ este egală cu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I} \Delta S(I)$.

Pentru ca a doua dintre condiţiile noastre, $\oint_{M_{h(I)}} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$, să fie îndeplinită, este necesar ca

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I} \Delta S(I) = 2\pi, \; I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi},$$

unde $\Pi = \oint_{M_{h(I)}} p\,\mathrm{d}q$ este aria mărginită de orbita $H = h$.

D e f i n i ţ i e. Se numeşte *variabilă acţiune* în problema cu un grad de libertate cu funcţia lui Hamilton $H(p, q)$, funcţia $I(h) = \frac{1}{2\pi}\Pi(h)$.

În final, ajungem la următoarea concluzie. Să presupunem că $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}h \neq 0$. În aceste condiţii este definită funcţia $I(h)$, inversă funcţiei $h(I)$.

Teoremă. *Să punem* $S(I, q) = \int_{q_0}^{q} p\,\mathrm{d}q \Big|_{H=h(I)}$. *Atunci formulele* (4) *definesc o transformare canonică* $p, q \mapsto I, \varphi$ *care satisface condiţiile* (3).

În acest mod, coordonatele acţiune-unghi în cazul unidimensional au fost construite.

P r o b l e m ă. Să se determine S şi I pentru oscilatorul armonic.

Răspuns. Dacă $H = \frac{1}{2}a^2p^2 + \frac{1}{2}b^2q^2$ (fig. 217), atunci M_h este o elipsă

care este frontiera unui domeniu cu aria $\Pi(h) = \pi \frac{\sqrt{2h}}{a}\frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{2\pi h}{ab} = \frac{2\pi h}{\omega}$.

Prin urmare, *pentru oscilatorul armonic variabila acţiune este raportul dintre energie şi frecvenţă.* Variabila unghiulară, φ este, evident, *faza oscilaţiilor.*

P r o b l e m ă. Să se demonstreze că perioada T a mişcării pe curba închisă $H = h$ din planul fazelor p, q este egală cu derivata ariei mărginite de această curbă în raport cu h:

$$T = \frac{\mathrm{d}\Pi(h)}{\mathrm{d}h}.$$

R e z o l v a r e. În variabilele acţiune-unghi ecuaţiile de mişcare (2) ne dau

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial I} = \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}h}\right)^{-1} = 2\pi\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}h}\right)^{-1}, \; T = \frac{2\pi}{\dot\varphi} = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}h}.$$

C. Construirea variabilelor acţiune-unghi în $\mathbf{R}^{2n}$. Să trecem acum la un sistem cu n grade de libertate, definit în $\mathbf{R}^{2n}$ de funcţia lui Hamilton $H(p, q)$ şi care are n integrale prime în involuţie $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$. Nu vom repeta raţionamentele care ne-au condus la alegerea $2\pi I = \oint p\,\mathrm{d}q$ în cazul unidimensional şi vom defini direct cele n variabile de acţiune $\mathbf{I}$.

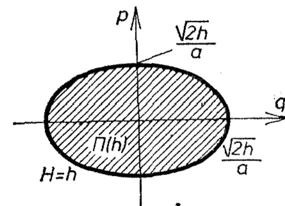


Fig. 217. Variabila acţiune pentru oscilatorul armonic.

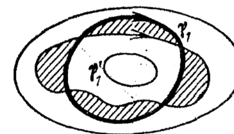


Fig. 218. Independenţa variabilei acţiune de alegerea drumului de integrare.

Fie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ o bază de cicli unidimensionali ai torului $M_{\mathbf{f}}$ (creşterea coordonatei φ_i pe ciclul γ_j este egală cu 2π, dacă $i = j$ şi cu 0 dacă $i \neq j$). Punem

$$I_i(\mathbf{f}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i} \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q}. \tag{5}$$

P r o b l e m ă. Să se arate că *această integrală nu depinde de alegerea curbei γ_i care reprezintă un ciclu din bază* (fig. 218).

Indicație. În §49 s-a arătat că, pe varietatea $M_{\mathbf{f}}$, 2-forma $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ este egală cu 0. Aplicînd formula lui Stokes, obținem

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} - \oint_{\gamma'} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} = \iint_{\sigma} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = 0,$$

unde $\partial\sigma = \gamma - \gamma'$.

Definiție. Cele n mărimi $I_i(\mathbf{f})$ definite de formulele (5) se numesc *variabilele acțiune*.

Să presupunem acum că, pentru valori date, f_i, pentru cele n integrale prime $\mathbf{F}_i$, cele n funcții I_i sînt *independente*: $\det\left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{f}}\right)_f \neq 0$. În acest caz, într-o vecinătate a torului $M_{\mathbf{f}}$, variabilele $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varphi}$ se pot lua drept coordonate.

Teoremă. *Transformarea* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \mapsto \mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}$ este canonică:

$$\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dI_i \wedge d\varphi_i.$$

Indicăm demonstrația acestei teoreme. Să considerăm pe $M_{\mathbf{f}}$ 1-forma diferențială $\mathbf{p}\, d\mathbf{q}$. Varietatea $M_{\mathbf{f}}$ fiind izotropă (§49), această 1-formă pe $M_{\mathbf{f}}$ este închisă: diferențiala ei exterioară

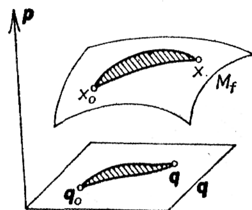


Fig. 219. Independența de drum a integralei formei $\mathbf{p}\, d\mathbf{q}$ pe $M_{\mathbf{f}}$.

$\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ este identic egală cu 0 pe varietatea $M_{\mathbf{f}}$. Din acest motiv (fig. 219).

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} \Big|_{M_{\mathbf{f}}}$$

nu se schimbă la deformarea drumului de integrare (formula lui Stokes). Prin urmare, $S(x)$ este o funcție *multiformă* pe $M_{\mathbf{f}}$, ale cărei perioade sînt

$$\Delta_i(S) = \oint_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i(\mathbf{f}).$$

Fie acum $x_0 \in M_f$ un punct în vecinătatea căruia variabilele $\mathbf{q}$ pot fi alese drept coordonate pe $M_{\mathbf{f}}$, astfel încît subvarietatea $M_{\mathbf{f}} \subset \mathbf{R}^{2n}$ este dată de n ecuații de forma $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{I}, \mathbf{q})$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{q}_0$. Într-o vecinătate simplu conexă a punctului $\mathbf{q}_0$ este definită funcția uniformă

$$S(\mathbf{I}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{I}, \mathbf{q})\, d\mathbf{q},$$

pe care o putem lua ca funcție generatoare a transformării canonice $\mathbf{p}, \mathbf{q} \mapsto \mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}$:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{I}}.$$

Se verifică ușor că aceste formule definesc cu adevărat o transformare canonică nu numai în vecinătatea punctului considerat, dar și „global'' într-o vecinătate a lui $M_{\mathbf{f}}$. Coordonatele $\boldsymbol{\varphi}$ vor fi funcții multiforme cu perioadele

$$\Delta_i\, \varphi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j} \Delta_i\, S = \frac{\partial}{\partial I_j} 2\pi I_i = 2\pi\, \delta_{ij},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să observăm că toate construcțiile noastre conțin numai operații „algebrice'' (inversări de funcții) și „cvadraturi'' — calculul integralelor unor funcții cunoscute. Prin urmare, problema integrării unui sistem canonic de $2n$ ecuații pentru care se cunosc n integrale prime în involuție se rezolvă prin cvadraturi, ceea ce demonstrează și ultima afirmație a teoremei lui Liouville.

Observația 1. În cazul unidimensional variabilele acțiune-unghi nu sînt univoc definite de condițiile (3). Și anume, ca variabilă de acțiune am fi putut lua $\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \text{const}$, iar ca variabilă unghiulară $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} + c(\mathbf{I})$.

Observația 2. Am construit variabilele acțiune-unghi numai pentru sisteme cu spațiul fazelor $\mathbf{R}^{2n}$. Se pot însă introduce variabile acțiune-unghi și pentru sisteme definite pe o varietate simplectică arbitrară. Ne vom mărgini aici la un singur exemplu simplu (fig. 220).

Spațiul de faze natural al pendulului $\left(H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q\right)$ trebuie considerat ca fiind nu planul $\{(p, q)\}$, ci suprafața cilindrului $\mathbf{R}^1 \times S^1$, care se obține prin identificarea unghiurilor q care diferă printr-un multiplu întreg de 2π.

Curbele de nivel critice $H = \pm 1$ împart cilindrul în trei regiuni A, B, C, fiecare difeomorfă cu produsul direct $\mathbf{R}^1 \times S^1$. În fiecare din aceste regiuni se pot introduce variabile acțiune-unghi.

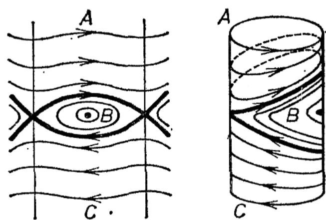


Fig. 220. Variabile acțiune-unghi pe o varietate simplectică.

În regiunea mărginită B, traiectoriile închise reprezintă oscilațiile pendulului, iar în regiunile nemărginite — rotațiile.

O b s e r v a ț i a 3. La fel ca și în exemplul analizat, în cazul general ecuațiile $F_i = f_i$ încetează, pentru anumite valori f_i, de a mai fi independente și $M_\mathbf{f}$ nu mai este o varietate. Acestor valori critice $\mathbf{f}$ le corespund separatoarele care împart spațiul fazelor în regiuni de tipul regiunilor A, B, C de mai sus. În unele din aceste regiuni varietățile $M_\mathbf{f}$ pot să nu fie compacte (regiunile A și C în planul $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; alte regiuni însă se fibrează în tori invarianți de dimensiune n, $M_\mathbf{f}$; în vecinătatea unui astfel de tor se pot introduce coordonate acțiune-unghi.

§ 51. MEDIEREA

În paragraful acesta se demonstrează coincidența dintre media temporală și media pe spațiul fazelor pentru sistemele care efectuează o mișcare cvasiperiodică.

A. Mișcarea cvasiperiodică. În paragrafele precedente ne-am întîlnit adesea cu mișcări cvasiperiodice: figurile lui Lissajous, precesia, nutația, rotația unui titirez ș.a.m.d.

D e f i n i ț i e . Fie T^n un tor n-dimensional și $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mod 2π coordonate unghiulare. Se numește *mișcare cvasiperiodică* grupul cu un parametru de difeomorfisme $T^n \to T^n$, definit de ecuațiile diferențiale (fig. 221)

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \text{const.}$$

Aceste ecuații diferențiale se integrează imediat:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0) + t\boldsymbol{\omega}.$$

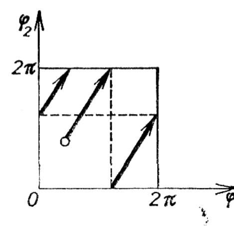


Fig. 221. Mișcare cvasiperiodică.

Prin urmare, în harta $\{\boldsymbol{\varphi}\}$, traiectoriile sînt drepte. Traiectoria pe tor se numește *înfășurătoarea* torului.

E x e m p l u . Fie $n = 2$. Dacă $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$, atunci traiectoriile sînt închise; dacă ω_1/ω_2 este un număr irațional, atunci fiecare traiectorie este densă peste tot pe tor (vezi §16).

Mărimile $\omega_1, \ldots, \omega_n$ se numesc *frecvențele mișcării cvasiperiodice*. Frecvențele se numesc *independente* dacă ele sînt independente peste corpul numerelor raționale: dacă $k \in \mathbf{Z}^n$ și $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}) = 0$, atunci $\mathbf{k} = 0$*).

B. Media spațială și media temporală. Fie $f(\boldsymbol{\varphi})$ o funcție integrabilă pe torul T^n.

D e f i n i ț i e . Se numește *media spațială* a funcției f pe torul T^n numărul

$$\bar{f} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{\varphi})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n.$$

Să considerăm valoarea funcției $f(\boldsymbol{\varphi})$ pe traiectoria $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 + t\boldsymbol{\omega}$. Se obține o funcție de timp $f(\boldsymbol{\varphi}_0 + t\boldsymbol{\omega})$.

*) $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ cu k_i numere întregi.

Să considerăm media ei.

Definiție. Se numește *media temporală* a funcției f pe torul T^n funcția

$$f^*(\varphi_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_0 + t\omega)\,dt$$

(definită în punctele φ_0 pentru care limita există).

Teorema de mediere. *Dacă funcția f este continuă (sau cel puțin integrabilă Riemann), iar frecvențele ω_i sînt independente, atunci media temporală este definită peste tot și este egală cu media spațială.*

Problemă. Să se arate că dacă frecvențele sînt dependente, atunci media temporală poate să nu coincidă peste tot cu media spațială.

Corolarul 1. *Dacă frecvențele sînt independente, atunci fiecare traiectorie $\{\varphi(t)\}$ este densă peste tot pe torul T^n.*

Demonstrație. Să presupunem contrariul. Atunci există o vecinătate D a unui punct al torului în care nu se găsesc puncte ale traiectoriei $\varphi(t)$. Se poate construi ușor o funcție continuă f, egală cu 0 în exteriorul lui D și cu media spațială $\bar{f} = 1$. Pe traiectoria $\varphi(t)$, media temporală este $f^*(\varphi_0) = 0 \neq 1$. Contradicția cu concluzia teoremei demonstrează corolarul 1.

Corolarul 2. *Dacă frecvențele sînt independente, atunci orice traiectorie este uniform distribuită pe torul T^n.*

Aceasta înseamnă că timpul total pe care traiectoria îl petrece într-un anumit domeniu D este proporțional cu măsura lui D.

Mai precis, fie D un domeniu măsurabil (Jordan) în T^n. Să notăm cu $\tau_D(T)$ *timpul total pe care segmentul de traiectorie* $\{\varphi(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *îl petrece în interiorul lui D.* Atunci

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \text{mes } D/(2\pi)^n.$$

Demonstrație. Aplicăm teorema funcției caracteristice f a mulțimii D (f este integrabilă Riemann, domeniul D fiind măsurabil Jordan). Atunci $\int_0^T f(\varphi(t))\,dt = \tau_D(T)$ și $\bar{f} = (2\pi)^{-n}$ mes D, deci corolarul rezultă direct din teoremă.

Corolar. *În șirul*

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2...

al primelor cifre ale numerelor 2^n, numărul 7 apare mai des ca numărul 8 de $\frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8}$ ori.

Teorema de mediere apare implicit încă în lucrările lui Laplace, Lagrange și Gauss de mecanică cerească; ea este una din primele „teoreme ergodice''. Demonstrația riguroasă a fost dată de-abia în 1909 de către P. Bohl, W. Sierpiński și H. Weyl, în legătură cu problema lui Lagrange privind mișcarea medie a periheliului Pămîntului. Mai jos se expune demonstrația lui H. Weyl.

C. Demonstrația teoremei de mediere.

Lema 1. *Teorema de mediere este adevărată pentru funcțiile exponențiale de tipul $f = e^{i(\mathbf{k},\varphi)}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$.*

Demonstrație. Dacă $\mathbf{k} = 0$, atunci $\bar{f} = f = f^* = 1$ și teorema este evidentă. Dacă $\mathbf{k} \neq 0$, atunci $\bar{f} = 0$. Pe de altă parte,

$$\int_0^T e^{i(\mathbf{k},\varphi_0+t\omega)}\,dt = e^{i(\mathbf{k},\varphi_0)}\frac{e^{i(\mathbf{k},\omega)T} - 1}{i(\mathbf{k},\omega)}.$$

Prin urmare, media temporală există și este egală cu

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{i(\mathbf{k},\varphi_0)}}{i(\mathbf{k},\omega)}\cdot\frac{e^{i(\mathbf{k},\omega)T} - 1}{T}\right] = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Lema 2. *Teorema este adevărată pentru polinoamele trigonometrice*

$$f = \sum_{|\mathbf{k}|<N} f_{\mathbf{k}}\, e^{i(\mathbf{k},\varphi)}.$$

Demonstrație. Atît media spațială cît și cea temporală depind liniar de f și deci, conform lemei 1, coincid, c.c.t.d.

Lema 3. *Fie f o funcție reală continuă (sau cel puțin integrabilă Riemann). Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există două polinoame trigonometrice P_1 și P_2 astfel încît $P_1 < f < P_2$ și $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}(P_2 - P_1)\,d\varphi < \varepsilon$.*

Demonstrație. Pentru început, să presupunem că f este continuă. Conform teoremei lui Weierstrass, ea poate fi aproximată cu un polinom trigonometric $P: |f - P| < \frac{\varepsilon}{2}$. Polinoamele $P_1 = P - \frac{\varepsilon}{2}$ și $P_2 = P + \frac{\varepsilon}{2}$ sînt cele căutate.

Dacă f este discontinuă, dar integrabilă Riemann, atunci există două funcții continue f_1 și f_2 astfel încît $f_1 < f < f_2$ și $(2\pi)^{-n} \int\limits_{T^n} (f_2 - f_1)\, d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}$ (fig. 222 corespunde funcției caracteristice a unui segment). Aproximînd pe f_1 și f_2 cu polinoame

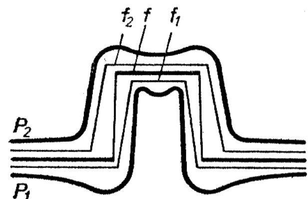


Fig. 222. Aproximarea funcției f cu polinoame trigonometrice P_1 și P_2.

$$P_1 < f_1 < f_2 < P_2,\ (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^n} (P_2 - f_2)\, d\varphi < \infty,$$

$$(2\pi)^{-n} \int\limits_{T^n} (f_1 - P_1)\, d\varphi < \infty, \text{ obținem afirmația lemei.}$$

Putem încheia acum demonstrația teoremei. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci, conform lemei 3, există două polinoame trigonometrice

$$P_1 < f < P_2,\ (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^n} (P_2 - P_1)\, d\varphi < \infty.$$

Avem, pentru orice T:

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_1(\varphi(t))\, dt < \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))\, dt < \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\varphi(t))\, dt.$$

Conform lemei 2, există $T_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $T > T_0(\varepsilon)$

$$\left| \bar{P}_i - \frac{1}{T}\int_0^T P_i(\varphi(t))\, dt \right| < \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

În continuare, $\bar{P}_1 < \bar{f} < \bar{P}_2$ și $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$. Obținem $\bar{P}_2 - \bar{f} < \varepsilon$, $\bar{f} - \bar{P}_1 < \varepsilon$ și deci, pentru $T > T_0(\varepsilon)$,

$$\left| \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))\, dt - \bar{f} \right| < 2\varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Problemă. Un oscilator bidimensional cu energia cinetică $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ și energia potențială $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ efectuează oscilații cu amplitudinile $a_x = 1$, $a_y = 1$. Să se determine media temporală a energiei cinetice.

Problemă *). Fie ω_k numere independente și $a_k > 0$, $(k = 1,2,3)$. Să se calculeze

$$\lim \frac{1}{t} \arg \sum a_k e^{i\omega_k t}.$$

Răspuns. $\frac{\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3}{\pi}$, unde α_1, α_2 și α_3 sînt unghiurile triunghiului cu laturile a_k (fig. 223).

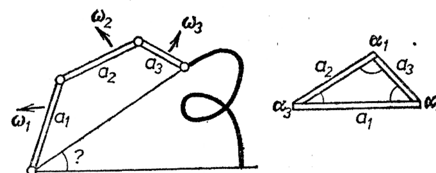


Fig. 223. Problema mișcării medii a periheliilor planetelor.

*) Lagrange a arătat că studierea mișcării medii a periheliului unei planete se reduce la o problemă asemănătoare. Rezolvarea acestei probleme se poate găsi în lucrările lui H. Weyl. Excentricitatea orbitei Pămîntului variază ca modulul unei astfel de sume. După cîte se pare, de variația excentricității sînt legate perioadele glaciare.

D. Degenerări. Pînă acum am considerat cazul în care frecvențele ω sînt independente. Un vector $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ se numește *relație între frecvențe dacă* $(\mathbf{k}, \omega) = 0$.

Problemă. Să se demonstreze că *mulțimea tuturor relațiilor dintre niște frecvențe date ω este un subgrup Γ al rețelei $\mathbf{Z}^n$.*

Am văzut însă în §49 că un astfel de subgrup este format din toate combinațiile liniare cu coeficienți întregi a r vectori independenți k_i, $1 \leqslant r \leqslant n$. Vom spune că *între frecvențele ω există r relații (independente)**).

Problemă. Să se demonstreze că *dacă între frecvențele ω există r relații independente, atunci închiderea traiectoriei $\{\varphi(t) = \varphi_0 + t\,\omega\}$ (în T^n) reprezintă un tor de dimensiune $n-r$, T^{n-r}; în acest caz mișcarea pe T^{n-r} este cvasiperiodică cu $n-r$ frecvențe independente.*

Să ne întoarcem la un sistem hamiltonian integrabil, dat în coordonatele acțiune-unghi $\mathbf{I}$, φ de ecuațiile

$$\dot{\mathbf{I}} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(\mathbf{I}), \text{ unde } \omega(\mathbf{I}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}}.$$

Fiecare tor, de dimensiune n, $\mathbf{I} = \text{const}$, din spațiul fazelor de dimensiune $2n$ este invariant, iar mișcarea pe el este cvasiperiodică.

Definiție. Sistemul se numește *nedegenerat* dacă este nenul determinantul

$$\det\left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{I}}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{I}^2}\right).$$

Problemă. Să se demonstreze că *dacă un sistem este nedegenerat, atunci în orice vecinătate a oricărui punct există atît mișcări cvasiperiodice cu n frecvențe, cît și cu un număr mai mic de frecvențe.*

Indicație. În loc de variabilele $\mathbf{I}$, se pot lua drept coordonate locale chiar frecvențele ω. În spațiul ansamblurilor de frecvențe, mulțimea punctelor ω pentru care există un număr oarecare de relații $r (0 \leqslant r < n)$ este densă peste tot.

Corolar. *Dacă sistemul este nedegenerat, atunci torii invarianți* $\mathbf{I} = \text{const}$ *sînt univoc definiți, indiferent de alegerea coordonatelor acțiune-unghi* $\mathbf{I}$, φ, *în alegerea cărora există totdeauna o libertate***).

*) Să se demonstreze că numărul r nu depinde de alegerea vectorilor independenți k_i.

**) De exemplu, se pot efectua totdeauna schimbările $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$, $\varphi' = \varphi + S_I(\mathbf{I})$ sau: $I_1, I_2; \varphi_1, \varphi_2 \mapsto I_1 + I_2, I_2; \varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2$.

Într-adevăr, torii $\mathbf{I} = \text{const}$ pot fi definiți ca fiind închiderea orbitelor corespunzătoare unor frecvențe independente ω.

Fiind momentul potrivit remarcăm că pentru majoritatea valorilor lui $\mathbf{I}$ frecvențele ω sînt independente.

Problemă. Să se demonstreze că *măsura Lebesgue a mulțimii acelor $\mathbf{I}$ pentru care frecvențele $\omega(\mathbf{I})$ într-un sistem nedegenerat sînt independente este egală cu* 0.

Indicație. Arătați pentru început că $\text{mes}\{\omega : \exists\, \mathbf{k} \neq 0, (\mathbf{k}, \omega) = 0\} = 0$.

În opoziție cu situația din cazul nedegenerat, în cazul degenerat se pot construi sisteme de coordonate acțiune-unghi de așa natură încît torii $\mathbf{I} = \text{const}$ *sînt diferiți în sisteme de coordonate diferite*. Aceasta se explică prin faptul că închiderile traiectoriilor sistemului degenerat sînt tori de dimensiune $p < n$ și aceștia pot fi reuniți în tori de dimensiune n în moduri diferite.

Exemplul 1. Oscilatorul armonic plan $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$; $n = 2$, $p = 1$. Separarea variabilelor în coordonatele carteziene și în cele polare conduce la coordonate acțiune-unghi diferite și la tori diferiți.

Exemplul 2. Mișcarea kepleriană în plan $\left(U = -\frac{1}{r}\right)$, $n = 2$, $p = 1$. Aici separarea variabilelor în coordonatele polare și cele eliptice conduce la variabile $\mathbf{I}$ diferite.

§ 52. MEDIEREA PERTURBAȚIILOR

Aici se demonstrează invarianța adiabatică a variabilei acțiune în sistemele cu un grad de libertate.

A. Sisteme apropiate de sisteme integrabile. Mai sus am considerat destul de multe sisteme integrabile (probleme unidimensionale, problema celor două corpuri, oscilațiile mici, cazurile Euler și Lagrange de mișcare a unui solid rigid cu punct fix ș.a.m.d.). Am studiat caracterul traiectoriilor în astfel de sisteme: s-a dovedit că ele sînt „înfășurători de tori” care umplu dens peste tot torii invarianți din spațiul fazelor; fiecare traiectorie este uniform distribuită pe torul pe care se află.

Nu trebuie să ne închipuim că o astfel de situație este tipică pentru problemele de formă generală. În realitate, proprietățile traiectoriilor sistemelor multidimensionale pot fi destul de diferite

și deloc asemănătoare cu proprietățile mișcărilor cvasiperiodice. În particular, închiderile traiectoriilor unui sistem cu n grade de libertate pot constitui în spațiul fazelor $2n$-dimensional mulțimi complicate de dimensiune mai mare ca n; o traiectorie poate fi chiar densă peste tot și uniform distribuită în întreaga varietate de dimensiune $2n-1$ dată de ecuația $H = h$*). Utilizarea pentru aceste sisteme a denumirii de „neintegrabile" este justificată, deoarece ele nu admit integrale prime uniforme care să nu depindă de H.

Studierea unor asemenea sisteme complicate este departe de a fi încheiată; ea reprezintă o problemă a „teoriei ergodice".

Unul din modurile de abordare a sistemelor neintegrabile este studiul sistemelor apropiate de cele integrabile. De exemplu, problema mișcării planetelor în jurul Soarelui este apropiată de problema integrabilă a mișcării a două puncte care nu interacționează în jurul unui centru fix; amintim și problema mișcării unui titirez greu puțin asimetric și problema oscilațiilor neliniare în vecinătatea unei poziții de echilibru (problema integrabilă apropiată este cea liniară). În studierea acestor probleme și a unora asemănătoare este deosebit de eficace următoarea metodă.

B. Principiul medierii. Fie $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — variabile acțiune-unghi în sistemul integrabil („neperturbat") cu funcția lui Hamilton $H_0(\mathbf{I})$:

$$\dot{\mathbf{I}} = 0,\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I});\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}}.$$

În calitate de sistem apropiat „perturbat" să considerăm sistemul

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}),$$

unde $\varepsilon \ll 1$.

Să uităm pentru un timp de caracterul hamiltonian al sistemului și să considerăm un sistem arbitrar de ecuații diferențiale (1) definit în produsul direct $T^k \times G$ al torului k-dimensional $T^k = \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \bmod 2\pi\}$ cu un domeniu G al spațiului de dimensiune $l: G \subset \mathbf{R}^l = \{\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_l)\}$. Cînd $\varepsilon = 0$, mișcarea definită de (1) este cvasiperiodică, cu un număr de frecvențe cel mult egal cu k și cu tori invarianți de dimensiune k.

*) În această clasă intră, de exemplu, mișcarea inerțială pe orice varietate de curbură negativă.

Pentru sistemul (1), *principiul medierii constă în a-l înlocui cu un alt sistem, numit sistemul mediat:*

$$\dot{\mathbf{J}} = \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}),\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_k \qquad (2)$$

în domeniul de dimensiune l, $G \subset \mathbf{R}^l = \{\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_l)\}$.

Se afirmă că sistemul (2) «*aproximează bine*» *sistemul* (1).

Să observăm că acest principiu nu este teoremă, axiomă sau definiție, ci o ipoteză fizică — deci o afirmație vagă, imprecisă și, riguros vorbind, neadevărată.

Afirmații de acest tip sînt însă adesea un izvor important de teoreme matematice.

Principiul medierii pe care l-am considerat apare explicit încă la Gauss (în studiul modului în care planetele se perturbă una pe alta, Gauss a propus ca masa fiecărei planete să fie distribuită pe orbita sa proporțional cu timpul și să se înlocuiască atracția dintre planete cu atracția dintre inelele astfel obținute). Cu toate acestea, un studiu satisfăcător al legăturii dintre soluțiile sistemelor (1) și (2) în cazul general nu a fost efectuat nici pînă astăzi.

Atunci cînd înlocuim sistemul (1) cu sistemul (2), eliminăm din membrul drept termenul $\varepsilon \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) - \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{I})$. Acest termen are ordinul ε, la fel ca și termenul rămas $\varepsilon \bar{\mathbf{g}}$. Pentru a înțelege rolurile diferite jucate de termenii $\bar{\mathbf{g}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$ și $\mathbf{g}$, să considerăm un exemplu simplu.

Problemă. Să se considere cazul $k = l = 1$,

$$\dot{\varphi} = \omega \neq 0, \quad \dot{I} = \varepsilon g(\varphi).$$

Să se arate că pentru $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$,

$$|I(t) - J(t)| < c\,\varepsilon, \text{ unde } J(t) = I(0) + \varepsilon \bar{g} t.$$

R e z o l v a r e.

$$I(t)-I(0)=\int_0^t \varepsilon\, g\,(\varphi_0+t\,\omega)\,dt=\int_0^t \varepsilon\,\bar g\,dt+\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{t/\omega}\tilde g\,(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\varepsilon\bar g t+\frac{\varepsilon}{\omega}\,h\left(\frac{t}{\omega}\right),$$

unde $h\,(\psi)=\int_0^{\psi}\tilde g(\varphi)\,d\varphi$ este o funcție periodică, deci mărginită.

Prin urmare, variația lui I cu timpul este formată din două părți: o oscilație de ordinul ε, care depinde de g și o „evoluție" sistematică cu viteza $\varepsilon\,\bar g$ (fig. 224).

Principiul medierii se bazează pe ipoteza conform căreia și în cazul general, mișcarea sistemului (1) poate fi descompusă într-o

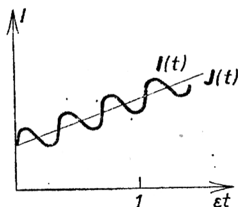


Fig. 224. Evoluție și oscilații.

„evoluție" (2) și mici oscilații. În forma generală o astfel de reprezentare nu este fundamentată, principiul însuși fiind neadevărat.

Cu toate acestea să-l aplicăm sistemului hamiltonian (1):

$$\dot\varphi=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{I}}\,[H_0\,(\mathbf{I})+\varepsilon\,H_1\,(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})];$$

$$\dot{\mathbf{I}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\,[H_0\,(\mathbf{I})+\varepsilon\,H_1\,(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})].$$

Obținem atunci ca membru drept al sistemului mediat (2) pe

$$\bar{\mathbf{g}}=(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\,H_1\,(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})\,d\boldsymbol{\varphi}=0.$$

Cu alte cuvinte, *într-un sistem hamiltonian nedegenerat nu există partea de evoluție.*

Una din variantele acestei concluzii deloc riguroase conduce la așa-numita teoremă a lui Laplace:

Semiaxele mari ale elipselor kepleriene ale planetelor nu au perturbații seculare.

Cele spuse sînt suficiente pentru a ne convinge de importanța principiului medierii; să formulăm acum teorema care fundamentează acest principiu într-un caz destul de particular — cazul oscilațiilor cu o singură frecvență ($k=1$). Această teoremă arată că ecuația mediată descrie corect evoluția pe un interval de timp mare $(0<t<1/\varepsilon)$.

C. Medierea într-un sistem cu o singură frecvență. Să considerăm sistemul de $l+1$ ecuații diferențiale:

$$\left.\begin{aligned}\dot\varphi&=\omega\,(\mathbf{I})+\varepsilon\,\mathbf{f}\,(\mathbf{I},\varphi)\\ \dot{\mathbf{I}}&=\varepsilon\,\mathbf{g}\,(\mathbf{I},\varphi)\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\varphi \bmod 2\pi\in S^1,\\ &\mathbf{I}\in G\subset\mathbf{R}^l,\end{aligned}\tag{1}$$

unde $\mathbf{f}(\mathbf{I},\varphi+2\pi)\equiv\mathbf{f}(\mathbf{I},\varphi)$, $\mathbf{g}(\mathbf{I},\varphi+2\pi)\equiv\mathbf{g}(\mathbf{I},\varphi)$ și sistemul „mediat" de l ecuații

$$\dot{\mathbf{J}}=\varepsilon\bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{J}),\ \text{unde}\ \bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{J})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{g}(\mathbf{J},\varphi)\,d\varphi.\tag{2}$$

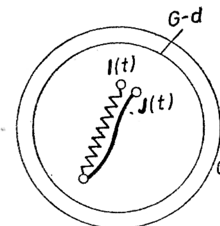


Fig. 225. Teorema de mediere.

Să notăm cu $\mathbf{I}(t)$, $\varphi(t)$ soluția sistemului (1) cu condiția inițială $\mathbf{I}(0)$, $\varphi(0)$ și cu $\mathbf{J}(t)$ soluția sistemului (2) cu aceeași condiție inițială $\mathbf{J}(0)$ (fig. 225).

Teoremă. *Să presupunem următoarele:*
1) *funcţiile* ω, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *sînt definite pentru* $\mathbf{I} \in G$, *unde* G *este un domeniu mărginit şi sînt mărginite împreună cu derivatele lor pînă la ordinul al doilea inclusiv pe acest domeniu:*

$$\| \omega, \mathbf{f}, \mathbf{g} \|_{C^2(G \times S^1)} < c_1;$$

2) *în domeniul* G

$$\omega(\mathbf{I}) > c > 0;$$

3) *pentru* $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ *punctul* $\mathbf{J}(t)$ *este în* G *împreună cu o vecinătate de rază* d:

$$\mathbf{J}(t) \in G - d.$$

Atunci, pentru ε *suficient de mic* $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$

$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < c_9 \varepsilon$ *pentru orice* t, $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$, *unde* $c_9 > 0$ *este o constantă care depinde de* c_1, c, d, *dar nu şi de* ε.

Mai jos vor fi enunţate cîteva aplicaţii ale acestei teoreme („invarianţii adiabatici"). Remarcăm că ideea fundamentală a demonstraţiei acestei teoreme (schimbarea de variabile care „omoară" perturbaţia) este mai importantă decît teorema: ea este una din ideile fundamentale ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi apare chiar şi în cursurile elementare sub forma „metodei variaţiei constantelor".

D. Demonstraţia teoremei de mediere. Să introducem, în locul variabilelor $\mathbf{I}$, noile variabile $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{k}(\mathbf{I}, \varphi), \tag{3}$$

unde alegem funcţia 2π — periodică în φ, $\mathbf{k}$, astfel încît vectorul $\mathbf{P}$ să satisfacă o ecuaţie diferenţială mai simplă.

Conform formulelor (1) şi (3), viteza de variaţie a lui $\mathbf{P}(t)$ este

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{I}} \dot{\mathbf{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{I}, \varphi) + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbf{I}) \right] + $$
$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{g} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \mathbf{f}.$$

Să presupunem că schimbarea de variabile (3) este inversabilă, astfel încît

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} + \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{P}, \varphi, \varepsilon) \tag{5}$$

(unde funcţia $\mathbf{h}$ este 2π-periodică în φ).

Atunci, din (4) şi (5) rezultă că $\mathbf{P}(t)$ satisface sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{\mathbf{P}} = \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{P}, \varphi) + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbf{P}) \right] + \mathcal{R}, \tag{6}$$

unde „termenul rezidual" $\mathcal{R}$ este de ordinul doi în ε:

$$|\mathcal{R}| < c_2 \varepsilon^2, \qquad c_2(c_1, c_3, c_4) > 0, \tag{7}$$

de îndată ce

$$\|\omega\|_{C^2} < c_1, \ \|\mathbf{f}\|_{C^2} < c_1, \ \|\mathbf{g}\|_{C^2} < c_1,$$
$$\|\mathbf{k}\|_{C^2} < c_3, \ \|\mathbf{h}\|_{C^2} < c_4. \tag{8}$$

Vom încerca să alegem o schimbare de variabile (3) astfel încît termenul de ordinul unu în ε din (6) să se anuleze. Obţinem pentru $\mathbf{k}$ ecuaţia

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\omega} \mathbf{g}.$$

În general, o astfel de ecuaţie nu se poate rezolva în clasa funcţiilor $\mathbf{k}$ periodice în φ. Într-adevăr, valoarea medie (în raport cu φ) a membrului stîng este întotdeauna egală cu $\mathbf{0}$ în timp ce valoarea medie a membrului drept poate fi şi diferită de $\mathbf{0}$.

Prin urmare, nu putem alege pe $\mathbf{k}$ astfel încît să omorîm în întregime termenul de ordin unu în ε din (6). Putem însă omorî întreaga parte „periodică" a lui $\mathbf{g}$,

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{P}, \varphi) = \mathbf{g}(\mathbf{P}, \varphi) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{P}),$$

punînd

$$\mathbf{k}(\mathbf{P}, \varphi) = -\int_0^{\varphi} \frac{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{P}, \varphi)}{\omega(\mathbf{P})} d\varphi. \tag{9}$$

Să definim deci funcţia $\mathbf{k}$ prin formula (9). Atunci, datorită ipotezelor (1) şi (2) ale enunţului teoremei, funcţia $\mathbf{k}$ satisface evaluarea $\|\mathbf{k}\|_{C^2} < c_3$, unde $c_3(c_1, c) > 0$. Pentru a stabili toate inegalităţile (8), rămîne să mai evaluăm pe $\mathbf{h}$. Pentru aceasta trebuie să arătăm în primul rînd că schimbarea de variabile (3) este inversabilă.

Fie α un număr pozitiv fixat.

Lemă. *Dacă ε este suficient de mic, atunci restricţia aplicaţiei* (3)*)

$$\mathbf{I} \mapsto \mathbf{I} + \varepsilon\,\mathbf{k}, \text{ unde } \|\mathbf{k}\|_{C^2(G)} < c_3$$

la domeniul $G - \alpha$ (format din punctele care sînt conţinute în G împreună cu α-vecinătatea lor) este un difeomorfism. Difeomorfismul invers (5) *satisface în domeniul $G - 2\alpha$ evaluarea $\|\mathbf{h}\|_{C^2} < c_4$, unde $c_4(\alpha, c_3) > 0$ este o constantă.*

D e m o n s t r a ţ i e. Evaluarea necesară rezultă imediat din teorema funcţiilor implicite. Anumite dificultăţi apar numai în ceea ce priveşte bijectivitatea aplicaţiei $\mathbf{I} \mapsto \mathbf{I} + \varepsilon\,\mathbf{k}$ în domeniul $G - \alpha$.

Să observăm că funcţia $\mathbf{k}$ satisface în domeniul $G - \alpha$ condiţia lui Lipschitz (cu o constantă $L(\alpha, c_3)$). Să considerăm două puncte $\mathbf{I}_1$ şi $\mathbf{I}_2$ din $G - \alpha$. Pentru ε suficient de mic (şi anume pentru $L\,\varepsilon < 1$), distanţa dintre $\varepsilon\,\mathbf{k}(\mathbf{I}_1)$ şi $\varepsilon\mathbf{k}(\mathbf{I}_2)$ este mai mică decît $|\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|$. Prin urmare, $\mathbf{I}_1 + \varepsilon\,\mathbf{k}(\mathbf{I}_1) \neq \mathbf{I}_2 + \varepsilon\mathbf{k}(\mathbf{I}_2)$. Aplicaţia (3) în $G - \alpha$ este deci injectivă şi lema este demonstrată.

Din lemă rezultă că pentru ε suficient de mic sînt adevărate toate evaluările (8). Prin urmare, este adevărată şi evaluarea (7).

Să comparăm acum sistemele de ecuaţii diferenţiale pentru $\mathbf{J}$:

$$\dot{\mathbf{J}} = \varepsilon\,\bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{J}) \tag{2}$$

şi pentru $\mathbf{P}$; ultimul capătă, datorită lui (9), forma

$$\dot{\mathbf{P}} = \varepsilon\,\bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{P}) + \mathcal{R}. \tag{6'}$$

Deoarece diferenţa dintre cei doi membri drepţi este de ordinul $\lesssim \varepsilon^2$ (vezi (7)), după timpul $t \lesssim \frac{1}{\varepsilon}$ soluţiile se îndepărtează la

*) Pentru orice valoare fixată a parametrului φ.

distanţa $|\mathbf{P} - \mathbf{J}| \lesssim \varepsilon$ (fig. 226). Pe de altă parte, $|\mathbf{I} - \mathbf{P}| = \varepsilon|\mathbf{k}| \lesssim \varepsilon$. Prin urmare, pentru $t \lesssim \frac{1}{\varepsilon}$, diferenţa $|\mathbf{I} - \mathbf{J}|$ este de ordinul $\lesssim \varepsilon$, ceea ce trebuia arătat.

Trecînd la evaluări făcute cu acurateţe, să introducem mărimea

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}(t) - \mathbf{J}(t). \tag{10}$$

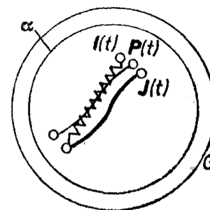


Fig. 226. Demonstraţia teoremei de mediere.

Atunci, din (6′) şi (9), rezultă

$$\dot{\mathbf{z}} = \varepsilon\,(\bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{g}}\,(\mathbf{J})) + \mathbf{P} = \varepsilon\,\frac{\partial\,\bar{\mathbf{g}}}{\partial\,\mathbf{P}}\,\mathbf{z} + \mathcal{R}',$$

unde $|R'| < c^2\varepsilon^2 + c_5\varepsilon\,|\mathbf{z}|$, dacă segmentul $[\mathbf{P}, \mathbf{J}]$ este conţinut în $G - \alpha$. În această ipoteză obţinem

$$|\dot{\mathbf{z}}| \leqslant c_6\,\varepsilon\,|\mathbf{z}| + c_2 \qquad (\text{unde } c_6 = c_5 + c_1)$$

$$|\mathbf{z}\,(0)| \leqslant c_3\,\varepsilon. \tag{11}$$

Lema. *Dacă* $|\dot{\mathbf{z}}| \leqslant a\,|\mathbf{z}| + b$, $|\mathbf{z}(0)| < d$ $(a, b, d, t, > 0)$ *atunci* $|\mathbf{z}\,(t)| < (d + bt)\,e^{at}$.

D e m o n s t r a ţ i e. $|\mathbf{z}(t)|$ nu este mai mare ca soluţia $y(t)$ a ecuaţiei $\dot{y} = ay + b$, $y(0) = d$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem $y = Ce^{at}$, $\dot{C}\,e^{at} = e^{-at}\,b$, $C(0) = d$, $C \leqslant d + bt$, ceea ce trebuia demonstrat.

În continuare din (11) rezultă, în ipoteza că segmentul $[\mathbf{P}, \mathbf{J}]$ este conţinut în $G - \alpha$ (fig. 226), că

$$|\mathbf{z}\,(t)| < (c_3\,\varepsilon + c_2\varepsilon^2\,t)\,e^{c_6\varepsilon t}.$$

Pentru $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ obţinem din această inegalitate

$$|\mathbf{z}(t)| < c_7\,\varepsilon, \quad c_7 = (c_3 + c_2)\,e^{c_6}.$$

Se observă că dacă $\alpha = \frac{d}{3}$ şi ε este suficient de mic, segmentul $[\mathbf{P}(t), \mathbf{J}(t)]$ ($t \leqslant 1/\varepsilon$) este conţinut în întregime în $G - \alpha$ şi prin urmare

$$|\mathbf{P}(t) - \mathbf{J}(t)| < c_8\,\varepsilon, \text{ pentru orice } 0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon.$$

Pe de altă parte, $|\mathbf{P}(t) - \mathbf{I}(t)| < |\varepsilon\,\mathbf{k}| < c_3\varepsilon$. În final, obţinem

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < c_9\,\varepsilon, \quad c_9 = c_8 + c_3 > 0$$

şi teorema este demonstrată.

E. Invarianţi adiabatici. Să considerăm un sistem hamiltonian cu un grad de libertate, cu funcţia lui Hamilton $H(p, q\ ; \lambda)$ care depinde de un parametru λ.

Drept exemplu se poate lua pendulul :

$$H = \frac{p^2}{2l^2} + lg\frac{q^2}{2},$$

unde parametrul λ poate fi lungimea l sau acceleraţia gravitaţională g.

Să presupunem că parametrul variază lent în timp. La limită, cînd viteza de variaţie a parametrului tinde la zero, apare un fenomen asimptotic remarcabil : două mărimi care, în general, sînt independente, devin una funcţie de cealaltă.

De exemplu, să presupunem că lungimea pendulului variază lent (în comparaţie cu oscilaţiile sale proprii). Se dovedeşte că în acest caz amplitudinea oscilaţiilor devine funcţie de lungimea pendulului. De exemplu, dacă lungimea firului pendulului este mărită foarte lent de două ori, atunci la capătul acestui proces amplitudinea oscilaţiilor îşi recapătă valoarea iniţială.

Mai mult, se dovedeşte că la o variaţie lentă a parametrilor, raportul dintre energia pendulului H şi frecvenţa oscilaţiilor ω nu se schimbă aproape deloc, deşi energia şi frecvenţa pot să varieze puternic separat. Mărimile de acest tip — care variază puţin la o variaţie lentă a parametrilor — au fost denumite de fizicieni *invarianţi adiabatici*.

Este uşor să ne dăm seama că invarianţa adiabatică a relaţiei dintre energia şi frecvenţa pendulului este o afirmaţie cu caracter

fizic, deci care nu este adevărată fără ipoteze suplimentare. Într-adevăr, făcînd să varieze oricît de lent lungimea pendulului, dar alegînd faza oscilaţiilor prin care lungimea se măreşte şi se micşorează, pendulul poate fi balansat (rezonanţa parametrică). Simţind acest lucru, fizicienii au propus o formulare a definiţiei invarianţei adiabatice care sună astfel : persoana care variază parametrii sistemului nu trebuie să vadă în care stare se află sistemul (fig. 227). A da acestei definiţii un sens matematic riguros — iată o problemă destul de delicată şi încă nerezolvată. Din fericire, putem să ne descurcăm cu un surogat, înlocuind neamestecul persoanei care variază parametrii în treburile interne ale sistemului prin cerinţe ca variaţia parametrilor să fie lină, şi anume de două ori continuu diferenţiabilă.

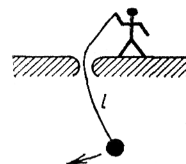


Fig. 227. Modificarea adiabatică a lungimii pendulului.

Mai exact, fie $H(p, q\,; \lambda)$ o funcţie fixată de λ de două ori continuu diferenţiabilă. Să punem $\lambda = \varepsilon\, t$ şi să considerăm sistemul astfel obţinut cu parametrul $\lambda = \varepsilon\, t$ care variază lent :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H\,(p, q\,;\ \varepsilon\, t). \qquad (*)$$

D e f i n i ţ i e . Mărimea $I(p, q\,; \lambda)$ se numeşte *invariant adiabatic* al sistemului (*) dacă pentru orice $\varkappa > 0$ există un $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru $\varepsilon < \varepsilon_0$ şi $0 < t < 1/\varepsilon$ să aibă loc inegalitatea

$$|I(p(t), q(t)\,; \varepsilon\, t) - I(p(0), q(0)\,;\ \ 0)| < \varkappa.$$

Evident, orice integrală primă este şi un invariant adiabatic.

Se dovedeşte că *sistemul unidimensional* (*) *are un invariant adiabatic, şi anume este invariant adiabatic variabila acţiune în problema cu coeficienţii constanţi corespunzătoare.*

Să presupunem că traiectoriile sistemului cu hamiltonianul $H(p, q\,; \lambda)$ sînt închise. Definim funcţia $I(p, q\,; \lambda)$ în modul urmă-

tor. Pentru λ fixat, funcției $H(p, q; \lambda)$ îi corespunde un anumit tablou al orbitelor în spațiul fazelor (fig. 228). Să considerăm o orbită închisă care trece prin punctul (p, q). Ea mărginește în planul fazelor o anumită arie. Să notăm valoarea acestei arii cu $2\pi I(p, q; \lambda)$. Pe fiecare orbită (pentru λ dat) $I = \text{const}$. Evident, I nu este altceva decît variabila acțiune (vezi §50).

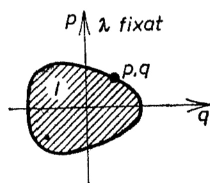


Fig. 228. Invariant adiabatic al unui sistem unidimensional.

Teoremă. *Dacă frecvența sistemului considerat* (*), $\omega(I, \lambda)$, *nu se anulează, atunci* $I(p, q; \lambda)$ *este invariant adiabatic.*

F. Demonstrația invarianței adiabatice a acțiunii. Pentru λ fixat, în sistemul (*) se pot introduce variabilele acțiune-unghi I, φ, printr-o transformare canonică, care depinde de λ:

$$p,q \mapsto I, \varphi; \ \dot{\varphi} = \omega(I, \lambda), \ \dot{I} = 0 \ ; \ \omega(I, \lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I},$$

$$H_0 = H_0(I, \lambda).$$

Să notăm cu $S(I, q; \lambda)$ funcția (multiformă) generatoare a acestei transformări:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}.$$

Fie acum $\lambda = \varepsilon t$. Deoarece trecerea de la variabilele p, q la variabilele I, φ se face printr-o transformare canonică care depinde de timp, ecuațiile de mișcare au în noile variabile I, φ forma hamiltoniană, dar cu funcția lui Hamilton (vezi §45, A, p. 295)

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(I, q; \lambda)$ este o funcție uniformă în planul fazelor.

I n d i c a ț i e . Caracterul multiform al lui S se reduce la adăugarea unor multipli de $2\pi I$.

În acest mod obținem ecuațiile de mișcare sub forma:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I, \lambda) + \varepsilon f(I, \varphi; \lambda) & \left(f = -\dfrac{\partial^2 S}{\partial I \partial \lambda}\right); \\ \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi; \lambda) & \left(g = \dfrac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \lambda}\right); \\ \dot{\lambda} = \varepsilon. \end{cases}$$

Deoarece $\omega \neq 0$, putem aplica teorema de mediere (p. 350). Sistemul mediat are forma

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}, \quad \dot{\lambda} = \varepsilon.$$

Dar $g = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial \lambda}$, și $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$ este o funcție uniformă pe cercul $I = \text{const}$. Rezultă $\bar{g} = (2\pi)^{-1} \int g \, d\varphi = 0$ și deci în sistemul mediat J nu se schimbă deloc: $J(t) \equiv J(0)$.

Conform teoremei de mediere

$$|I(t) - I(0)| < c\varepsilon \text{ pentru orice } t \text{ cu } 0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

E x e m p l u . Pentru oscilatorul armonic (vezi fig. 217).

$$H = \frac{a^2}{2} p^2 + \frac{b^2}{2} q^2, \quad I = \frac{1}{2\pi} \pi \frac{\sqrt{2h}}{a} \frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{h}{\omega}, \quad \omega = ab,$$

deci este invariant adiabatic raportul dintre energie și frecvență.

P r o b l e m ă . Lungimea pendulului se mărește lent de două ori $\left(l = l_1(1 + \varepsilon t), \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Cum variază amplitudinea q_{max} a unghiului de abatere de la verticală?

Rezolvare. $I = \frac{1}{2} l^{3/2} g^{1/2} q^2_{\max}$; prin urmare

$$q_{\max}(t) = q_{\max}(0) \left[\frac{l(0)}{l(t)} \right]^{3/4}.$$

Drept al doilea exemplu să considerăm mişcarea unei bile mici rigide absolut elastice de masă 1 între doi pereţi absolut elastici a căror distanţă relativă, l, variază lent (fig. 229).

Putem considera că punctul se mişcă într-o groapă de potenţial dreptunghiulară de adîncime infinită şi că orbitele în planul fazelor sînt dreptunghiuri de arie $2vl$, unde v este viteza bilei. În acest caz se dovedeşte că produsul vl dintre viteza bilei şi distanţa dintre pereţi este invariant adiabatic*).

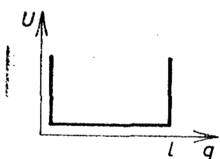


Fig. 229. Invariantul adiabatic al unei bile absolut elastice între doi pereţi care se deplasează lent.

Prin urmare, dacă se apropie pereţii la o distanţă egală cu jumătatea distanţei iniţiale, viteza bilei va creşte şi ea de două ori, iar dacă pereţii se îndepărtează, viteza se micşorează.

*) Acest lucru nu rezultă direct din teorema demonstrată, deoarece ea se ocupă de sistemele netede, în care nu au loc ciocniri. Demonstrarea invarianţei adiabatice a mărimii vl în acest sistem este o problemă instructivă elementară.

ANEXA 1
CURBURA RIEMANNIANĂ

Dintr-o foaie de hîrtie putem răsuci un con sau un cilindru, dar nu putem obţine nici o porţiune de sferă fără încreţituri, dilatări sau tăieturi. Cauza constă în diferenţele care există între „geometriile intrinseci" ale acestor suprafeţe : nici o porţiune a sferei nu poate fi aplicată izometric pe plan.

Invariantul care distinge metricile riemanniene se numeşte *curbura riemanniană*. Curbura riemanniană a planului este zero, iar curbura sferei de rază R este R^{-2}. Dacă o varietate riemanniană se aplică izometric pe alta, atunci curburile riemanniene în punctele care corespund sînt egale. Spre exemplu, conul şi cilindrul fiind local izometrice cu planul, curbura lor riemanniană în orice punct este nulă. Prin urmare, nici un domeniu de pe con sau de pe cilindru nu poate fi aplicat izometric în sferă.

Curbura riemanniană a unei varietăţi exercită o influenţă destul de mare asupra comportării geodezicelor varietăţii, deci asupra mişcării sistemului dinamic corespunzător. Dacă curbura riemanniană a unei varietăţi este pozitivă (cum se întîmplă pe o sferă sau un elipsoid) atunci, în majoritatea cazurilor, geodezicele vecine oscilează una în jurul celeilalte. Dacă curbura este negativă (cum se întîmplă pe hiperboloidul cu o pînză) atunci geodezicele se îndepărtează rapid în direcţii diferite.

În această anexă se defineşte curbura riemanniană şi se discută pe scurt proprietăţile geodezicelor pe varietăţile de curbură negativă. Informaţii mai amănunţite privind curbura riemanniană pot fi găsite în cartea lui J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1961, iar privind geodezicele varietăţilor de curbură negativă —în cartea lui D.V. Anosov *Curenţi geodezici pe varietăţi cu curbură negativă*, Trudî MIAN im. Steklova, Moscova, 1967.

A. Transportul paralel pe suprafeţe. Definirea curburii riemanniene se bazează pe construcţia transportului paralel al vectorilor de-a lungul curbelor pe o varietate riemanniană.

24 — c. 1719

Vom începe cu un exemplu în care varietatea dată este bidimensională, deci o suprafață, iar curba dată — un arc de geodezică pe această suprafață.

Transportul paralel al unui vector tangent la suprafață, de-a lungul unei geodezice de pe suprafață, se definește astfel : punctul în care se aplică vectorul se mișcă după o geodezică, iar vectorul se deplasează continuu, astfel încît unghiul pe care îl face cu geodezica și lungimea sa să rămînă constante.

Ca rezultat al acestui transport, efectuat pentru toți vectorii tangenți la suprafață în punctul inițial al geodezicei pînă în punctul final, se obține o aplicație a spațiului tangent în punctul inițial în spațiul tangent în punctul final. Această aplicație este liniară și izometrică.

Definim acum transportul paralel al unui vector pe suprafață de-a lungul unei linii frînte formate din mai multe arce de geodezice (fig. 230). Pentru a transporta un vector de-a lungul liniei frînte, îl transportăm din primul vîrf în al doilea de-a lungul primului arc de geodezică, apoi transportăm vectorul astfel obținut din al doilea vîrf în al treilea de-a lungul celui de-al doilea arc de geodezică ș.a.m.d.

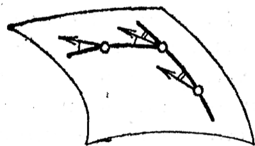


Fig. 230. Transportul paralel de-a lungul unei linii frînte.

P r o b l e m ă . Transportați paralel un vector tangent la sferă din vîrful unui triunghi sferic cu trei unghiuri drepte înapoi în acest vîrf, de-a lungul laturilor triunghiului.

Răspuns. Ca rezultat al acestui transport, planul tangent la sferă în vîrful inițial al triunghiului sferic se rotește cu 90°.

În sfîrșit, *transportul paralel al unui vector de-a lungul unei curbe netede arbitrare pe suprafață se definește cu ajutorul unui proces de trecere la limită, în care curba dată se aproximează cu linii frînte formate din arce de geodezică.*

P r o b l e m ă. Transportați paralel un vector îndreptat spre Polul Nord și aplicat în Leningrad (la latitudinea $\lambda = 60°$) de-a lungul paralelei de 60° înapoi în Leningrad, mișcîndu-vă spre est.

Răspuns. Vectorul se rotește cu unghiul $2\pi(1 - \cos\lambda)$, deci aproximativ cu 50° către vest. Prin urmare, mărimea unghiului de rotație este proporțională cu aria calotei sferice mărginite de paralela noastră, iar direcția de rotație coincide cu direcția de parcurgere a paralelei atunci cînd prin transportul vectorului se ocolește Polul Nord.

I n d i c a ț i e . Este suficient să transportăm vectorul de-a lungul aceluiași cerc pe conul format de tangentele cu direcția Nord la Pămînt în toate punctele paralelei (fig. 231). Acest con poate fi desfășurat pe plan, după care transportul paralel pe suprafața sa se reduce la transportul paralel obișnuit în plan.

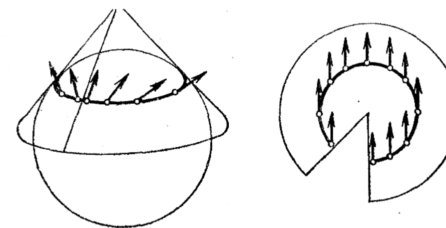


Fig. 231. Transportul paralel pe sferă.

E x e m p l u . Să considerăm semiplanul superior $y > 0$ din planul variabile complexe $z = x + iy$, cu metrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Se poate arăta cu ușurință cu geodezicele acestei varietăți bidimensionale sînt cercurile și dreptele ortogonale la axa x. Transformările omografice cu coeficienți reali

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

sînt izometrii ale varietății noastre, care se numește *planul lui Lobacevski*.

P r o b l e m ă. *Să se transporte versorul axei imaginare din punctul* $z = i$ *în punctul* $z = t + i$ de-a lungul unei drepte orizontale ($dy = 0$) (fig. 232).

Răspuns. La deplasarea din i în $t+i$ vectorul se rotește cu t radiani în sensul „de la versorul axei y spre versorul axei x".

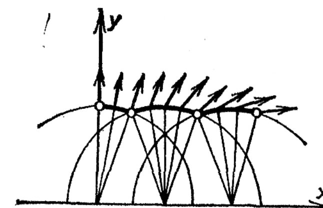


Fig. 232. Transportul paralel în planul lui Lobacevski.

B. Forma de curbură. Putem defini acum curbura riemanniană a unei varietăți riemanniene bidimensionale în fiecare punct al ei. În acest scop, să alegem în vecinătatea punctului fixat o orientare a

suprafeței noastre și să considerăm transportul paralel al vectorilor de-a lungul frontierei unui domeniu mic D de pe suprafață. Se vede ușor că rezultatul unui astfel de transport este o rotație de unghi mic. Notăm acest unghi cu $\varphi(D)$ (direcția de măsurare a unghiului este determinată de orientarea aleasă mai sus).

Dacă se împarte domeniul D în două părți D_1 și D_2, atunci rezultatul transportului paralel pe frontiera lui D se poate obține și ocolind mai întîi pe D_1, iar după aceea — pe D_2. Prin urmare

$$\varphi(D) = \varphi(D_1) + \varphi(D_2),$$

deci unghiul de rotație este funcție aditivă de domeniu. La schimbarea sensului de parcurgere al frontierei, φ își schimbă semnul. Din aceste motive este natural să reprezentăm pe $\varphi(D)$ ca integrala pe domeniul D a unei 2-forme diferențiale adecvate. O asemenea 2-formă există în realitate; ea se numește *forma de curbură* și o notăm cu Ω. Prin urmare, definim forma de curbură prin relația

$$\varphi(D) = \int_D \Omega. \tag{1}$$

Valoarea formei Ω pe o pereche de vectori $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in TM_x$ tangenți la M în punctul $x \in M$ se poate defini în modul următor. Identificăm o vecinătate a vectorului $0 \in TM_x$ în spațiul tangent la M în x cu o vecinătate a punctului x (utilizînd, de exemplu, un sistem de coordonate locale). Putem construi atunci un paralelogram $\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon$ subîntins de vectorii $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ și $\varepsilon\boldsymbol{\eta}$, cel puțin pentru valori suficient de mici ale lui ε.

Valoarea formei de curbură Ω pe vectorii $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$, se definește acum prin formula

$$\Omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon)}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

Cu alte cuvinte, *valoarea formei de curbură pe o pereche de vectori tangenți infinit mici este egală cu unghiul de rotație* al vectorilor în urma transportului paralel de-a lungul paralelogramului infinitezimal subîntins de acești doi vectori.

Problemă. Să se determine forma de curbură pe plan, pe sfera de rază R și pe planul lui Lobacevski.

Răspuns. $\Omega = 0$, $\Omega = R^{-2}dS$, $\Omega = -dS$, unde 2-forma dS este elementul riemannian de arie pe suprafața noastră orientată.

Problemă. Să se demonstreze că funcția definită de formula (2) este într-adevăr o 2-formă diferențială, care nu depinde de elementele alese arbitrar în timpul construcției și că rotația unui vector în urma transportului paralel de-a lungul frontierei unui domeniu mărginit și orientat D se exprimă cu această formă prin intermediul formulei (1).

Problemă. Să se demonstreze că integrala formei de curbură pe orice suprafață convexă din spațiul euclidian tridimensional este egală cu 4π.

C. Curbura riemanniană a unei suprafețe. Să observăm că orice 2-formă pe o varietate riemanniană bidimensională orientată M se poate scrie sub forma $\rho\, dS$, unde dS este elementul riemannian orientat de arie și ρ este o funcție reală univoc determinată de alegerea metricii și orientării.

În particular, forma de curbură se poate scrie

$$\Omega = K\, dS,$$

unde $K : M \to \mathbf{R}$ este o funcție netedă pe M și dS este elementul de arie.

Valoarea funcției K în punctul $x \in M$ se numește *curbura riemanniană în punctul* x.

Problemă. Să se calculeze curbura riemanniană a planului euclidian, a sferei de rază R și a planului lui Lobacevski.

Răspuns. $K = 0$, $K = R^{-2}$, $K = -1$.

Problemă. Să se demonstreze că curbura riemanniană nu depinde de orientarea varietății, ci numai de metrică.

Indicație. La schimbarea orientării, atît Ω cît și dS își schimbă semnul.

Problemă. Să se demonstreze că pentru o suprafață în spațiul euclidian tridimensional curbura riemanniană în fiecare punct este egală cu produsul inverselor razelor principale de curbură (cu semnul minus, dacă centrele de curbură se găsesc în părți diferite față de suprafață).

Observăm că semnul curburii varietății într-un punct nu depinde de orientarea varietății; mai precis, acest semn poate fi definit fără a utiliza deloc orientarea.

Și anume, pe o varietate de curbură *pozitivă*, la transportul paralel de-a lungul frontierei unui domeniu mic, un vector se rotește în jurul originei sale în sensul în care punctul de pe frontieră ocolește domeniul; pe o varietate de curbură *negativă*, sensul de rotație este contrar.

În continuare, să observăm că valoarea curburii într-un punct este determinată numai de comportarea metricii într-o vecinătate a punctului și deci se păstrează la deformări izometrice : suprafețele izometrice au în punctele corespunzătoare curburi egale. Din acest motiv, curbura riemanniană mai este denumită și *curbura intrinsecă*.

Formulele pentru calculul curburii cu ajutorul componentelor *metricii într-un sistem de coordonate conțin* derivatele de ordin al doilea ale metricii și sînt destul de complicate; vezi mai jos problema de la pct. G p. 379.

D. Transportul paralel în mai multe dimensiuni. Construcția transportului paralel pe varietăți riemanniene de dimensiuni mai mari ca doi este ceva mai complicată decît construcția bidimensională expusă mai sus. Problema care apare este că, începînd cu dimensiunea trei, condiția de constanță a unghiului dintre geodezică și vectorul care se transportă de-a lungul ei nu mai definește univoc direcția vectorului transportat. Mai precis, acest vector poate fi rotit în jurul geodezicei, păstrînd constant unghiul pe care îl face cu geodezica.

Perfecționarea care trebuie adusă construcției transportului paralel de-a lungul unei geodezice pentru a înlătura nedeterminarea de mai sus constă în alegerea unui plan bidimensional care să treacă prin vectorul tangent la geodezică și care să conțină vectorul care se transportă. Această alegere se efectuează în modul următor (care, din păcate, este destul de complicat).

În punctul inițial al geodezicei există un plan cu proprietățile căutate, acesta este planul generat de vectorul care trebuie transportat și vectorul tangent la geodezică. Considerăm toate geodezicele care pleacă din punctul inițial în direcțiile conținute în acest

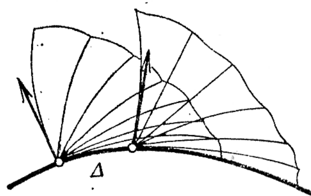


Fig. 233. Transportul paralel în spațiu.

plan. Toate aceste geodezice formează o suprafață netedă (în vecinătatea punctului inițial) care conține geodezica de-a lungul căreia se efectuează transportul (fig. 233).

Să considerăm un punct pe această geodezică, aflat la distanța mică Δ de punctul inițial. Planul tangent la suprafața descrisă în acest nou punct conține direcția vectorului tangent la geodezică. Luăm acest nou punct ca punct inițial și utilizăm planul tangent în el la varietate astfel obținut la construcția unei noi suprafețe (formată din fascicolul de geodezice care pleacă din acest nou punct inițial). Această suprafață conține din nou geodezica inițială. Ne deplasăm din nou cu distanța Δ de-a lungul geodezicei inițiale și repetăm toate construcțiile.

După un număr finit de pași ajungem la orice punct dorit al geodezicei inițiale. Ca rezultat al activității noastre, în fiecare punct al geodezicei apare un plan tangent care conține direcția geodezicei. Acest plan depinde de pasul Δ al construcției. Atunci cînd $\Delta \to 0$, familia de plane tangente astfel obținută tinde (așa cum se poate demonstra) spre un plan limită bine determinat.

Ca rezultat, de-a lungul geodezicei noastre apare un cîmp de plane tangente care conțin direcția geodezicei și sînt definite în mod intrinsec, folosind numai metrica varietății.

Transportul paralel al unui vector de-a lungul unei geodezice se definește la fel ca în cazul bidimensional : în timpul transportului vectorul trebuie să rămînă în planele construite și să-și păstreze lungimea și unghiul pe care îl face cu direcția geodezicei. Transportul paralel de-a lungul unei curbe arbitrare se face aproximînd curba cu linii frînte geodezice, la fel ca în cazul bidimensional.

P r o b l e m ă . Să se demonstreze că transportul paralel al vectorilor dintr-un punct al unei varietăți riemanniene în alt punct al acesteia de-a lungul unui drum fixat, definește un operator liniar izometric din spațiul tangent în primul punct pe spațiul tangent în cel de-al doilea.

P r o b l e m ă. Să se transporte paralel un vector arbitrar de-a lungul curbei

$$x_1 = t, \qquad x_2 = 0, \quad y = 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \tau)$$

din spațiul lui Lobacevski cu metrica

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dy^2}{y^2}.$$

Răspuns. Vectorii care au ca direcție axa x_1 sau axa y se rotesc în planul generat de aceste axe cu unghiul τ, în direcția de la axa y la axa x_1, iar vectorii care au direcția axei x_2 se transportă paralel cu ei înșiși în sensul metricii euclidiene.

E. Tensorul de curbură. Să considerăm acum, la fel ca în cazul bidimensional, transportul paralel de-a lungul unui drum închis mic (care începe și se termină în același punct al varietății riemanniene).

Transportul paralel de-a lungul unui astfel de drum întoarce vectorul în spațiul tangent inițial. Aplicația spațiului tangent astfel obținută este o rotație mică (o transformare ortogonală apropiată de transformarea identică).

În cazul bidimensional am caracterizat această rotație cu ajutorul unui singur număr — unghiul de rotație φ. În cazul cu mai multe dimensiuni, rolul numărului φ este jucat de un operator antisimetric.

Și anume, fiecare operator ortogonal A apropiat de operatorul identic se reprezintă univoc sub forma

$$A = e^{\Phi} = E + \Phi + \frac{\Phi^2}{2} + \ldots,$$

unde Φ este un operator antisimetric mic.

P r o b l e m ă. Să se determine Φ atunci cînd A este rotația planului cu un unghi mic φ.

Răspuns. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}.$

Spre deosebire de cazul bidimensional, funcția de drum Φ nu este, în general, aditivă (deoarece grupul ortogonal al spațiului de dimensiune n este, pentru $n > 2$, necomutativ). Cu toate acestea, putem construi cu ajutorul lui Φ forma de curbură care descrie rotația infinit mică la parcurgerea unui paralelogram infinit mic prin aceeași metodă pe care am folosit-o în cazul bidimensional deci cu ajutorul formulei (2).

Într-adevăr, fie ξ și $\eta \in TM_x$ vectori tangenți la varietatea riemanniană M în punctul x. Construim în M un mic paralelogram curbiliniu Π_ε. (Laturile paralelogramului Π_ε se obțin din vectorii tangenți $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ prin identificarea, via un sistem de coordonate, a unei vecinătăți a punctului $0 \in TM_x$ cu o vecinătate a punctului x în M). Să considerăm transportul paralel de-a lungul laturilor paralelogramului Π_ε (începem parcurgerea cu ξ).

Rezultatul acestui transport este o transformare ortogonală a spațiului TM_x, vecină cu transformarea identică. Ea diferă de transformarea identică printr-o mărime de ordinul ε^2 și este de forma

$$A_\varepsilon(\xi, \eta) = E + \varepsilon^2\Omega + o(\varepsilon^2),$$

unde Ω este un operator antisimetric care depinde de ξ și η.

Prin urmare, pentru orice $x \in M$, putem defini o funcție pe mulțimea perechilor de vectori ξ, $\eta \in TM_x$ cu valori în mulțimea operatorilor antisimetrici pe TM_x, prin formula

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A_\varepsilon(\xi, \eta) - E}{\varepsilon^2}.$$

P r o b l e m ă. Să se arate că funcția $x \mapsto \Omega = \Omega_x$ este o 2-formă diferențială (cu valori operatori antisimetrici pe TM_x, $x \in M$) și că ea nu depinde de alegerea coordonatelor cu care am identificat vecinătățile din TM_x și M.

Forma Ω se numește *tensorul de curbură* al varietății riemanniene M. Prin urmare, tensorul de curbură descrie rotația infinitezimală a spațiului tangent în urma transportului paralel pe un paralelogram infinit mic.

F. Curbura în direcții bidimensionale (secțională). Să considerăm un plan (de dimensiune 2) L în spațiul tangent la varietatea riemanniană M în punctul arbitrar x. Considerăm toate geodezicele care pleacă din punctul x în toate direcțiile din planul L. Aceste geodezice formează în vecinătatea punctului x o suprafață netedă. Suprafața astfel construită este scufundată în varietatea riemanniană M și este înzestrată cu metrica indusă.

Se numește *curbura varietății riemanniene M în direcția 2-planului L din spațiul tangent la M în punctul x* curbura riemanniană a suprafeței de mai sus în punctul x.

P r o b l e m ă. Să se găsească curburile sferei tridimensionale de rază R și spațiului lui Lobacevski în toate direcțiile bidimensionale.

În general, curburile unei varietăți riemanniene în direcții bidimensionale diferite într-un punct dat sînt diferite. Dependența lor de direcție este descrisă de formula (3) de mai jos.

Teoremă. *Curbura unei varietăți riemanniene în direcția bidimensională definită de perechea de vectori ortogonali și de lungime 1, ξ, și η, se exprimă cu ajutorul tensorului de curbură Ω prin formula*

$$K = \langle\Omega(\xi, \eta)\xi, \eta\rangle, \tag{3}$$

unde parantezele $\langle\ ,\ \rangle$ reprezintă notația pentru produsul scalar care definește metrica riemanniană.

Demonstrația se obține comparînd definițiile tensorului de curbură și a curburii în direcții bidimensionale (secționale). Nu ne vom opri asupra expunerii ei amănunțite. După preferință, formula (3) poate fi luată ca definiție a curburii K.

G. Derivarea covariantă. În legătură cu transportul paralel de-a lungul curbelor de pe o varietate riemanniană apare un calcul diferențial specific — așa-numita derivare covariantă sau conexiunea riemanniană. Această derivare se definește în modul următor.

Fie $\boldsymbol{\xi}$ un vector tangent la varietatea M în punctul x și $\mathbf{v}$ un cîmp de vectori definit pe M în vecinătatea punctului x. *Derivata covariantă a cîmpului* $\mathbf{v}$ *în direcția vectorului* $\boldsymbol{\xi}$ se definește cu ajutorul unei curbe arbitrare care pleacă din punctul x cu viteza $\boldsymbol{\xi}$.

Prin mișcarea pe această curbă vom ajunge, după timpul t, în noul punct $x(t)$. Luăm vectorul cîmpului $\mathbf{v}$ în punctul $x(t)$ și îl transportăm paralel de-a lungul curbei, înapoi în punctul inițial x. Obținem un vector dependent de t al spațiului TM_x tangent la M în x. La $t=0$, acest vector coincide cu $\mathbf{v}(x)$, iar pentru alte valori ale lui t el variază în funcție de cum se abate cîmpul $\mathbf{v}$ de-a lungul curbei noastre de direcție $\boldsymbol{\xi}$, de la un cîmp paralel.

Să considerăm derivata vectorului dependent de t astfel obținut la $t=0$. Această derivată este un vector al spațiului tangent TM_x. Ea se numește *derivata covariantă a cîmpului* $\mathbf{v}$ *în raport cu* $\boldsymbol{\xi}$ și se notează cu $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}$.

Se verifică ușor că vectorul $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}$ nu depinde de alegerea curbei care apare în definiția sa, ci numai de vectorul $\boldsymbol{\xi}$ și cîmpul $\mathbf{v}$.

P r o b l e m a 1. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale derivării covariante:

1) $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}$ este o funcție biliniară în $\boldsymbol{\xi}$ și $\mathbf{v}$.

2) $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(f\mathbf{v})=(L_{\boldsymbol{\xi}}f)\mathbf{v}+f\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v}$ pentru orice funcție netedă f, unde $L_{\boldsymbol{\xi}}f$ este derivata funcției f în direcția vectorului $\boldsymbol{\xi}\in TM_x$.

3) $L_{\boldsymbol{\xi}}\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\langle\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{v},\mathbf{w}(x)\rangle+\langle\mathbf{v}(x),\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{w}\rangle$.

4) $\nabla_{\mathbf{v}(x)}\mathbf{w}-\nabla_{\mathbf{w}(x)}\mathbf{v}=[\mathbf{w},\mathbf{v}](x)$ (unde $L_{[\mathbf{w},\mathbf{v}]}=L_{\mathbf{v}}L_{\mathbf{w}}-L_{\mathbf{w}}L_{\mathbf{v}}$).

P r o b l e m a 2. Să se demonstreze că tensorul de curbură se exprimă prin derivatele covariante în modul următor:

$$\Omega(\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\eta}_0)\boldsymbol{\zeta}_0=\left(-\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\zeta}+\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\zeta}+\nabla_{[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]}\boldsymbol{\zeta}\right)\Big|_x,$$

unde $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ și $\boldsymbol{\zeta}$ sînt cîmpuri de vectori arbitrare cu proprietatea

$$\boldsymbol{\xi}(x)=\boldsymbol{\xi}_0,\quad \boldsymbol{\eta}(x)=\boldsymbol{\eta}_0,\quad \boldsymbol{\zeta}(x)=\boldsymbol{\zeta}_0\in TM_x.$$

P r o b l e m a 3. Să se demonstreze că tensorul de curbură satisface următoarele identități:

$$\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\zeta}+\Omega(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\xi}+\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta}=0,$$

$$\langle\Omega(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\Omega(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle.$$

P r o b l e m a 4. Să presupunem că metrica riemanniană este dată în sistemul local de coordonate $x_1,\dots,x_n$ de matricea simetrică g_{ij}:

$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}\,dx_i\,dx_j.$$

Să notăm cu $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ cîmpurile de vectori definite de coordonate (astfel încît derivata în direcția lui $\mathbf{e}_i$ este $\partial_i=\partial/\partial x_i$). Derivatele covariante se pot calcula acum utilizînd formulele din problema 1 și următoarele două formule:

$$\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j=\sum_k\Gamma^k_{ij}\,\mathbf{e}_k,\qquad \Gamma^k_{ij}=\sum_l\frac{1}{2}(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})g^{lk},$$

unde (g^{lk}) este matricea inversă a matricii (g_{lk}).

Utilizînd expresia tensorului de curbură în raport cu conexiunea din problema 2 obținem o formulă explicită și pentru tensorul de curbură. Numerele $R_{ijkl}=\langle\Omega(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l\rangle$ se numesc *componentele* tensorului de curbură.

H. Ecuația lui Jacobi. Curbura unei varietăți riemanniene este strîns legată de comportarea geodezicelor. În particular, să considerăm o geodezică care pleacă dintr-un punct oarecare într-o direcție oarecare și să-i schimbăm puțin condițiile inițiale — deci punctul inițial și direcția inițială. Noile date inițiale definesc o nouă geodezică. La început, această geodezică diferă numai puțin de cea inițială. Pentru a studia abaterea este util să liniarizăm ecuația diferențială a geodezicelor în vecinătatea geodezicei inițiale.

Ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea care se obține în acest fel („ecuația în variații" pentru ecuația geodezicelor) se numește *ecuația lui Jacobi* și ea se scrie comod cu ajutorul derivatelor covariante și a tensorului de curbură.

Să notăm cu $x(t)$ un punct care se mișcă pe o geodezică a varietății M cu viteza constantă ca mărime $\mathbf{v}(t)\in TM_{x(t)}$.

Dacă condiția inițială depinde neted de un parametru α, atunci și geodezica depinde neted de acest parametru. Să considerăm mișcarea corespunzătoare valorii fixate α a parametrului. La momentul t, notăm poziția punctului pe geodezica corespunzătoare

cu $x(t, \alpha) \in M$. Vom considera că geodezica inițială corespunde valorii zero a parametrului, deci $x(t, 0) = x(t)$.

Se numește *cîmpul vectorial al variației geodezicei* derivata funcției $x(t, \alpha)$ în raport cu parametrul α, la $\alpha = 0$; valoarea acestui cîmp în punctul $x(t)$ este egală cu

$$\frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} x(t, \alpha) = \xi(t) \in TM_{x(t)}.$$

Pentru a scrie ecuația în variații, să mai definim și derivata covariantă în raport cu t a unui cîmp $\zeta(t)$ definit de-a lungul geodezicei $x(t)$. Prin definiție, această derivată se construiește în modul următor: se ia vectorul $\zeta(t+h)$, se transportă paralel din punctul $x(t+h)$ în punctul $x(t)$ de-a lungul geodezicei și apoi se derivează vectorul dependent de h din $TM_{x(t)}$ astfel obținut în raport cu h, la $h = 0$. Se obține ca rezultat un vector din spațiul tangent $TM_{x(t)}$ care se numește *derivata covariantă a cîmpului* $\zeta(t)$ *în raport cu* t *și se notează cu* $D\zeta/Dt$.

Teoremă. *Cîmpul vectorial al unei variații a geodezicei date satisface ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea*

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = -\Omega(\mathbf{v}, \xi)\mathbf{v}, \qquad (4)$$

unde Ω *este tensorul de curbură iar* $\mathbf{v}(t)$ *este vectorul viteză de mișcare pe geodezica inițială.*

Reciproc, orice soluție a ecuației diferențiale (4) *este cîmpul vectorial al unei variații a geodezicei date.*

Ecuația (4) se numește *ecuația lui Jacobi.*

Problemă. Să se demonstreze teorema formulată.

Problemă. Fie M o suprafață, $y(t)$ lungimea componentei normale la geodezică a unui cîmp $\xi(t)$ și să presupunem că vectorul $\mathbf{v}(t)$ este de lungime 1. Să se demonstreze că y satisface ecuația diferențială

$$\ddot{y} = -Ky, \qquad (5)$$

unde $K = K(t)$ este curbura riemanniană a suprafeței M în punctul $x(t)$.

Problemă. Utilizînd ecuația (5) să se compare comportarea geodezicelor apropiate de o geodezică dată pe sferă ($K = +R^{-2}$) și în planul lui Lobacevski ($K = -1$).

I. Studierea ecuației lui Jacobi. Cînd se studiază ecuațiile în variații este util să se excludă variațiile triviale care, se reduc la schimbarea originei măsurării timpului sau a mărimii vitezei inițiale a mișcării. În acest scop descompunem vectorul variației ξ în componentele paralelă și ortogonală la vectorul viteză $\mathbf{v}$. Atunci (deoarece $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ și datorită antisimetriei operatorului $\Omega(\mathbf{v}, \xi)$), obținem pentru componenta normală din nou ecuația lui Jacobi, iar pentru cea paralelă cu viteza — ecuația $D^2\xi/Dt^2 = 0$.

Să observăm acum că ecuația lui Jacobi pentru componenta normală se poate scrie sub forma unei „ecuații Newton":

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = -\mathbf{grad}\ U,$$

unde forma pătratică U în raport cu vectorul ξ se exprimă prin tensorul de curbură și este proporțională cu curbura K în direcția planului $(\xi, \mathbf{v})$:

$$U(\xi) = \frac{1}{2}\langle\Omega(\mathbf{v}, \xi)\mathbf{v}, \xi\rangle = \frac{1}{2}K\langle\xi, \xi\rangle\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle.$$

Prin urmare, *comportarea componentei normale a vectorului variație al unei geodezice parcurse cu viteza* 1 *este descrisă de ecuația unui oscilator liniar* (*neautonom*) *a cărui energie potențială este egală cu jumătate din produsul dintre curbura în direcția planului definit de vectorul viteză și vectorul variației și pătratul lungimii componentei normale a vectorului variație.*

În particular, să considerăm cazul în care curbura în orice direcție bidimensională care conține vectorul viteză al geodezicei este *negativă* (fig. 234). În acest caz abaterea după normală a

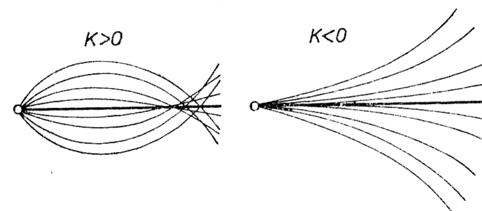


Fig. 234. Geodezice vecine pe varietăți de curbură pozitivă și respectiv negativă.

geodezicei vecine față de geodezica dată satisface ecuația unui oscilator cu energie potențială negativ definită (și dependentă de

timp). Prin urmare, componenta normală a abaterii geodezicelor vecine se comportă ca și abaterea față de vîrful muntelui a unei bile care se află în vecinătatea vîrfului. Poziția de echilibru a bilei în vîrful muntelui este instabilă. Aceasta înseamnă că geodezicele vecine cu geodezica dată se vor îndepărta exponențial de ea.

Dacă energia potențială a ecuației lui Newton obținute nu ar fi fost dependentă de timp, concluzia noastră ar fi fost complet riguroasă. Să mai presupunem că, în plus, curbura în diversele direcții bidimensionale care conțin pe **v** este mărginită inferior și superior:

$$-a^2 \leqslant K \leqslant -b^2, \text{ unde } 0<b<a.$$

Atunci soluțiile ecuației lui Jacobi pentru componentele normale vor fi combinații liniare de exponențiale cu exponenții $\pm\lambda_i$, unde numerele pozitive λ_i sînt mărginite de a și b ($b < \lambda_i < a$).

Prin urmare, fiecare soluție a ecuației lui Jacobi crește cel puțin ca $e^{b|t|}$ pentru $t \to +\infty$ sau pentru $t \to -\infty$; de fapt, majoritatea soluțiilor cresc chiar mai repede, cu viteza $e_{a|t|}$.

Instabilitatea poziției de echilibru pentru o energie potențială negativ definită în cazul neautonom este intuitiv destul de clară. Ea poate fi demonstrată prin comparație cu un sistem autonom adecvat. Ca rezultat al acestei comparații ne putem convinge că *toate soluțiile ecuației lui Jacobi pentru abaterile normale pe o varietate de curbură negativă cresc în timpul mișcării de-a lungul geodezicei cel puțin ca o exponențială din drumul parcurs, al cărei exponent este egal cu rădăcina pătrată din modulul curburii în acea direcție bidimensională în care acest modul este minim.*

În realitate, majoritatea soluțiilor cresc mai repede, dar nu mai putem afirma acum că exponentul de creștere al majorității soluțiilor este definit de direcția în care curbura negativă este, în modul, maximă.

Rezumînd, putem afirma: comportarea geodezicelor pe o varietate de curbură negativă este caracterizată de o instabilitate de tip exponențial. Pentru evaluarea cantitativă a acestei instabilități este utilă introducerea noțiunii de *drum caracteristic* s, care reprezintă drumul mediu la parcurgerea căruia micile abateri din condițiile inițiale cresc de e ori.

Mai exact, drumul caracteristic s se poate defini ca mărimea inversă exponentului λ care caracterizează creșterea soluțiilor ecuației lui Jacobi pentru abaterile normale de la geodezica dată, parcurse cu viteza 1:

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \max_{|t|<T} \max_{|\xi(0)|=1} \ln\, |\xi(t)|$$

$$s = 1/\lambda.$$

În general, exponentul λ și drumul caracteristic s depind de geodezica dată.

Dacă curbura varietății noastre în toate direcțiile bidimensionale este mărginită superior de numărul $-b^2$ ($b > 0$), atunci drumul caracteristic nu întrece pe b^{-1}.

Prin urmare, cu cît este mai negativă curbura varietății, cu atît drumul caracteristic s, după care instabilitatea geodezicelor conduce la mărirea de e ori a abaterii inițiale, este mai mic. Datorită creșterii exponențiale a abaterilor inițiale, comportarea exactă a unei geodezice pe o varietate de curbură negativă este practic imposibil de pronosticat.

Spre exemplu, să presupunem că curbura este negativă și mărginită superior de mărimea $-4m^{-2}$. Drumul caracteristic s nu este mai mare ca jumătate de metru și deci pe un segment de geodezică de cinci metri eroarea inițială crește cu aproximativ $e^{10} \sim 10^4$ ori. Prin urmare, o eroare de o zecime de milimetru în condiția inițială se transformă într-o abatere de un metru a extremității geodezicei.

J. Curenți geodezici pe varietăți compacte de curbură negativă. Fie M o varietate riemanniană compactă pentru care, în fiecare punct, curbura în toate direcțiile bidimensionale este negativă (există varietăți de acest tip). Să considerăm mișcarea inițială a unui punct material de masă 1 pe M, în absența oricăror forțe exterioare. Lagrangeanul acestui sistem este egal cu energia cinetică, care este egală cu energia totală și este o integrală primă a ecuațiilor de mișcare.

Dacă dimensiunea varietății M este n, atunci o varietate de nivel constant a energiei este de dimensiune $2n-1$. Această varietate este o subvarietate a fibrării tangente a varietății M. De exemplu, să fixăm valoarea constantei energiei la 1/2 (ceea ce corespunde vitezei inițiale 1). Atunci viteza punctului material rămîne mereu egală cu 1 și varietatea noastră de nivel constant se dovedește a fi spațiul total al fibrării

$$T_1M \subset TM$$

format din sferele unitate din spațiile tangente la M în toate punctele x.

Prin urmare, un punct al varietății T_1M este un vector tangent de lungime 1, aplicat într-un punct al varietății M. Conform principiului lui Maupertuis—Jacobi, mișcarea unui punct material cu o

condiție inițială fixată din $T_1 M$ poate fi descrisă în modul următor : punctul se mișcă cu viteza 1 pe geodezica determinată de condiția inițială.

Conform legii conservării energiei, subvarietatea T_1M este varietate invariantă în spațiul fazelor TM al sistemului nostru.

Prin urmare, curentul nostru definește un grup cu un parametru de difeomorfisme ale varietății $(2n - 1)$-dimensionale T_1M. Acest grup se numește *curentul geodezic al lui* M (corespunzător metricii riemanniene date). El poate fi descris și în modul următor : evoluția la timpul t transformă vectorul unitar $\xi \in T_1M$ aplicat în punctul x ($\xi \in T_1M_x$) în vectorul viteză unitar al geodezicei care iese din punctul x cu viteza inițială ξ, aplicat în acel punct al geodezicei care se află la distanța t de punctul x. Să observăm că pe T_1M este definit, în mod natural, un element de volum și că acest volum este conservat de curentul geodezic, așa cum rezultă din teorema lui Liouville.

Evident, nu am folosit pînă acum faptul că varietatea M este de curbură negativă. Dacă ne ocupăm acum de descrierea traiectoriilor curentului geodezic, se dovedește că negativitatea curburii varietății M își pune o amprentă puternică pe comportarea acestor traiectorii (acest lucru este legat de instabilitatea exponențială a geodezicelor lui M).

Iată cîteva din proprietățile speciale ale curenților geodezici pe varietăți de curbură negativă (pentru amănunte, vezi cartea lui D. V. Anosov citată).

1. Aproape toate orbitele sînt dense în varietatea de nivel constant al energiei (cele excepționale, care nu sînt dense, formează o mulțime de măsură nulă).

2. Distribuția uniformă : pentru aproape fiecare traiectorie timpul pe care ea îl petrece într-un domeniu arbitrar al spațiului fazelor T_1M este proporțional cu volumul domeniului.

3. Curentul g^t are proprietatea de a fi *mixing* : dacă A și B sînt două domenii din T_1M, atunci

$$\lim_{t\to\infty} \text{mes}\ (g^t(A) \cap B) = \text{mes}\ A \cdot \text{mes}\ B$$

(unde cu mes se notează volumul normat de condiția ca volumul total al lui T_1M să fie 1).

Din aceste proprietăți ale orbitelor din spațiul fazelor T_1M rezultă proprietăți similare ale geodezicelor de pe varietatea M. Fizicienii reunesc aceste proprietăți vorbind de „stochasticitate" : traiectoria se comportă asimptotic, pentru t mare, ca și cum punctul care o descrie s-ar comporta aleator. De exemplu, proprietatea de mixing arată că probabilitatea de a fi în B după ce s-a ieșit din A este proporțională, după un timp mare t, cu volumul lui B etc.

Prin urmare, *instabilitatea exponențială a geodezicelor pe o varietate de curbură negativă conduce la stochasticitatea curentului geodezic corespunzător.*

K. Alte aplicații ale instabilității exponențiale. Proprietatea de instabilitate exponențială a geodezicelor pe o varietate de curbură negativă a fost studiată, începînd cu Hadamard (și în cazul curburii constante, cu Lobacevski) de mulți autori și în special de E. Hopf. În acest domeniu, descoperirea neașteptată, produsă în anii șaizeci, a fost stabilitatea uimitoare a sistemelor cu instabilitate exponențială la perturbații ale sistemului.

Spre exemplu, să considerăm cîmpul de vectori definit de curentul geodezic pe o suprafață compactă de curbură negativă. Așa cum am văzut mai sus, orbitele acestui sistem au o structură destul de complicată : aproape fiecare orbită umple dens varietatea tridimensională de nivel constant al energiei.

Să considerăm acum un cîmp de vectori apropiat. Se dovedește că, cu toată complexitatea deosebită a tabloului orbitelor, prin trecerea la cîmpul apropiat, acest întreg tablou cu orbite dense și un număr infinit de orbite închise nu se schimbă aproape deloc. Mai precis, există un homeomorfism în vecinătatea transformării identice, care transformă orbitele curentului neperturbat (curentul geodezic) în cele ale sistemului perturbat.

Prin urmare, curentul nostru cu structură complicată are aceeași proprietate de a fi „grossier" sau „structural stabil" ca și un ciclu limită, spre exemplu, sau un focar stabil în plan. Observăm că nici centrul în plan, nici înfășurătoarea torului nu au această proprietate de stabilitate structurală : tipul topologic al tabloului orbitelor în spațiul fazelor se schimbă la o variație oricît de mică a cîmpului de vectori.

Existența unor sisteme structural stabile cu mișcări complicate în care fiecare mișcare este exponențial instabilă, reprezintă una din descoperirile fundamentale din ultima vreme ale teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare (ipoteza stabilității structurale a curenților geodezici pe varietăți de curbură negativă a fost emisă de S. Smale în 1961, demonstrația fiind dată de D. V. Anosov și publicată în 1967 ; rezultatele fundamentale privind stochastici-

tatea acestor curenţi au fost obţinute de Ia. G. Sinai şi D. V. Anosov tot în deceniul al şaselea).

Înainte se presupunea că în sistemele de ecuaţii diferenţiale „generice" sînt posibile numai cele mai simple regimuri limită stabile : puncte de echilibru şi cicluri. Dacă sistemul are o construcţie mai complicată (de exemplu, dacă este conservativ) se presupunea că printr-o perturbaţie mică a ecuaţiilor sale (de exemplu, la perturbaţii neconservative mici) mişcările complicate se „dezintegrează" în mişcări simple. Astăzi ştim că lucrurile stau altfel şi că în spaţiul funcţional al cîmpurilor de vectori există domenii întregi formate din cîmpuri de vectori cu o comportare complicată a orbitelor.

Concluziile care decurg din acest rezultat cuprind un cerc larg de fenomene în care se observă o comportare „stochastică" a unor obiecte deterministe.

Mai precis, să ne reprezentăm că în spaţiul fazelor unui anumit sistem (neconservativ) există o varietate (sau o mulţime) invariantă atractivă, pe care orbitele au proprietatea de instabilitate exponenţială. Ştim în prezent că sistemele cu această proprietate nu sînt excepţionale : la o perturbare mică a sistemului, proprietăţile indicate nu se distrug. Ce observă un experimentator care urmăreşte mişcarea unui astfel de sistem?

Tendinţa orbitelor de a se apropia de mulţimea invariantă atractivă poate fi percepută ca instaurarea unui regim limită. Mişcarea în continuare a punctului din spaţiul fazelor în jurul mulţimii atractive va genera o variaţie haotică, greu de pronosticat, a „fazelor" regimului limită, care este percepută ca o „stochasticitate" sau „turbulenţă").

Din păcate, pînă acum nu a fost întreprinsă o analiză convingătoare a exemplelor fizice cu caracterul descris, din punctul de vedere de mai sus. Spre exemplu, problema care se impune înainte de toate este aceea a instabilităţii hidrodinamice a fluidului vîscos descris de aşa-numita ecuaţie a lui Navier-Stokes.

Spaţiul de faze al acestei probleme este infinit-dimensional (el este spaţiul cîmpurilor de vectori de divergenţă nulă pe domeniul curgerii), dar acest caracter infinit dimensional al problemei nu reprezintă, după cît se pare, o obstrucţie serioasă, datorită faptului că vîscozitatea atinge armonicile înalte (vîrtejurile mici) cu atît mai rapid cu cît este mai mare numărul armonicei. Drept rezultat, orbitele din spaţiul infinit dimensional se apropie, după cîte se pare, de o varietate (sau mulţime) de dimensiune finită căreia îi aparţin regimurile limită.

La o vîscozitate mare există în spaţiul fazelor poziţii de echilibru atractive stabile („curgeri staţionare stabile"). La micşorarea vîscozităţii, o astfel de mişcare îşi pierde stabilitatea ; în acest mod poate apărea, spre exemplu, un ciclu limită în spaţiul fazelor (o „curgere periodică") sau o poziţie de echilibru stabilă de un tip nou („mişcare staţionară secundară")*). În continuare, pe măsură ce scade vîscozitatea, intră în joc un număr tot mai mare de armonice şi regimurile limită pot deveni de dimensiune din ce în ce mai mare.

Cînd vîscozitatea este mică, pare destul de plauzibilă obţinerea regimurilor limită cu traiectorii cu instabilitate exponenţială. Din păcate, pînă astăzi, calculele corespunzătoare nu au fost efectuate datorită posibilităţilor limitate ale maşinilor contemporane de calcul. Următoarea concluzie generală poate fi însă dedusă şi fără calcule : pentru apariţia fenomenelor de tipul turbulenţei nu este neapărat necesar ca să nu existe soluţii sau soluţiile să nu fie unice — este suficientă instabilitatea exponenţială care se întîlneşte chiar şi în sistemele deterministe cu un număr finit de grade de libertate.

Ca un alt exemplu de aplicare a instabilităţii exponenţiale putem să dăm demonstraţia „ipotezei ergodice" a lui Boltzmann pentru sistemul de bile rigide anunţată de Ia. G. Sinai. Această ipoteză afirmă : curentul corespunzător mişcării unui sistem de bile identice absolut elastice într-o cutie cu pereţi elastici este ergodic pe mulţimile conexe de nivel constant ale energiei. (Ergodicitatea înseamnă că aproape orice orbită petrece, în fiecare submulţime măsurabilă a mulţimii de nivel constant, un timp proporţional cu măsura respectivei submulţimi).

Ipoteza lui Boltzmann permite înlocuirea mediilor temporale cu medii pe spaţiul fazelor şi a fost considerată foarte mult timp ca indispensabilă pentru fundamentarea mecanicii statistice. În realitate, pentru trecerea statistică la limită (cînd numărul de particule tinde la infinit) ipoteza lui Boltzmann (care se referă la limita cînd timpul tinde la infinit) nu este necesară. Ipoteza lui Boltzmann a dat însă viaţă întregii analize a proprietăţilor stochastice ale sistemelor dinamice (aşa-numita teorie ergodică) şi demonstraţia ei reprezintă o probă a maturităţii acestei teorii.

---

*) Pentru amănunte privind pierderea stabilităţii vezi *Lecţii despre bifurcaţii şi familii versale,* Uspehi Matem. Nauk, 27, 5(1972), 119–184.

Instabilitatea exponențială a traiectoriilor în problema lui Boltzmann apare ca urmare a ciocnirilor dintre bile și poate fi explicată în modul următor.

Pentru simplitate, să considerăm un sistem format din două particule în plan și să înlocuim cutia pătrată cu torul plan $\{(x, y) \bmod 1\}$ cu reflectare elastică pe pereți. Atunci putem considera că una din particule este imobilă (utilizînd legea conservării impulsurilor); putem considera că cealaltă particulă este punctiformă.

Sîntem conduși în acest fel la problema model a mișcării unui punct material pe un biliard toric cu un perete circular în mijloc, de care punctul se reflectă după legea „unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie'' (fig. 235). Pentru a studia acest sistem, să considerăm încă un biliard similar, mărginit spre exterior de o curbă convexă plană (de exemplu, mișcarea unui punct în interiorul unei elipse). Mișcarea pe un astfel de biliard poate fi considerată ca un caz limită al curentului geodezic pe suprafața unui elipsoid. Trecerea la limită constă în a face să tindă la zero axa mică a elipsoidului. Drept rezultat, geodezicele trec în traiectoriile biliardului eliptic. Observăm în urma acestui proces că este normal să considerăm că elipsa are două fețe și că la fiecare reflectare geodezicele trec de pe o față a elipsei pe cealaltă.

Să ne întoarcem acum la biliardul nostru toric. Mișcarea pe el poate fi considerată ca fiind limita curentului geodezic pe o suprafață netedă. Această suprafață se obține dacă se consideră torul cu o gaură ca o suprafață cu două fețe și i se dă o anumită grosime, netezind ușor latura ascuțită. Drept rezultat se obține o suprafață cu topologia unui covrig (o sferă cu două mînere).

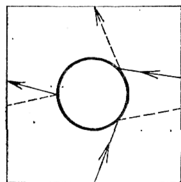


Fig. 235. Biliard toric cu perete circular reflectant.

Dacă atunci cînd elipsa se „umflă'' (explodează) într-un elipsoid se obține o suprafață de curbură pozitivă, la umflarea unui tor cu o gaură apare o suprafață cu curbură negativă (în ambele cazuri curbura este concentrată în vecinătatea frontierei, dar umflarea poate fi efectuată în așa fel încît să nu fie afectat semnul curburii).

Prin urmare, mișcarea pe un biliard toric poate fi considerată ca un caz limită al mișcării pe geodezicele unei suprafețe de curbură negativă.

Pentru a demonstra ipoteza lui Boltzmann (în cazul particular simplu considerat) este suficient acum să se verifice că analiza proprietăților stochastice ale curenților geodezici pe suprafețe de curbură negativă își păstrează valabilitatea și în cazul limită indicat.

Demonstrația amănunțită se dovedește a fi foarte dificilă; a fost publicată numai partea care se referă la sistemele de două particule (Ia. G. Sinai, *Sisteme dinamice cu reflecții elastice*, Uspehi Matem. Nauk, 25, *2* (1970), 141–192).

ANEXA 2

GEODEZICELE METRICELOR INVARIANTE LA STÎNGA PE GRUPURI LIE ŞI HIDRODINAMICA FLUIDULUI IDEAL

Mişcarea euleriană a unui corp rigid poate fi descrisă ca mişcarea pe geodezicele grupului rotaţiilor spaţiului euclidian tridimensional înzestrat cu o metrică invariantă la stînga. O parte importantă a teoriei lui Euler este legată numai de această invarianţă şi din acest motiv se extinde şi la cazul altor grupuri.

Printre exemplele acoperite de o astfel de teorie a lui Euler generalizată se numără mişcarea corpului rigid în spaţiul de dimensiune superioară şi, de un interes deosebit, hidrodinamica fluidului ideal (incompresibil şi fără vîscozitate). În ultimul caz drept grup apare grupul de difeomorfisme care conservă elementul de volum al domeniului în care are loc curgerea fluidului. În acest exemplu, principiul minimei acţiuni are următoarea semnificaţie : mişcarea fluidului este descrisă de geodezicele metricii definite de energia cinetică (după preferinţă, acest principiu poate fi luat ca definiţie matematică a fluidului ideal). Se verifică uşor că metrica indicată este invariantă (la dreapta).

Bineînţeles, extinderea rezultatelor obţinute pentru grupurile Lie de dimensiune finită la cazul infinit dimensional trebuie făcută cu precauţie. De exemplu, în hidrodinamica tridimensională nu există nici pînă astăzi teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiilor ecuaţiilor de mişcare.

Cu toate acestea, nu este mai puţin interesant să se considere concluziile la care duce transpunerea proprietăţilor geodezicelor pe grupurile Lie de dimensiune finită la cazul infinit dimensional. Aceste concluzii au caracterul unor ipoteze apriorice (identităţi, inegalităţi etc.) care trebuie să fie îndeplinite pentru orice accepţiune rezonabilă a noţiunii de soluţie. În unele cazuri se reuşeşte ca rezultatele obţinute aici să fie fundamentate riguros în mod direct, evitînd analiza infinit dimensională.

De exemplu, analogul din hidrodinamică al ecuaţiilor lui Euler ale mişcării corpului rigid îl constituie ecuaţia lui Euler de mişcare a unui fluid ideal. Teoremei lui Euler de stabilitate a rotaţiilor în jurul axelor mare şi mică a elipsoidului de inerţie îi corespunde în hidrodinamică teorema puţin generalizată a lui Rayleigh privind stabilitatea curgerilor fără puncte de inflexiune ale profilului vitezelor.

Din formulele lui Euler este uşor să fie extrasă expresia explicită pentru curbura riemanniană a grupului cu o metrică invariantă la translaţiile într-un singur sens. Aplicînd această formulă la cazul hidrodinamicii, obţinem curbura grupului difeomorfismelor care păstrează volumul.

Este interesant să observăm că pentru direcţii bidimensionale destul de bune curbura se dovedeşte a fi finită şi în multe cazuri negativă.

Curbura negativă produce instabilitatea exponenţială a geodezicelor (vezi anexa 1). În cazul considerat geodezicele sînt curgerile fluidului ideal. Prin urmare, calculînd curbura grupului de difeomorfisme putem obţine o anumită informaţie privind instabilitatea curgerilor unui fluid ideal.

Anume, curbura defineşte drumul caracteristic după care abaterea condiţiilor iniţiale creşte de e ori. Caracterul negativ al curburii conduce la imposibilitatea practică de a prezice curgerea : pe un drum mai mare numai de cîteva ori, decît cel caracteristic, abaterea condiţiilor iniţiale de cele calculate se măreşte de sute de ori.

În această anexă se studiază rezultatele calculelor legate de geodezicele grupurilor Lie cu metrică invariantă într-un singur sens. Demonstraţiile şi amănuntele ulterioare pot fi găsite în următoarele lucrări :

V. I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits,* Annales de l'Institut Fourier, XVI, *1* (1966), 319—361.

V. I. Arnold, *Asupra unei estimări apriorice în teoria stabilităţii hidrodinamice,* Izvestia vuzov, Matematika, *5* (54) (1966), 3—5.

V.I. Arnold, *Observaţii privind comportarea curgerilor unui fluid tridimensional ideal la o perturbare mică a cîmpului de viteze iniţial,* Prikladnaia matem. i meh. 36, *2* (1972), 255—262.

V.I. Arnold, *Caracterul hamiltonian al ecuaţiilor lui Euler ale dinamicii solidului rigid şi fluidului ideal,* Uspehi Matem. Nauk. XXIV, *3* (147) (1969), 225—226.

L.A. Dikii, *Observaţie privind sistemele hamiltoniene legate de grupul rotaţiilor,* Funkţionalnii analiz i evo prilojenia, 6, *4* (1972).

D. Ebin; J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Annals of Math., 92, *1* (1970), 102–163.

L.D. Fadeev, *Asupra teoriei stabilităţii curgerilor plan-paralele staţionare ale unui fluid ideal*, Problemele la limită ale fizicii matematice, vol. 5 (Zapiski Nauciniîh Seminarov LOMI, vol. 21), Leningrad, Nauka, 1971, 164–172.

O. A. Ladîjenskaia, *Asupra rezolvabilităţii locale a problemelor nestaţionare pentru fluide incompresibile ideale şi viscoase, cu viscozitate care tinde la zero*, Problemele la limită ale fizicii matematice, vol. 5 (Zapiski Nauciniîh Seminarov LOMI, vol. 21) Leningrad, Nauka, 1971, 65–78.

A. S. Mişcenko, *Integralele prime ale curenţilor geodezici pe grupuri Lie* Funkţionalnîi analiz i evo prilojenia, 4, *3* (1970), 73–78.

A. M. Obuhov, *Asupra invarianţilor integrali în sisteme de tip hidrodinamic*, Dokladî Akad. Nauk S.S.S.R., 184, *2* (1969).

A. Notaţii. Reprezentările adjunctă şi coadjunctă. Fie G un grup Lie real şi $\mathfrak{g}$ algebra Lie a lui G — spaţiul tangent la grup în elementul unitate, înzestrat cu operaţia de comutare $[,]$.

Grupul Lie G acţionează asupra sa prin translaţii la stînga şi la dreapta; pentru fiecare element $g \in G$ sînt definite difeomorfismele grupului G pe el însuşi

$$L_g : G \to G, \quad L_g h = gh; \qquad R_g : G \to G, \quad R_g h = hg.$$

Vom nota cu

$$L_{g*} : TG_h \to TG_{gh}; \qquad R_{g*} : TG_h \to TG_{hg}$$

aplicaţiile spaţiilor tangente induse de L_g, respectiv R_g, pentru orice $h \in G$.

Difeomorfismul $R_{g^{-1}}L_g$ este un automorfism interior al grupului. El lasă pe loc elementul unitate al grupului şi deci diferenţiala sa în elementul unitate este o aplicaţie liniară a algebrei $\mathfrak{g}$ (deci a spaţiului tangent la elementul unitate) în ea însăşi. Această aplicaţie se notează cu

$$\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}_g = (R_{g^{-1}} L_g)_*\Big|_e$$

şi se numeşte *reprezentarea adjunctă* (*adjoint*) a grupului G*).

---

*) De fapt, reprezentarea adjunctă este omomorfismul de grupuri $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ al lui G în grupul automorfismelor spaţiului vectorial $\mathfrak{g}$. (*N. T.*)

Se verifică uşor că Ad_g este un automorfism de algebră, deci că

$$\mathrm{Ad}_g[\xi, \eta] = [\mathrm{Ad}_g\, \xi, \mathrm{Ad}_g \eta], \qquad \forall\ \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

De asemenea, este clar că $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h$.

În continuare să considerăm pe Ad ca o aplicaţie a grupului G în spaţiul operatorilor liniari pe algebra $\mathfrak{g}$: $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_g$.

Aplicaţia Ad este diferenţiabilă. Să considerăm diferenţiala ei în elementul unitate al grupului. Această diferenţială este o aplicaţie liniară a algebrei $\mathfrak{g}$ în spaţiul operatorilor liniari pe ea. Aplicaţia astfel construită se notează cu ad, iar imaginea prin ad a unui element ξ din algebră — cu ad_ξ. Prin urmare, ad_ξ este un endomorfism al algebrei $\mathfrak{g}$ şi avem

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, \mathfrak{g}, \quad \mathrm{ad}_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{e^{t\xi}},$$

unde $e^{t\xi}$ este subgrupul cu un parametru cu vectorul tangent ξ. Din formula scrisă se deduce uşor expresia lui ad utilizînd numai elementele algebrei :

$$\mathrm{ad}_\xi\, \eta = [\xi, \eta].$$

Să considerăm acum spaţiul liniar $\mathfrak{g}^*$ dual la algebra Lie $\mathfrak{g}$. Acesta este spaţiul funcţionalelor liniare pe algebra Lie $\mathfrak{g}$. Cu alte cuvinte, $\mathfrak{g}^*$ este spaţiul cotangent la grup în elementul unitate : $\mathfrak{g}^* = T^*G_e$.

Valoarea unui element ξ al spaţiului cotangent la grup într-un punct oarecare g pe un element η al spaţiului tangent în acelaşi punct va fi notată cu paranteze rotunde :

$$(\xi, \eta) \in \mathbf{R}, \quad \xi \in T^*G_g, \quad \eta \in TG_g.$$

Translaţiile la stînga şi la dreapta induc în spaţiile cotangente operatorii duali operatorilor L_{g*} şi R_{g*}. Notăm aceşti operatori cu

$$L_g^* : T^*G_{gh} \to T^*G_h, \ R_g^* : T^*G_{hg} \to T^*G_h,$$

pentru orice $h \in G$. Aceşti operatori sînt definiţi de identităţile

$$(L_g^* \xi, \eta) \equiv (\xi, L_{g*}\, \eta), \ (R_g^*\, \xi, \ \eta) \equiv (\xi, R_{g*} \eta).$$

Operatorul dual operatorului Ad_g aplică spațiul cotangent la grup în elementele unitate în el însuși. El se notează cu

$$\mathrm{Ad}_g^*: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

și este definit de identitatea

$$(\mathrm{Ad}_g^* \ \xi, \eta) = (\xi, \mathrm{Ad}_g \eta).$$

Operatorii Ad_g^* formează, atunci cînd g parcurge grupul Lie G, o reprezentare a acestui grup ; mai precis, are loc relația

$$\mathrm{Ad}_{gh}^* = \mathrm{Ad}_h^* \ \mathrm{Ad}_g^*.$$

Această reprezentare se numește *reprezentarea coadjunctă* a grupului și joacă un rol important în toate problemele legate de metricile invariante (la stînga) pe grup.

Să considerăm diferențiala aplicației $\mathrm{Ad}^*: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g^*$, în elementul unitate al grupului. Această diferențială este o aplicație a algebrei $\mathfrak{g}$ în spațiul operatorilor liniari pe spațiul dual la algebră. Aplicația liniară astfel obținută se notează cu $\mathrm{ad}^*: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$, iar imaginea prin ad^* a unui element $\xi \in \mathfrak{g}$, cu ad_ξ^*. Prin urmare, ad_ξ^* este un operator liniar pe spațiul dual la algebră :

$$\mathrm{ad}_\xi^*: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*.$$

Se vede ușor că operatorul ad_ξ^* este dualul operatorului ad_ξ :

$$(\mathrm{ad}_\xi^* \ \eta, \xi) \equiv (\eta, \mathrm{ad}_\xi \zeta), \quad \text{pentru orice}$$

$$\eta \in \mathfrak{g}^*, \ \zeta \in \mathfrak{g}.$$

Uneori este comod să notăm acțiunea lui ad^* prin acolade :

$$\mathrm{ad}_\xi^* \eta = \{\xi, \eta\}, \text{ unde } \xi \in \mathfrak{g}, \qquad \eta \in \mathfrak{g}^*.$$

Prin urmare, acolada reprezintă o funcție biliniară din $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ legată de comutatorul din algebra Lie prin relația

$$(\{\xi, \eta\}, \zeta) = (\eta, [\xi, \zeta]).$$

Să considerăm orbitele reprezentării coadjuncte a grupului în spațiul dual la algebra Lie. Pe fiecare asemenea orbită există o structură simplectică naturală (numită forma lui Kirillov, deoarece A. A. Kirillov este primul care a utilizat-o în studiile sale privind reprezentările grupurilor Lie nilpotente). Prin urmare, orbitele reprezentării coadjuncte sînt totdeauna de dimensiune pară. Să observăm de asemenea că obținem o serie de exemple de varietăți simplectice, considerînd diverse grupuri Lie și toate orbitele posibile.

Structura simplectică pe orbitele reprezentării coadjuncte se definește prin următoarea construcție. Fie x un punct din spațiul dual la algebra Lie $\mathfrak{g}$ și ξ un vector tangent la orbita lui x $\{\mathrm{Ad}_g^* \ x \mid g \in G\}$ în x. Deoarece $\mathfrak{g}^*$ este un spațiu liniar, putem considera că ξ, care este, la drept vorbind, un vector din spațiul tangent la $\mathfrak{g}^*$ în x, aparține spațiului $\mathfrak{g}^*$.

Vectorul ξ poate fi reprezentat (în mai multe moduri) sub forma vectorului viteză a mișcării punctului x în reprezentarea coadjunctă sub acțiunea unui subgrup cu un parametru e^{ta} cu vectorul viteză $a \in \mathfrak{g}$. Cu alte cuvinte, fiecare vector ξ tangent la orbita punctului x în reprezentarea coadjunctă se exprimă printr-un vector convenabil a din algebra $\mathfrak{g}$ prin formula

$$\xi = \{a, x\}, \quad a \in \mathfrak{g}, \quad x \in \mathfrak{g}^*.$$

Sîntem acum în măsură să definim valoarea pe care o ia 2-forma simplectică Ω pe o pereche de vectori ξ_1, ξ_2, tangenți la orbita punctului x. Și anume, exprimăm vectorii ξ_1 și ξ_2 prin intermediul a două elemente oarecare a_1 și a_2 ale algebrei $\mathfrak{g}$, prin formula precedentă și apoi formăm din aceste două elemente ale algebrei și elementul x al spațiului dual algebrei scalarul

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = (x, [a_1, a_2]), \ x \in \mathfrak{g}^*, \ a_1, a_2 \in \mathfrak{g}.$$

Se verifică ușor că : 1) forma biliniară Ω este corect definită — valoarea ei nu depinde de alegerea elementelor a_i (pentru care $\{a_i, x\} = \xi_i$, $i = 1,2$) ; 2) forma Ω este antisimetrică și prin urmare definește o 2-formă Ω pe orbită ; 3) forma Ω este nedegenerată și închisă (demonstrațiile se găsesc, de exemplu, în anexa 5).

Prin urmare, forma Ω este o structură simplectică pe orbita reprezentării coadjuncte.

B. Metrici invariante la stînga. O metrică riemanniană pe grupul Lie G se numește *invariantă la stînga* dacă ea este conservată de toate translațiile la stînga L_g: deferențiala unei translații la stînga arbitrare transformă fiecare vector tangent într-un vector tangent de aceeași lungime.

Pentru o metrică riemanniană invariantă la stînga este suficient să cunoaștem valoarea sa într-un punct al grupului, de exemplu în elementul unitate: atunci în punctele rămase metrica se obține prin translatarea la stînga a produsului scalar din TG_e. Prin urmare există tot atîtea metrici invariante la stînga pe grupul G cîte structuri euclidiene există pe algebra Lie $\mathfrak{g} = TG_e$.

Orice structură euclidiană pe algebra $\mathfrak{g}$ este definită de un operator simetric pozitiv definit, care acționează din algebră în spațiul dual $\mathfrak{g}^*$. Fie deci $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ un operator liniar simetric pozitiv definit:

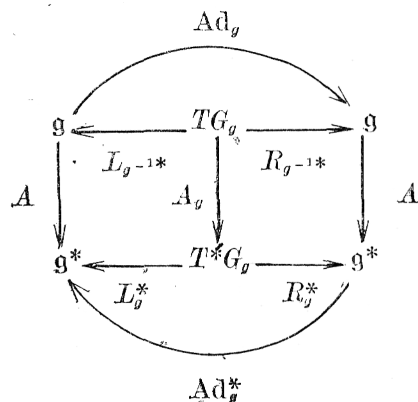
$$(A\,\xi, \eta) = (A\eta, \xi), \quad \text{pentru orice } \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

(Faptul că A este pozitiv definit nu este foarte esențial, dar în aplicațiile la mecanică forma pătratică $(A\xi, \xi)$ este pozitiv definită).

Definim operatorul simetric $A_g : TG_g \to T^*G_g$ prin intermediul translației la stînga

$$A_g \xi = L^*_{g^{-1}} A L_{g^{-1}*}\, \xi.$$

În acest mod, obținem următoarea diagramă comutativă



Vom nota cu paranteze ascuțite produsul scalar pe TG_g definit de operatorul A_g.

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = (A_g \xi, \eta) = (A_g\ \eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_g.$$

Acest produs scalar definește o metrică riemanniană invariantă la stînga pe grupul Lie G.

Produsul scalar definit de metrică în algebră îl vom nota, mai simplu, cu $\langle , \rangle$. Definim aplicația $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ prin identitatea

$$\langle [a, b], c \rangle = \langle B(c, a), b \rangle, \text{ pentru orice } b \in \mathfrak{g}.$$

Este evident că operația B este biliniară și atunci cînd se fixează primul argument, antisimetrică în al doilea:

$$\langle B(c, a), b \rangle + \langle B(c, b), a \rangle = 0.$$

C. Un exemplu. Fie $G = SO(3)$ grupul rotațiilor spațiului euclidian tridimensional, care este și spațiul configurațiilor unui solid rigid cu un punct fix. Mișcarea corpului este atunci descrisă de o curbă $g(t)$ pe grup. Algebra Lie a grupului G este spațiul tridimensional al vitezelor unghiulare al tuturor rotațiilor posibile. Comutatorul în această algebră este produsul vectorial obișnuit.

Viteza de rotație $\dot{g}$ a corpului este un vector tangent la grup în punctul g. Pentru a obține viteza unghiulară trebuie să transportăm acest vector în spațiul tangent la grup în elementul unitate, deci în algebra Lie. Drept rezultat se obțin doi vectori diferiți în algebra $\mathfrak{g}$:

$$\omega_c = L_{g^{-1}*}\, \dot{g} \in \mathfrak{g}, \qquad \omega_s = R_{g^{-1}*}\, \dot{g} \in \mathfrak{g}.$$

Acești doi vectori nu sînt altceva decît „viteza unghiulară în raport cu corpul" și „viteza unghiulară în raport cu spațiul".

Într-adevăr, elementul g al grupului G îi corespunde o poziție a corpului care se obține dintr-o poziție inițială (corespunzătoare elementului unitate al grupului și arbitrar aleasă) prin mișcarea g. Fie ω un element al algebrei.

Vom nota cu $e^{t\omega}$ grupul cu un parametru al rotațiilor cu viteza unghiulară ω; ω este vectorul tangent în elementul unitate la acest grup cu un parametru. Vom considera acum deplasarea

$$e^{\tau\omega} g, \quad \text{unde } g(t) \in G, \quad \omega \in \mathfrak{g}, \quad \tau \ll 1$$

obținută din deplasarea g printr-o rotație cu viteza unghiulară ω în timpul mic τ. Dacă vectorul $\dot{g}$ coincide cu vectorul

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} e^{\tau\omega} g,$$

atunci ω se numește *viteza unghiulară în raport cu spațiul* și se notează cu ω_s. Prin urmare, ω_s se obține din $\dot{g}$ printr-o translație la dreapta. În mod analog se demonstrează că viteza unghiulară în raport cu corpul este translatatul la stînga în algebră a vectorului $\dot{g}$.

În exemplul nostru, spațiul $\mathfrak{g}^*$ dual algebrei $\mathfrak{g}$ este spațiul momentelor cinetice.

Energia cinetică a corpului este definită de vectorul viteză unghiulară și nu depinde de poziția corpului în spațiu. Prin urmare, energia cinetică definește o metrică riemanniană *invariantă la stînga* pe grup. Operatorul simetric și pozitiv definit $A_g : TG_g \to T^*G_g$ care determină această metrică se numește *operatorul* (sau *tensorul*) *de inerție*; el este legat de energia cinetică prin formula

$$T = \frac{1}{2}\langle \dot{g}, \dot{g}\rangle_g = \frac{1}{2}\langle \omega_c, \omega_c\rangle = \frac{1}{2}(A\,\omega_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(A_g\dot{g}, \dot{g}),$$

unde $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ este valoarea lui A_g pentru $g = e$.

Imaginea vectorului $\dot{g}$ sub acțiunea operatorului de inerție A_g se numește *momentul cinetic* și se notează cu $M = A_g\dot{g}$.

Vectorul M este un element al spațiului cotangent la grupul Lie G în punctul g și el poate fi transportat în spațiul cotangent la G în elementul unitate e atît prin translație la stînga, cît și prin translație la dreapta. Obținem doi vectori

$$M_c = L_g^* M \in \mathfrak{g}^*,$$

$$M_s = R_g^* M \in \mathfrak{g}^*.$$

Acești vectori din spațiul dual al algebrei nu sînt altceva decît *momentul cinetic în raport cu corpul* (M_c) și *momentul cinetic în raport cu spațiul* (M_s). Această afirmație rezultă din expresia energiei cinetice în funcție de momentul cinetic și viteza unghiulară:

$$T = \frac{1}{2}(M_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(M, \dot{g}).$$

Conform principiului minimei acțiuni, mișcarea inerțială (în absența forțelor exterioare) a solidului rigid este o geodezică a grupului rotațiilor relativ la metrica invariantă la stînga indicată mai sus.

Vom considera în continuare geodezicele unei metrici riemanniene arbitrare pe un grup Lie arbitrar ca fiind mișcările (inerțiale) ale unui solid rigid idealizat cu spațiul configurațiilor G. Un astfel de „solid rigid cu grupul G" este definit de energia sa cinetică, deci de o formă pătratică pozitiv definită pe algebra Lie. Mai exact, vom considera geodezicele metricii invariante la stînga pe grupul Lie G definite de forma pătratică $\langle \omega, \omega\rangle$ pe algebra $\mathfrak{g}$ ca fiind mișcările unui solid rigid cu grupul G și energia cinetică $\frac{1}{2}\langle \omega, \omega\rangle$.

Fiecărei mișcări $t \mapsto g(t)$ a solidului nostru generalizat îi putem asocia următoarele patru curbe:

$$t \mapsto \omega_c(t) \in \mathfrak{g};$$

$$t \mapsto \omega_s(t) \in \mathfrak{g};$$

$$t \mapsto M_c(t) \in \mathfrak{g}^*;$$

$$t \mapsto M_s(t) \in \mathfrak{g}^*,$$

numite mișcările vectorilor viteză unghiulară și moment cinetic în raport cu corpul și respectiv, în raport cu spațiul.

Ecuațiile diferențiale pe care le satisfac aceste curbe au fost găsite, pentru solidul rigid obișnuit, de către Euler. Ele sînt însă valabile și în cazul cel mai general al unui grup Lie arbitrar G și le vom numi ecuațiile lui Euler pentru solidul rigid generalizat.

O b s e r v a ț i e. În teoria obișnuită a solidului rigid se identifică șase spații de dimensiune trei diferite: $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^{3*}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$, TG_g, T^*G_g. Coincidența dintre dimensiunea spațiului $\mathbf{R}^3$ în care se mișcă corpul și dimensiunea algebrei Lie $\mathfrak{g}$ a grupului său de rotații este o situație particulară legată de tridimensionalitatea spațiului: în cazul n-dimensional, $\mathfrak{g}$ este de dimensiune $n(n-1)/2$.

Identificarea algebrei Lie $\mathfrak{g}$ cu spațiul ei dual $\mathfrak{g}^*$ are o fundamentare mai profundă. Anume, pe grupul rotațiilor există (și este unică pînă la un factor constant) o metrică riemanniană *biinvariantă* (invariantă atît la stînga, cît și la dreapta). Această metrică defi-

nește odată pentru totdeauna un izomorfism al spațiilor liniare $\mathfrak{g}$ și $\mathfrak{g}^*$ (și al spațiilor TG_g și T^*G_g). Existența acestei metrici permite deci să se considere vectorii viteză unghiulară și moment cinetic ca fiind elemente ale unui același spațiu euclidian. Ca rezultat al acestei identificări, operația $\{,\}$ se transformă în comutatorul algebrei, luat cu semnul minus.

Metrica riemanniană biinvariantă există pe orice grup Lie compact și deci în studierea mișcării solidelor rigide cu grupuri compacte putem identifica spațiile de viteze unghiulare și cele de momente cinetice. Nu vom face însă această identificare, avînd în vedere în mod special aplicațiile la cazul necompact (și chiar infinit dimensional) al grupurilor de difeomorfisme.

D. Ecuațiile lui Euler. Rezultatele lui Euler (obținute de acesta în cazul particular $G = SO(3)$) pot fi enunțate sub forma următoarelor teoreme privind mișcarea vectorilor viteză unghiulară și moment cinetic ale corpurilor generalizate cu grupul G.

Teorema 1. *Vectorul moment cinetic în raport cu spațiul se conservă în timpul mișcării* :

$$\frac{\mathrm{d}M_s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Teorema 2. *Vectorul moment cinetic în raport cu corpul satisface ecuația lui Euler* :

$$\frac{\mathrm{d}M_c}{\mathrm{d}t} = \{\omega_c, M_c\}.$$

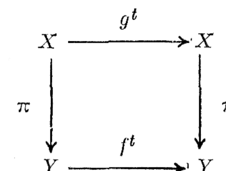
În cazul solidului rigid generalizat, aceste teoreme se demonstrează la fel ca pentru cazul obișnuit.

O b s e r v a ț i a 1. Vectorul vitezei unghiulare în raport cu corpul se exprimă liniar prin vectorul momentului cinetic în raport cu corpul, cu ajutorul operatorului invers operatorului de inerție :

$\omega_c = A^{-1} M_c$. Prin urmare, ecuația lui Euler poate fi considerată ca ecuație în care apare numai vectorul moment cinetic în raport cu corpul ; membrul său drept este pătratic în raport cu M_c.

Putem exprima acest rezultat și în forma următoare. Să considerăm curentul hamiltonian corespunzător solidului rigid considerat. (Spațiul de faze T^*G al acestuia este de dimensiune de două ori mai mare ca dimensiunea n a grupului sau a spațiului momentelor $\mathfrak{g}^*$). În acest caz acest curent pe varietatea $2n$-dimensională T^*G se factorizează la curentul definit de ecuația lui Euler pe spațiul liniar de dimensiune n $\mathfrak{g}^*$.

Fie g^t un curent pe varietatea X și f^t un curent pe varietatea Y. Curentul f^t se numește *factorizare* a curentului g^t dacă există o aplicație netedă π a varietății X pe varietatea Y prin care mișcările lui g^t trec în mișcările lui f^t, astfel încît diagrama



să fie comutativă pentru orice $t \in \mathbf{R}$: $\pi \circ g^t = f^t \circ \pi$. În cazul nostru $X = T^*G$ este spațiul fazelor solidului rigid, $Y = \mathfrak{g}^*$ este spațiul momentelor cinetice, iar proiecția $\pi : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ este definită de translațiile la stînga ($\pi(\alpha) = L_g^*\alpha$, pentru orice $\alpha \in T^*G_g$). g^t este curentul hamiltonian în spațiul fazelor de dimensiune $2n$, T^*G_g, iar f^t este curentul definit de ecuația lui Euler în spațiul de dimensiune n al momentelor $\mathfrak{g}^*$

Cu alte cuvinte, mișcarea vectorului momentului cinetic în raport cu corpul depinde numai de poziția inițială a acestor vectori și nu depinde de poziția corpului în spațiu.

O b s e r v a ț i a 2. Legea de conservare a vectorului moment cinetic în raport cu spațiul se mai poate exprima și astfel : fiecare componentă a acestui vector într-un sistem de coordonate arbitrar pe $\mathfrak{g}^*$ se conservă. În particular, fiecărui element al algebrei Lie $\mathfrak{g}$ îi corespunde o funcție liniară pe spațiul $\mathfrak{g}^*$ și deci o integrală primă. După cum se verifică ușor, parantezele lui Poisson ale integralelor prime date de funcțiile pe $\mathfrak{g}^*$ sînt și ele funcții pe $\mathfrak{g}^*$. În acest mod, obținem o extensie (infinit dimensională) a algebrei Lie $\mathfrak{g}$, formată din toate funcțiile definite pe $\mathfrak{g}^*$. Algebra Lie $\mathfrak{g}$ se scufundă în această algebră ca algebra Lie a funcțiilor liniare pe $\mathfrak{g}^*$. Evident, dintre aceste integrale prime ale curentului hamiltonian pe spațiul de faze $2n$-dimensional sînt funcțional independente numai n. De exemplu, putem lua drept n integrale prime independente n funcții liniare pe $\mathfrak{g}^*$ care formează o bază în $\mathfrak{g}$.

Avînd mereu în vedere aplicațiile infinit dimensionale, am vrea să formulăm în mod invariant afirmația privind integralele prime, eliminînd coordonatele. Acest lucru se poate face, reformulînd teorema 1 în modul următor :

Teorema 3. *Orbitele reprezentării coadjuncte ale grupului în spaţiul dual algebrei Lie sînt varietăţi invariante pentru curentul definit pe acest spaţiu de ecuaţia lui Euler.*

D e m o n s t r a ţ i e . $M_c(t)$ se obţine din $M_s(t)$ prin aplicarea reprezentării coadjuncte, iar $M_s(t)$ stă pe loc, c.c.t.d.

E x e m p l u . În cazul solidului rigid obişnuit, orbitele reprezentării coadjuncte în spaţiul momentelor sînt sferele $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const}$. În acest caz, teorema 3 se transformă în legea conservării pătratului momentului cinetic. Conţinutul ei este următorul : dacă punctul iniţial M_c este conţinut într-o orbită oarecare (deci, în cazul nostru, într-o sferă $M = \text{const}$) atunci şi toate punctele traiectoriei acestui punct sub acţiunea curentului definit de ecuaţia lui Euler sînt conţinute în aceeaşi orbită.

Să ne întoarcem la cazul general al unui grup arbitrar G şi să ne reamintim că orbitele reprezentării coadjuncte au o structură simplectică naturală (punctul A). Energia cinetică a corpului poate fi exprimată prin momentul cinetic în raport cu corpul. Drept rezultat obţinem o formă pătratică pe spaţiul momentelor :

$$T = \frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c).$$

Să fixăm o orbită oarecare V a reprezentării coadjuncte şi să considerăm energia cinetică ca funcţie pe această orbită :

$$H : V \to \mathbf{R}, \quad H(M_c) = \frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c).$$

Teorema 4. *Pe fiecare orbită V a reprezentării coadjuncte, ecuaţia lui Euler este hamiltoniană, cu funcţia lui Hamilton H.*

D e m o n s t r a ţ i e. Fiecare vector $\xi \in TV_M$ tangent la V în punctul $M \in V$ este de forma $\xi = \{f, M\}$, unde $f \in \mathfrak{g}$. În particular, cîmpul de vectori care apare în membrul drept al ecuaţiei lui Euler poate fi scris sub forma $X(M) = \left\{ \mathrm{d}T\Big|_M, M \right\}$ (aici diferenţiala funcţiei T în punctul M al spaţiului liniar $\mathfrak{g}^*$, $\mathrm{d}T\Big|_M : T\mathfrak{g}^*_M \to \mathbf{R}$ se consideră ca element al spaţiului dual la lui $\mathfrak{g}^*$, deci ca element al algebrei Lie $\mathfrak{g}$: $T\mathfrak{g}^*_M \simeq \mathfrak{g}^*$, $\mathrm{d}T\Big|_M \in \mathfrak{g}$. Din definiţia formei simplectice Ω pe V şi a operaţiei { , } (vezi punctul A) rezultă că, pentru orice vector ξ tangent la V în punctul M $\Omega(\xi, X(M)) =$

$$= \left(M, \left[f, \mathrm{d}T\Big|_M\right]\right) = \left(\{f, M\}, \mathrm{d}T\Big|_M\right) = \left(\xi, \mathrm{d}H\Big|_M\right) = \mathrm{d}H\Big|_M(\xi),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Ecuaţia lui Euler poate fi transportată din spaţiul dual algebrei Lie în algebra Lie cu ajutorul inversului operatorului de inerţie. Drept rezultat se obţine următoarea formulare a ecuaţiei lui Euler care utilizează operaţia B.

Teorema 5. *Mişcarea vectorului viteză unghiulară în raport cu corpul este determinată de poziţia iniţială a acestui vector şi nu depinde de poziţia iniţială a corpului. Vectorul viteză unghiulară în raport cu corpul satisface ecuaţia diferenţială cu membru drept pătratic*

$$\dot{\omega}_c = B(\omega_c, \omega_c).$$

Vom denumi această ecuaţie ecuaţia lui Euler pentru viteza unghiulară. Să observăm că orbitele reprezentării coadjuncte se transformă prin acţiunea operatorului $A^{-1} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ în varietăţi invariante ale ecuaţiei lui Euler pentru viteza unghiulară ; aceste varietăţi au o structură simplectică etc. Spre deosebire însă de orbitele de $\mathfrak{g}^*$, aceste varietăţi invariante nu sînt definite numai de grupul Lie, ci depind şi de alegerea solidului rigid (adică a operatorului de inerţie).

Din legea conservării energiei rezultă

Teorema 6. *Ecuaţiile lui Euler (pentru momente şi vitezele unghiulare) au o integrală pătratică a cărei valoare este egală cu energia cinetică*

$$T = \frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c) = \frac{1}{2}(A\omega_c, \omega_c).$$

E. Rotaţiile staţionare şi stabilitatea lor. Se numeşte *rotaţie staţionară* a unui solid rigid orice rotaţie în timpul căreia viteza unghiulară este constantă (atît în corp, cît şi în spaţiu ; se vede uşor că una o implică pe cealaltă). Din teoria solidului rigid obişnuit din $\mathbf{R}^3$ ştim că rotaţiile staţionare sînt rotaţiile în jurul axelor principale ale elipsoidului de inerţie. Mai jos se formulează generalizarea acestei teoreme pentru cazul solidului rigid cu un grup Lie arbitrar. Să observăm că *rotaţiile staţionare sînt geodezicele metricii invariante la stînga care sînt subgrupuri cu un parametru.*

De asemenea, să observăm că direcţiile axelor principale ale elipsoidului de inerţie pot fi definite căutînd punctele staţionare ale energiei cinetice pe sfera vectorilor moment cinetic de lungime fixată.

Teorema 7. *Momentul cinetic relativ la solid (respectiv viteza unghiulară relativ la solid) al unei rotaţii staţionare este punct critic al energiei pe orbita reprezentării coadjuncte* (respectiv pe imaginea orbitei sub acţiunea operatorului A^{-1}). *Reciproc, orice punct critic al energiei pe o orbită defineşte o rotaţie staţionară.*

Demonstraţia se face printr-un calcul direct sau printr-o trimitere la teorema 4.

Trebuie să remarcăm aici că partiţia spaţiului momentelor în orbitele reprezentării coadjuncte poate avea, în cazul unui grup arbitrar, o structură mai puţin simplă ca aceea din cazul solidului rigid obişnuit, cînd ea este partiţia spaţiului tridimensional în sferele cu centrul în **0** şi punctul **0**. În particular, orbitele pot avea dimensiuni diferite şi partiţia în orbite poate să nu fie, în vecinătatea unui punct dat, o fibrare : o astfel de singularitate există chiar şi în punctul **0** în cazul tridimensional.

Vom numi un punct M al spaţiului momentelor *punct regulat* dacă partiţia unei vecinătăţi a lui M definită de orbite este difeomorfă cu partiţia (foliaţia) spaţiului cu plane paralele (în particular toate orbitele care trec prin vecinătatea punctului M trebuie să aibă aceeaşi dimensiune). De exemplu, pentru grupul rotaţiilor spaţiului tridimensional sînt regulate toate punctele spaţiului momentelor, cu excepţia originii coordonatelor.

Teorema 8. *Fie M un punct regulat al spaţiului momentelor, care este punct critic pentru restricţia energiei la orbita reprezentării coadjuncte care îl conţine pe M. Presupunem că a doua diferenţială a energiei* d^2H *în punctul M este o formă pătratică definită* (pozitiv sau negativ). *Atunci M este o poziţie de echilibru stabilă (în sens Liapunov) a ecuaţiei lui Euler.*

Pentru demonstraţie se observă că, datorită regularităţii, pe fiecare orbită vecină cu aceea a lui M există un punct de maxim sau minim condiţionat al energiei, în vecinătatea lui M.

Teorema 9. *A doua diferenţială a energiei cinetice, restrînsă la spaţiul tangent în punctul $\omega \in \mathfrak{g}$, $\omega = A^{-1}M$ la imaginea unei orbite a reprezentării coadjuncte în algebră este dată de formula*

$$2\, d^2H\Big|_{\omega}(\xi) = \langle B(\omega, f), B(\omega, f)\rangle + \langle [f, \omega], B(\omega, f)\rangle$$

unde ξ este un vector tangent în ω la imaginea orbitei în $\mathfrak{g}$ şi se exprimă prin f după regula

$$\xi = B(\omega, f), f \in \mathfrak{g}.$$

F. Curbura riemanniană a unui grup cu metrică invariantă la stînga. Fie G un grup Lie înzestrat cu o metrică invariantă la stînga. Notăm cu $\langle , \rangle$ produsul scalar pe algebra Lie, care defineşte această metrică. Observăm că curbura riemanniană a grupului G într-un punct arbitrar al său este determinată de curbura riemanniană în elementul unitate (deoarece translaţiile la stînga sînt izometrii). Prin urmare, este suficient să calculăm curbura pentru planele de dimensiune 2 conţinute în algebra Lie.

Teorema 10. *Curbura grupului G în direcţia definită de perechea ortonormată de vectori ξ, η din algebra Lie a grupului este dată de formula*

$$K_{\xi,\eta} = \langle \delta, \delta\rangle + 2\langle \alpha, \beta\rangle - 3\langle \alpha, \alpha\rangle - 4\langle B_\xi, B_\eta\rangle,$$

unde

$$2\delta = B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi), \qquad 2B_\xi = B(\xi, \xi),$$

$$2\beta = B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi), \qquad 2B_\eta = B(\eta, \eta),$$

$$2\alpha = [\xi, \eta],$$

şi B este operaţia definită la punctul B (p. 397).

Demonstraţia este obositoare, dar se reduce la un calcul direct. Ea se bazează pe următoarea formulă pentru derivata covariantă care se verifică uşor :

$$(\nabla_\xi \eta)_e = \frac{1}{2}([\xi, \eta] - B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi)),$$

unde în stînga ξ şi η sînt cîmpuri vectoriale invariante la stînga, iar în dreapta — valorile acestor cîmpuri în elementul unitate e.

Observaţia 1. În cazul particular al unei metrici biinvariante, formula curburii capătă expresia deosebit de simplă

$$K_{\xi,\eta} = \frac{1}{4}\langle [\xi, \eta], [\xi, \eta]\rangle.$$

Observația 2. Formula pentru curbura unui grup înzestrat cu o metrică invariantă la dreapta coincide cu cea pentru cazul metricii invariante la stînga. Într-adevăr, o metrică invariantă la dreapta pe grup este o metrică invariantă la stînga pe grupul cu legea opusă de compunere ($g_1 * g_2 = g_2 g_1$). Trecerea la grupul cu operația opusă schimbă simultan semnul comutatorului și cel al operației B. Dar în fiecare termen al formulei curburii apare compunerea celor două operații care își schimbă semnul. Prin urmare, formula curburii își păstrează valabilitatea și în cazul metricii invariante la dreapta.

În ecuația lui Euler, prin trecerea la cazul unei metrici invariante la dreapta se schimbă semnul membrului drept.

G. Aplicații la grupul difeomorfismelor. Fie D un domeniu mărginit într-o varietate riemanniană. Să considerăm grupul difeomorfismelor domeniului D care conservă elementul de volum și să notăm acest grup cu SDiff D.

Algebra Lie corespunzătoare grupului SDiff D este formată din toate cîmpurile vectoriale de divergență nulă pe D care sînt tangente la frontieră (dacă aceasta nu este vidă). Definim produsul scalar a două elemente din această algebră Lie (deci a două cîmpuri de vectori) prin formula

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_D (v_1, v_2)\, dx,$$

unde (,) este produsul scalar definit de metrica pe D și dx este elementul riemannian de volum.

Să considerăm acum curgerea unui fluid omogen ideal (incompresibil, nevîscos) în domeniul D. O astfel de curgere este descrisă de o curbă $t \mapsto g_t$ pe grupul SDiff D, și anume difeomorfismul g_t este aplicația care transformă fiecare particulă a fluidului din punctul în care ea se află la momentul $t = 0$ în acel punct în care ea se găsește la momentul t.

Se dovedește că energia cinetică a fluidului în mișcare reprezintă o metrică riemanniană invariantă la dreapta pe grupul de difeomorfisme SDiff D.

Într-adevăr, să presupunem că după timpul t fluidul a realizat difeomorfismul g_t, iar viteza sa este dată, la momentul t, de cîmpul de vectori v. Atunci difeomorfismul realizat de fluid după timpul $t + \tau$ (unde τ este mic) este $e^{\tau v} g_t$ modulo o aplicație mică în raport cu τ (aici $e^{\tau v}$ este grupul cu un parametru de difeomorfisme cu cîmpul de viteze v, deci curentul definit de ecuația diferențială asociată lui v).

Prin urmare, cîmpul de viteze v se obține din vectorul $\dot{g}$ tangent la grup în punctul g prin translația la dreapta. De aici rezultă invarianța la dreapta a energiei cinetice care, prin definiție, este egală cu

$$T = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

(considerăm că densitatea fluidului este egală cu 1).

Principiul acțiunii minime (care, din punct de vedere matematic reprezintă definiția fluidului ideal) afirmă : curgerile fluidului ideal sînt geodezicele metricii invariante la dreapta pe grupul difeomorfismelor descrise mai sus.

Riguros vorbind, grupul infinitdimensional al difeomorfismelor nu este o varietate. Din acest motiv, formularea riguroasă a definiției de mai sus necesită o muncă suplimentară : trebuie alese spații funcționale adecvate, demonstrate teoreme de existență și unicitate a soluțiilor etc. Pînă acum, acest lucru s-a reușit numai în cazul în care dimensiunea domeniului D în care are loc curgerea este egală cu 2. Noi vom acționa însă ca și cum toate aceste greutăți, legate de infinitdimensionalitate, nu ar exista. Prin urmare, raționamentele ce urmează au un caracter euristic. Cu toate acestea, multe dintre rezultate pot fi riguros fundamentate, independent de teoria varietăților infinitdimensionale.

Vom arăta în cele ce urmează sub ce formă se scriu formulele generale de mai sus în cazul $G =$ SDiff D, unde D este un domeniu conex de volum finit al unei varietăți riemanniene tridimensionale. Pentru aceasta, în primul rînd trebuie să scriem explicit operația biliniară $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, definită la punctul B prin identitatea

$$\langle [a, b], c \rangle \equiv \langle B(c, a), b \rangle.$$

Se verifică ușor că în cazul tridimensional cîmpul de vectori $B(c, a)$ se exprimă prin cîmpurile de vectori a și c din algebra Lie considerată prin formula

$$B(c, a) = (\text{rot}\, c) \wedge a + \text{grad}\, \alpha,$$

unde cu $\wedge$ se notează produsul vectorial iar α este o funcție uniformă pe D, care este univoc definită (pînă la o constantă aditivă arbitrară) de condiția $B(c, a) \in \mathfrak{g}$ (deci de condițiile div $B(c, a) = 0$ și $B(c, a)$ este tangent la frontiera lui D).

Să observăm că operația B nu depinde de alegerea orientării, deoarece atît rotorul cît și produsul vectorial își schimbă semnul la schimbarea orientării.

H. Curgeri staționare. Ecuația lui Euler pentru „viteza unghiulară", are în cazul $G = S$Diff D, forma $\dot{v} = -B(v, v)$, metrica fiind invariantă la dreapta. În cazul grupului difeomorfismelor

unui domeniu tridimensional ea capătă deci forma „ecuațiilor de mișcare în forma Bernoulli"

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \wedge \text{rot } v + \text{grad } \alpha, \ \text{div } v = 0.$$

Ecuația lui Euler pentru momentul cinetic se scrie

$$\frac{\partial \text{rot } v}{\partial t} = [v, \ \text{rot } v].$$

În particular, rotorul unei curgeri staționare comută cu cîmpul vitezelor.

Această observație permite clasificarea topologică imediată a curgerilor staționare ale unui fluid ideal într-un domeniu tridimensional.

Teorema 11. *Să presupunem că domeniul D este compact și mărginit de o suprafață analitică, iar cîmpul vitezelor este analitic și nu este, în toate punctele, coliniar cu rotorul său. Atunci domeniul D este divizat printr-o submulțime analitică într-un număr finit de cutii și în fiecare din cutii mișcarea are o structură standard, și anume cutiile sînt de două tipuri: fibrate cu tori invarianți în raport cu curgerea și fibrate cu suprafețe invariante în raport cu curgerea, difeomorfe cu $\mathbf{R} \times S^2$. Pe fiecare din tori toate liniile de curent sînt sau toate închise sau toate dense, iar pe fiecare cilindru liniile de curent sînt închise.*

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe considerarea „suprafețelor lui Bernoulli" care sînt suprafețele de nivel ale funcției α. Din condiția de staționaritate ($v \wedge \text{rot } v = -\text{grad } \alpha$) rezultă că atît liniile de curent, cît și liniile rotorului sînt așezate pe suprafețele lui Bernoulli. Deoarece cîmpul vitezelor și rotorul său comută între ele, pe o suprafață Bernoulli închisă acționează grupul $\mathbf{R}^2$ și deci această suprafață este neapărat un tor (vezi demonstrația teoremei lui Liouville, §49). Considerații similare care țin seama de condiția la limită pusă pe frontiera lui D arată că suprafețele lui Bernoulli care nu sînt închise sînt reuniuni de cilindri cu linii de curent închise.

O b s e r v a ț i e. Analiticitatea cîmpului de viteze nu este foarte importantă; este important însă ca cîmpul de viteze și rotorul său să nu fie coliniare în nici un domeniu. Experimentele numerice efectuate cu ajutorul calculatorului electronic de M. Henon arată o comportare mai complicată a liniilor de curent (decît cea descrisă mai sus) pentru curgerea staționară pe torul tridimensional, dată de cîmpul de viteze

$$v_x = A \sin z + C \cos y, \quad v_y = B \sin x + A \cos z,$$
$$v_z = C \sin y + B \cos x.$$

Formulele sînt alese în așa fel încît vectorii v și rot v să fie coliniari. Judecînd după rezultatele calculelor, există linii de curent care umplu dens domenii tridimensionale.

I. Cîmpuri izorotaționale. Hidrodinamica bidimensională se deosebește puternic de hidrodinamica tridimensională. Esența acestei deosebiri constă în diferențele dintre geometriile orbitelor reprezentărilor coadjuncte ale grupurilor corespunzătoare cazurilor bidimensional și tridimensional. Și anume, în cazul bidimensional orbitele sînt, într-un anumit sens, închise și se comportă, de exemplu, ca familia suprafețelor de nivel ale unei funcții (mai exact, a mai multor funcții). În cazul tridimensional, orbitele sînt construite mai complicat și, în particular, sînt nemărginite (și pot fi chiar dense). Orbitele reprezentării coadjuncte a grupului difeomorfismelor unei varietăți riemanniene tridimensionale pot fi descrise în modul următor. Fie v_1 și v_2 două cîmpuri vectoriale ale vitezelor unui fluid incompresibil în domeniul D. Vom spune că aceste două cîmpuri v_1 și v_2 sînt izorotaționale dacă există un difeomorfism $g: D \to D$ care păstrează elementul de volum și transformă orice contur închis γ din D într-un nou contur $g(\gamma)$ astfel încît circulația lui v_1 pe conturul inițial să coincidă cu circulația lui v_2 pe conturul imagine:

$$\oint_{\gamma} v_1 = \oint_{g(\gamma)} v_2.$$

Se verifică ușor că imaginea în algebra Lie a unei orbite a reprezentării coadjuncte (prin acțiunea operatorului A^{-2} care este inversul operatorului de inerție) nu este altceva decît mulțimea tuturor cîmpurilor izorotaționale cu un cîmp dat.

În particular, teorema 3 capătă acum următoarea formă de *lege a conservării circulației.*

Teorema 12. *Circulația cîmpului vitezelor unui fluid ideal pe un contur închis în fluid nu variază atunci cînd conturul este deplasat de fluid într-o nouă poziție.*

Să observăm că dacă două cîmpuri de viteze ale unui fluid ideal tridimensional din domeniul D sînt izorotaționale atunci

difeomorfismul corespunzător transformă rotorul primului în rotorul celui de-al doilea:

$$g_* \text{rot } v_1 = \text{rot } v_2.$$

În plus, izorotaționalitatea a două cîmpuri v_1 și v_2 poate fi definită ca echivalența printr-un difeomorfism a cîmpurilor rot v_1 și rot v_2 de îndată ce *domeniul curgerii este simplu conex*. Prin urmare, în cazul tridimensional, problema determinării orbitelor reprezentării coadjuncte conține și problema clasificării cîmpurilor vectoriale de divergență nulă modulo difeomorfisme care conservă elementul de volum. Această ultimă problemă reprezintă, în cazul tridimensional, o sarcină fără speranță.

Să considerăm acum cazul bidimensional. Pentru început, vom scrie formulele fundamentale în notații comode pentru situația bidimensională.

Presupunem că domeniul de curgere D este bidimensional și orientat. Metrica și orientarea definesc pe D o structură simplectică; cîmpul vectorial al vitezelor este definit de un hamiltonian (care este, în general, multiform, dacă domeniul D nu este simplu conex). În hidrodinamică, hamiltonianul cîmpului vitezelor se numește *funcție de curent* și se notează cu Ψ. Prin urmare

$$v = I \text{ grad } \Psi,$$

unde I este operatorul de rotație cu 90° „la dreapta".

Funcția de curent a comutatorului a două cîmpuri de viteze se dovedește a fi jacobianul (sau, după dorință, paranteza lui Poisson din formalismul hamiltonian) funcțiilor de curent al cîmpurilor inițiale:

$$\Psi_{[v_1,v_2]} = J\ (\Psi_1, \Psi_2).$$

Cîmpul vectorial $B(c, a)$ este dat, în cazul bidimensional, de formula

$$B\ (c, a) = -(\Delta\Psi_c) \text{ grad } \Psi_a + \text{grad } \alpha,$$

unde Ψ_a și Ψ_c sînt funcțiile de curent ale cîmpurilor a și c, $\Delta =$ $=$ div grad — laplaceianul, iar funcția α a fost definită mai sus.

În cazul planului euclidian cu coordonatele carteziene x, y, formulele pentru funcția de curent, comutator și laplaceian capătă

formele deosebit de simple

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$\Psi_{[v_1,v_2]} = \frac{\partial \Psi_{v_1}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{v_2}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_{v_1}}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{a_2}}{\partial x},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Se numește *vîrtejul* (sau *rotorul*) unui cîmp de viteze bidimensional v funcția scalară r a cărei integrală în raport cu elementul orientat de arie dS pe orice subdomeniu orientat σ al lui D este egală cu circulația cîmpului de viteze pe frontiera lui σ:

$$\int_\sigma r \ dS = \oint_{\partial\sigma} v.$$

Se determină ușor exprimarea rotorului prin funcția de curent:

$$r = -\Delta\Psi.$$

În cazul unui domeniu bidimensional simplu conex, izorotaționalitatea cîmpurilor v_1 și v_2 revine pur și simplu la faptul că funcțiile r_1 și r_2 (rotorii acestor cîmpuri) se transformă una în alta printr-un difeomorfism care conservă aria.

În orice caz, două funcții r_1 și r_2 cu această proprietate sînt echimăsurabile: pentru ele are loc

$$\text{mes } \{x \in D : r_1(x) \leqslant c\} = \text{mes } \{x \in D : r_2(x) \leqslant c\},$$

pentru orice număr real c. Prin urmare, apartenența a două cîmpuri la imaginea în algebra Lie a unei aceleiași orbite a reprezentării coadjuncte atrage după sine egalitatea unei serii întregi de funcționale, de exemplu, a integralelor tuturor puterilor rotorului:

$$\int_D r_1^k \ dS = \int_D r_2^k \ dS.$$

În particular, ecuațiile lui Euler de mișcare ale unui fluid bidimensional ideal

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = -\operatorname{grad} p, \ \operatorname{div} v = 0,$$

au un ansamblu infinit de integrale prime. De exemplu, integrala din orice putere a rotorului cîmpului de viteze

$$I_k = \iint \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^k \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

este o astfel de integrală primă.

Tocmai existența acestor integrale prime (deci structura relativ simplă a orbitelor reprezentării coadjuncte) permite să se demonstreze teoremele de existență, unicitate etc. în hidrodinamica bidimensională a fluidului ideal (și chiar a celui vîscos); și tocmai geometria complicată a orbitelor reprezentării coadjuncte în cazul tridimensional (sau, eventual, informația insuficientă privind aceste orbite) face atît de dificilă problema fundamentării hidrodinamicii tridimensionale.

J. Stabilitatea curgerilor staționare plane. Să formulăm aici teoremele generale privind rotațiile staționare (teoremele 7, 8 și 9 de mai sus) în cazul grupului de difeomorfisme. Obținem următoarele afirmații :

1. *O curgere staționară a fluidului ideal se evidențiază printre toate curgerile izorotaționale cu ea prin faptul că este punct de extrem condiționat (sau punct critic) al energiei cinetice.*

2. *Dacă* i) *punctul critic indicat este cu adevărat un extrem — deci un minim sau maxim local,* ii) *este îndeplinită o anumită condiție de regularitate (care, generic, este îndeplinită) și* iii) *extremumul este nedegenerat (a doua diferențială este definită ca semn) atunci curgerea staționară corespunzătoare este stabilă (adică este o poziție de echilibru a ecuației lui Euler, stabilă în sens Liapunov).*

3. *Formula pentru a doua diferențială a energiei cinetice, pe spațiul tangent la varietatea cîmpurilor de vectori izorotaționale cu cel dat are, în cazul bidimensional, următoarea formă. Fie D un domeniu în planul euclidian cu coordonatele carteziene x și y. Considerăm o curgere staționară cu funcția de curent $\Psi = \Psi(x, y)$.*

Atunci

$$2\,\mathrm{d}^2 H = \iint_D \left[(\delta v)^2 + \frac{\nabla \Psi}{\Delta \nabla \Psi} (\delta r)^2 \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

unde δv este o variație a cîmpului vitezelor (deci un vector al spațiului tangent indicat mai sus) și $\delta r = \operatorname{rot}(\delta v)$.

Să observăm că pentru o curgere staționară vectorii gradient ai funcției de curent și laplaceianului acesteia sînt coliniari. Prin urmare, raportul $\nabla\Psi/\Delta\nabla\Psi$ are sens. De asemenea, în vecinătatea oricărui punct în care gradientul rotorului este nenul, funcția de curent este funcție de rotor.

Afirmațiile de mai sus conduc la concluzia : condiția ca forma pătratică $\mathrm{d}^2 H$ să fie de semn definit trebuie să fie suficientă pentru stabilitatea curgerii staționare considerate. Această concluzie nu rezultă formal din teoremele 7, 8 și 9, deoarece aplicarea tuturor formulelor noastre în cazul infinit dimensional trebuie fundamentată.

Din fericire, concluzia finală privind stabilitatea poate fi fundamentată fără a fundamenta construcțiile intermediare. În acest mod se reușește demonstrarea riguroasă a următoarelor estimări apriorice (care exprimă stabilitatea curgerii staționare în raport cu perturbații mici ale cîmpului de viteze inițial).

Teorema 13. *Să presupunem că funcția de curent $\Psi = \Psi(x, y)$ a mișcării staționare în domeniul D este funcție de rotorul cîmpului vitezelor (deci de funcția $-\Delta\Psi$) nu numai local, ci pe întreg domeniul D. Să presupunem că derivata funcției de curent în raport cu rotorul satisface inegalitatea*

$$c \leqslant \frac{\nabla \Psi}{\Delta \nabla \Psi} \leqslant C, \text{ unde } 0 < c \leqslant C < \infty.$$

Fie $\Psi + \varphi$, $\varphi = \varphi(x, y, t)$ funcția de curent a unei alte curgeri, care nu mai este neapărat staționară. Să presupunem că la momentul inițial circulația cîmpului de viteze al curgerii perturbate (cu funcția de curent $\Psi + \varphi$) pe fiecare componentă conexă a frontierei domeniului D este egală cu circulația cîmpului de viteze al curgerii inițiale (cu funcția de curent Ψ). Atunci perturbația $\varphi = \varphi(x, y, t)$ poate fi estimată la fiecare moment prin perturbația inițială $\varphi_0(x, y) = \varphi(x, y\ 0)$ după formula

$$\iint_D [(\nabla\varphi)^2 + c(\Delta\varphi)^2]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant \iint_D [(\nabla\varphi_0)^2 + C(\Delta\varphi_0)^2]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Dacă curgerea staționară satisface inegalitatea

$$c \leqslant -\frac{\nabla\Psi}{\Delta\nabla\Psi} \leqslant C,\ 0 < c < C < \infty,$$

atunci perturbația φ *poate fi estimată prin* φ_0 *după formula*

$$\iint\limits_D [c(\Delta\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2]\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_D [C(\Delta\varphi_0)^2 - (\nabla\varphi_0)^2]\, dx\, dy.$$

Din această teoremă rezultă stabilitatea curgerii staționare în cazul în care forma pătratică

$$\iint\limits_D \left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{\nabla\Psi}{\Delta\nabla\Psi}(\Delta\varphi)^2\right] dx\, dy$$

este pozitiv definită în raport cu $\nabla\varphi$ (unde φ este o funcție constantă pe fiecare componentă a frontierei lui D și pentru care fluxul gradientului $\nabla\varphi$ prin fiecare componentă a frontierei este nul) și în cazul în care forma pătratică

$$\iint\limits_D \left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\max \frac{\nabla\Psi}{\Delta\nabla\Psi}\right)(\Delta\varphi)^2\right] dx\, dy$$

este negativ definită.

Exemplul 1. Să considerăm o curgere plană paralelă în banda $Y_1 \leqslant y \leqslant Y_2$ din planul (x, y) cu profilul vitezelor $v(y)$ (deci cu cîmpul de viteze $(v(y), 0)$). O astfel de curgere este staționară pentru orice profil al vitezelor. Pentru a obține un domeniu de curgere compact, impunem cîmpurilor de viteze ale tuturor curgerilor considerate condiția de periodicitate în coordonata x cu perioada X.

Condiția din teorema 13 este îndeplinită dacă profilul vitezelor nu are puncte de inflexiune (deci dacă $d^2v/dy^2 = 0$). Ajungem la concluzia că *curgerile plane paralele ale unui fluid ideal ale căror profile de viteze nu au puncte de inflexiune sînt stabile.*

În problema liniarizată, afirmația analoagă se numește *teorema lui Rayleigh.*

Subliniem că în teorema 13 este vorba nu de stabilitatea „în aproximația liniară" ci de stabilitatea reală riguroasă în sens Liapunov (deci în raport cu perturbații finite, în problema neliniară). Diferența dintre aceste două tipuri de stabilitate este esențială în cazul considerat, deoarece problema noastră are un caracter hamiltonian (vezi teorema 4).

În sistemele hamiltoniene nu poate apărea stabilitatea asimptotică și deci stabilitatea în aproximație liniară are totdeauna un caracter neutru și este insuficientă pentru a trage concluzii cu privire la stabilitatea poziției de echilibru a problemei neliniare.

Exemplul 2. Să considerăm curgerea plană paralelă pe torul

$$\{(x, y),\ x \bmod X,\ y \bmod 2\pi\},$$

cu cîmpul de viteze $v = (\sin y, 0)$, paralel cu axa x. Acest cîmp este definit de funcția de curent $\Psi = -\cos y$ și are rotorul $r = \cos y$. Profilul vitezelor are două puncte de inflexiune, dar funcția de curent se exprimă prin rotor. Raportul $\nabla\Psi/\Delta\nabla\Psi$ este egal cu -1. Aplicînd teorema 13, ne convingem de stabilitatea mișcării noastre staționare în cazul în care

$$\int_0^X\int_0^{2\pi} (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy \geqslant \int_0^X\int_0^{2\pi} (\nabla\varphi)^2\, dx\, dy$$

pentru orice funcție φ de perioadă X în variabila x și perioadă 2π în variabila y. Se verifică ușor că ultima inegalitate este satisfăcută pentru $X \leqslant 2\pi$ și nu este valabilă pentru $X > 2\pi$.

Prin urmare, din teorema 13 rezultă stabilitatea curgerii staționare sinusoidale în cazul unui tir scurt pentru care perioada (X) în direcția curgerii principale este mai mică decît lărgimea curentului (2π). Pe de altă parte, se poate verifica direct că pe un tor lung (pentru $X > 2\pi$) curgerea noastră sinusoidală este instabilă*).

În acest mod, în exemplul considerat, condiția suficientă de stabilitate din teorema 13 se dovedește a fi și necesară.

---

*) Vezi, de exemplu, articolul lui L. D. Meșalkin, Ia. G. Sinai, *Studiul stabilității curgerii staționare descrise de un sistem de ecuații ale mișcării plane a unui fluid incompresibil viscos*, Prikladnaia matem. i meh. *6* (1961), 1140—1142.

Trebuie să observăm că, în general, din faptul că forma pătratică d^2H nu are un semn definit nu rezultă încă instabilitatea curgerii corespunzătoare. În general, o poziție de echilibru a unui sistem hamiltonian poate fi stabilă chiar dacă în punctul respectiv hamiltonianul nu are un minim sau un maxim local. Cel mai simplu exemplu de acest tip îl constituie hamiltonianul $H = p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2$.

K. Curbura riemanniană a grupului difeomorfismelor. Expresia pentru curbura unui grup Lie înzestrat cu o metrică invariantă la stînga (sau dreapta) care a fost dată la punctul F are sens și pentru grupul difeomorfismelor unui domeniu riemannian D, SDiff D. Acest grup este spațiul configurațiilor unui fluid ideal care umple domeniul D. Energia cinetică a fluidului definește pe SDiff D o metrică invariantă la dreapta. Este natural ca numărul care se obține aplicînd formal formula pentru curbura unui grup Lie acestui grup infinitdimensional să fie numit curbura grupului SDiff D.

Calculul curburii grupului difeomorfismelor a fost efectuat pînă la capăt numai în cazul curgerilor pe un tor bidimensional cu metrica euclidiană. Un astfel de tor se obține din planul euclidian $\mathbf{R}^2$ prin identificarea punctelor care diferă prin elementele unei anumite rețele Γ (un subgrup discret al planului). Un exemplu de altfel de rețea este mulțimea $\mathbf{Z}^2$ a punctelor cu coordonate întregi. În cazul general al unei rețele oarecare Γ, pătratul care stă la baza rețelei $\mathbf{Z}^2$ se poate înlocui cu orice paralelogram.

Să considerăm algebra Lie formată de cîmpurile de vectori de divergență nulă peste tot care au o funcție de curent uniformă. Grupul corespunzător S_0Diff T^2 este format din difeomorfismele torului care conservă aria și lasă pe loc centrul de greutate al torului. El este scufundat în grupul SDiff T^2 al tuturor difeomorfismelor lui T^2 care conservă aria ca o subvarietate total geodezică (deci ca o subvarietate care are proprietatea că orice geodezică a sa este geodezică și în varietatea ambiantă).

Demonstrația se face în modul următor: dacă în momentul inițial cîmpul de viteze are o funcție de curent uniformă, atunci la orice moment funcția de curent este uniformă; această afirmație rezultă din legea conservării impulsului.

Vom studia curburile grupului S_0Diff T^2 în toate direcțiile bidimensionale care trec prin elementul unitate al grupului (subvarietatea S_0Diff T^2 fiind complet geodezică, curbura grupului SDiff T^2 în toate aceste direcții bidimensionale coincide cu aceea a lui S_0Diff T^2).

Alegem în planul $\mathbf{R}^2$ o orientare. Atunci elementele algebrei Lie a grupului S_0Diff T^2 pot fi considerate ca funcții reale defi-

nite pe tor care au valoarea medie zero (un cîmp cu divergența nulă se obține dintr-o astfel de funcție luată ca funcție de curent). Prin urmare, o direcție bidimensională în spațiul tangent la grupul S_0Diff T^2 este definită de o pereche de funcții pe tor, de valoare medie nulă.

Vom da astfel de funcție prin intermediul coeficienților ei Fourier. Este comod să efectuăm toate calculele cu serii Fourier în domeniul complex. Să notăm cu e_k (unde k este un punct, numit vector de undă, din planul nostru euclidian $\mathbf{R}^2$) funcția a cărei valoare în punctul $x \in \mathbf{R}^2$ este $e^{i(k,x)}$. O astfel de funcție definește o funcție pe tor dacă ea este Γ — periodică, deci dacă prin adăugarea la argumentul x a unui element din rețeaua Γ nu se schimbă valoarea funcției.

Cu alte cuvinte, produsul scalar (k,x) trebuie să fie un multiplu de 2π, pentru orice $x \in \Gamma$. Mulțimea tuturor vectorilor k cu această proprietate formează o rețea Γ^* în planul $\mathbf{R}^2$. Funcțiile e_k cu $k \in \Gamma^*$ formează un sistem complet în spațiul funcțiilor complexe pe tor.

Vom complexifica algebra Lie, produsul sclar $\langle , \rangle$, comutatorul $[,]$ și operația B în algebră și apoi conexiunea riemanniană și tensorul de curbură Ω, astfel încît toate aceste funcții să devină funcții (multi)liniare pe spațiul liniar complex care reprezintă algebra Lie complexificată. Funcțiile e_k ($k \in \Gamma^*$, $k \neq 0$) formează o bază în acest spațiu liniar.

Teorema 14. *Formulele explicite pentru produsul scalar, comutator, operația B, conexiunea și curbură a metricii invariante la dreapta pe grupul* S_0 Diff T^2 *au următoarele forme:*

$$\langle e_k, e_l \rangle = 0 \text{ pentru } k + l \neq 0;$$

$$\langle e_k, e_{-k} \rangle = k^2 S;$$

$$[e_k, e_l] = (k \wedge l)\, e_{k+l};$$

$$B(e_k, e_l) = b_{k,l}\, e_{k+l}, \ \textit{unde}\ b_{k,l} = (k \wedge l) \frac{k^2}{(k+l)^2};$$

$$\nabla_{e_k} e_l = d_{l,k+l}\, e_{k+l}, \ \textit{unde}$$

$$d_{u,v} = \frac{(v \wedge u)\,(u \cdot v)}{v^2};$$

$R_{klmn} = 0$ *dacă* $k + l + m + n \neq 0$;
dacă $k + k + n = 0$, atunci
$R_{klmn} = (a_{ln}\ a_{km} - a_{lm}\ a_{kn})\ S$, *unde*

$$a_{uv} = \frac{(u \wedge v)^2}{|u + v|}.$$

În aceste formule S este aria torului, iar $u \wedge v$ este aria paralelogramului generat de u și v (pentru orientarea aleasă a planului $\mathbf{R}^2$). Parantezele rotunde reprezintă produsul scalar euclidian în plan, iar cele ascuțite — produsul scalar în algebra Lie.

Demonstrația acestei teoreme se găsește în articolul din Analele Institutului Fourier.

Formulele date mai sus permit să se calculeze curbura în orice direcție bidimensională. Calculele arată că în majoritatea direcțiilor curbura este negativă, dar există și unele pentru care curbura este pozitivă. În particular, să considerăm o curgere oarecare a fluidului, deci o geodezică a grupului nostru. Conform analizei ecuației lui Jacobi, stabilitatea acestei geodezice este definită de curburile în direcțiile tuturor 2-planelor posibile care trec prin vectorul viteză al geodezicei în toate punctele ei.

Să presupunem acum că curgerea considerată este staționară. O astfel de geodezică este subgrup cu un parametru al grupului nostru. De aici rezultă că curburile în toate 2-planele care trec prin vectorul viteză al geodezicei în toate punctele ei sînt egale cu curburile în 2-planele corespunzătoare care trec prin vectorul viteză al geodezicei indicate în momentul inițial. (Pentru demonstrație, se efectuează o translație la dreapta în elementul unitate). Prin urmare, stabilitatea curgerii staționare este influențată numai de curburile în direcțiile celor 2-plane din algebra Lie care conțin vectorul algebrei Lie care este cîmpul de viteze al curgerii staționare la momentul inițial.

De exemplu, să considerăm curgerea paralelă simplă sinusoidală. Această curgere este definită de funcția de curent

$$\xi = \frac{e_k + e_{-k}}{2}$$

Să considerăm un vector real arbitrar din algebră $\eta = \sum x_l e_l$ (avem deci $x_{-l} = \bar{x}_l$), $\eta \neq \xi$. Din teorema 14 se deduce ușor

Teorema 15. *Curbura grupului* $S_0\mathrm{Diff}\ T^2$ *în toate direcțiile bidimensionale care conțin vectorul* ξ *este nepozitivă*. Mai exact

$$\langle \Omega(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle = -\frac{S}{4}\sum_l a_{k,l}^2\,|x_l + x_{l+2k}|^2.$$

Din această formulă rezultă, în particular, că

1) *curbura este nulă numai pentru acele 2-plane care sînt formate din curgeri paralele cu aceeași direcție ca și* ξ, *deci dacă* $[\xi, \eta] = 0$;

2) *curbura în secțiunile definite de funcțiile de curent* $\xi = \cos kx$, $\eta = \cos lx$ *este*

$$K = -\frac{k^2 + l^2}{4S}\sin^2\alpha\ \sin^2\beta,$$

unde S *este aria torului*, α — *unghiul dintre vectorii* k *și* l, β — *unghiul dintre vectorii* $k + l$ și $k - l$;

3) *în particular, curbura grupului difeomorfismelor torului* $\{(x,y)$, mod $2\pi\}$ *în direcția definită de cîmpurile de viteze* $(\sin y, 0)$ *și* $(0, \sin x)$ *este*

$$K = -\frac{1}{8\pi^2}.$$

L. Discuție. Este natural să ne așteptăm ca curbura grupului de difeomorfisme să fie legată de stabilitatea geodezicelor pe acest grup (deci de stabilitatea curgerilor unui fluid ideal) în același mod în care curbura unui grup Lie de dimensiune finită este legată de stabilitatea geodezicelor sale. Și anume, negativitatea curburii produce o instabilitate de tip exponențial a geodezicelor. În acest caz, drumul caracteristic (drumul mediu pe care cresc de e ori erorile din condițiile inițiale) este de ordinul mărimii $1/\sqrt{-K}$. Prin urmare, cunoașterea valorii curburii grupului de difeomorfisme primite să se evalueze perioada de timp pe care se poate prezice evoluția curgerii unui fluid ideal după cîmpul de viteze inițial aproximativ, fără ca eroarea să crească cu multe ordine.

Trebuie să subliniem că instabilitatea unei curgeri a fluidului ideal o înțelegem aici altfel decît la punctul 5 : este vorba de instabilitatea exponențială a mișcării fluidului și nu de cea a cîmpului său de viteze. Există situații în care o mișcare staționară este o

soluţie a ecuaţiei Euler stabilă şi cu toate acestea mişcarea fluidului este exponenţial instabilă. Cauza este următoarea : o variaţie mică a cîmpului vitezelor fluidului poate produce o schimbare a mişcării fluidului care creşte exponenţial. Într-o astfel de situaţie (stabilitatea soluţiei ecuaţiei lui Euler şi curbura negativă a grupului) se poate pronostica cîmpul de viteze dar este imposibilă pronosticarea mişcării maselor de fluid fără o foarte mare pierdere a exactităţii.

Formulele pentru curbură scrise mai sus pot fi utilizate chiar şi pentru o evaluare grosieră a intervalului de timp peste care nu se poate face o prognoză dinamic îndelungată a vremii de îndată ce sîntem de acord cu nişte ipoteze simplificatoare. Aceste ipoteze simplificatoare sînt următoarele :

1. Pămîntul are forma unui tor care se obţine din planul euclidian $\mathbf{R}^2$ prin 2 factorizarea în raport cu reţeaua pătrată $\mathbf{Z}^2$;

2. Atmosfera este un fluid bidimensional omogen, incompresibil şi nevîscos ;

3. Mişcarea atmosferei este apropiată de un „curent de tipul unui vînt (alizeu)" paralel cu ecuatorul torului şi cu un profil sinusoidal al vitezelor.

Pentru a calcula drumul caracteristic trebuie să evaluăm curburile grupului S_0 Diff T^2 în direcţiile care conţin „vîntul" ξ din teorema 15. Vom considera că $T^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$, $k = (0,1)$. Cu alte cuvinte, considerăm curgerile 2π—periodice în planul (x,y) care sînt apropiate de mişcarea staţionară paralelă cu axa x şi profilul sinusoidal al vitezelor

$$v = (\sin\ y,\ 0).$$

Din formulele teoremei 15 rezultă uşor că curbura grupului S_0Diff T^2 în planele care conţin vîntul variază în limitele

$$-\frac{2}{S} < K < 0, \text{ unde } S = 4\pi^2 \text{ este aria torului.}$$

Aici marginea inferioară s-a obţinut printr-o evaluare destul de grosieră. Direcţia bidimensională cu curbura $K = -1/2S$ există în mod evident şi există multe alte direcţii cu curburi de aproximativ aceeaşi mărime. Pentru a evalua orientativ drumul caracteristic, luăm drept valoare orientativă a „curburii mediate" pe $K_0 = -1/2S$.

Dacă sîntem de acord că plecăm de la o astfel de valoare a curburii K_0, se obţine drumul caracteristic

$$s = (\sqrt{K_0}) = 2S.$$

Viteza mişcării pe grup corespunzătoare curgerii noastre de tip alizeu este egală cu $\sqrt{S/2}$ (valoarea medie pătratică al sinusului fiind egală cu $1/2$). Prin urmare, timpul în care curgerea noastră parcurge drumul caracteristic este egal cu 2. Cele mai rapide particule ale fluidului reuşesc să parcurgă în acest interval de timp distanţa 2, deci $1/\pi$ dintr-o rotaţie completă în jurul torului.

Prin urmare, dacă se pleacă de la valoarea noastră orientativă a curburii mediate, atunci erorile cresc de $2^\pi \approx 20$ de ori în timpul unei rotaţii complete în jurul torului a celei mai rapide particule. Luînd pentru viteza maximală a curentului — vînt valoarea de 100 km/oră, obţinem pentru timpul de rotaţie 400 de ore, deci mai puţin de trei săptămîni.

Prin urmare, dacă în momentul iniţial starea vremii era cunoscută cu eroarea mică ε, atunci ordinul de mărime al erorii prognozei peste n luni este

$$10^{kn}\varepsilon, \text{ unde } k \approx \frac{30 \cdot 24}{400}\ \pi\ \lg_{10}\ \mathrm{e} \approx 2{,}5.$$

De exemplu, pentru a calcula caracteristicile vremii cu două luni înainte, ar trebui să avem la dispoziţie cinci cifre de precizie. Practic aceasta înseamnă că este imposibil să se pronosticheze pe o asemenea perioadă.

Se înţelege că evaluarea dată aici este foarte neriguroasă, iar modelul de la care am plecat — foarte simplificat. Alegerea valorii „curburii mediate" ar trebui şi ea fundamentată.

ANEXA 3

STRUCTURA SIMPLECTICĂ PE VARIETĂȚILE ALGEBRICE

Varietățile simplectice ale mecanicii clasice care apar cu frecvența cea mai mare sînt spațiile de faze ale sistemelor mecanice lagrangeene, deci fibrările cotangente ale spațiilor de configurații.

Geometria algebrică furnizează o cu totul altă serie de exemple de varietăți simplectice.

De exemplu, orice varietate algebrică complexă netedă (definită de un sistem de ecuații polinomiale în spațiul proiectiv complex) este înzestrată cu o structură simplectică naturală.

Construcția structurii simplectice pe o varietate algebrică se bazează pe proprietatea spațiului proiectiv complex de a avea o structură simplectică remarcabilă, și anume partea imaginară a structurii sale hermitiene.

A. Structura hermitiană a spațiului proiectiv complex. Reamintesc că spațiul proiectiv complex de dimensiune n, $\mathbf{C}P^n$, este varietatea tuturor dreptelor complexe x care trec prin punctul O în spațiul liniar complex de dimensiune $n+1$, $\mathbf{C}^{n+1}$. Pentru a construi pe spațiul proiectiv complex $\mathbf{C}P^n$ o structură simplectică, vom utiliza structura hermitiană a spațiului liniar corespunzător $\mathbf{C}^{n+1}$.

Reamintim că se numește *produs scalar hermitian* (sau *structură hermitiană*) în spațiul liniar complex o funcție complexă de perechile de vectori care are următoarele proprietăți : 1) este liniară în primul argument și antiliniară în al doilea ; 2) își schimbă valoarea în cea complexă conjugată atunci cînd argumentele își permută locurile și 3) se transformă într-o formă pătratică reală pozitiv definită cînd argumentele coincid :

$$\langle \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta \rangle = \lambda_1 \langle \xi_1, \eta \rangle + \lambda_2 \langle \xi_2, \eta \rangle ;$$

$$\langle \xi, \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \xi, \eta_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle \xi, \eta_2 \rangle ;$$

$$\langle \eta, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle} ;$$

$$\langle \xi, \xi \rangle > 0, \quad \forall\, \xi \neq 0.$$

Un exemplu de structură hermitiană îl reprezintă produsul scalar complex

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi_k \overline{\eta_k}, \tag{1}$$

unde ξ_k și η_k sînt componentele vectorilor ξ și η într-o bază aleasă.

Pentru orice produs scalar hermitian există o bază în care el capătă forma (1) ; o astfel de bază se numește hermitian-ortogonală.

Părțile reală și imaginară ale unui produs scalar hermitian sînt forme biliniare reale. Prima dintre ele este simetrică, iar a doua — antisimetrică și ambele sînt nedegenerate :

$$\langle \xi, \eta \rangle = (\xi, \eta) + i\, [\xi, \eta], \; (\xi, \eta) = (\eta, \xi) ;$$

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi].$$

Forma pătratică (ξ, ξ) este pozitiv definită.

Prin urmare, o structură hermitiană $\langle\, , \rangle$ pe spațiul liniar complex definește pe acesta o structură euclidiană $(\, ,)$ și o structură simplectică $[\ , \ ]$. Aceste două structuri noi sînt legate de structura complexă prin relația

$$[\xi, \eta] = (\xi, i\, \eta).$$

Să definim acum pe spațiul proiectiv complex o metrică riemanniană. În acest scop, să considerăm în spațiul liniar corespunzător $\mathbf{C}^{n+1}$ sfera unitate

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} : \langle z, z \rangle = 1\}.$$

Această sferă are o structură riemanniană indusă de structura riemanniană (euclidiană) a lui $\mathbf{C}^{n+1}$. Fiecare dreaptă complexă intersectează sfera S^{2n-1} după un cerc mare.

D e f i n i ț i e . *Distanța* dintre două puncte ale spațiului proiectiv complex se definește ca fiind *distanța dintre cele două cercuri corespunzătoare de pe sfera unitate.*

Să observăm că aceste două cercuri sînt paralele în următorul sens : distanța de la orice punct al unuia din cercuri la celălalt cerc este independentă de alegerea punctului (demonstrația : transformarea dată de înmulțirea lui $z \in S^{2n-1}$ cu $e^{i\varphi}$ păstrează metrica sferei). Această proprietate permite scrierea imediată a formulei explicite (2) a metricii riemanniene pe spațiul proiectiv complex care definește distanța definită de mai sus.

Într-adevăr, să notăm cu p aplicația

$$p : \mathbf{C}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbf{C}P^n$$

care asociază fiecărui punct $z \neq 0$ al spațiului liniar $\mathbf{C}^{n+1}$ dreapta complexă care trece prin punctele O și z.

Fiecare vector ζ tangent la $\mathbf{C}P^n$ în punctul $p(z)$ poate fi reprezentat (în mai multe moduri) ca imaginea unui vector tangent la $\mathbf{C}^{n+1}$ în punctul z;

$$\zeta = p_*\xi \quad , \quad \xi \in T\mathbf{C}_z^{n+1}.$$

Teoremă. *În metrica riemanniană definită mai sus, pătratul lungimii unui vector ζ este dat de formula*

$$ds^2(\zeta) = \frac{\langle \xi, \xi\rangle \langle z, z\rangle - \langle \xi, z\rangle \langle z, \xi\rangle}{\langle z, z\rangle^2} \tag{2}$$

Demonstrație. Pentru început, să presupunem că z este un punct al sferei unitate S^{2n-1}. Alegem un vector ξ ca mai sus și îl descompunem în două componente: una situată pe dreapta complexă definită de vectorul z, iar cealaltă în direcția hermitian-ortogonală. Să observăm că ortogonalitatea hermitiană pe vectorul z este echivalentă cu ortogonalitatea euclidiană pe vectorii z și iz. Vectorul z este vectorul normalei euclidiene la sfera S^{2n-1} în punctul z. Vectorul iz este vectorul tangent la cercul după care dreapta complexă care trece prin z intersectează sfera. Prin urmare, componenta η a vectorului ξ, hermitian-ortogonală la vectorul z este tangentă la sfera S^{2n-1} și este euclidian-ortogonală la cercul după care dreapta $p(z)$ intersectează sfera.

Conform definiției metricii pe $\mathbf{C}P^n$, pătratul lungimii riemanniene a vectorului ζ este egal cu pătratul lungimii euclidiene a componentei η a vectorului ξ care este hermitian-ortogonală la z.

Să calculăm această componentă η. Pentru aceasta, scriem descompunerea noastră sub forma

$$\xi = cz + \eta, \text{ unde } \langle \eta, z\rangle = 0.$$

Făcînd produsul scalar hermitian cu z, obținem

$$\langle \xi, z\rangle = c\langle z, z\rangle,$$

deci

$$\eta = \frac{\langle z, z\rangle \xi - \langle \xi, z\rangle z}{\langle z, z\rangle}$$

Calculînd pătratul hermitian al vectorului η, obținem

$$\langle \eta, \eta\rangle = \frac{\langle z, z\rangle \langle \xi, \xi\rangle - \langle \xi, z\rangle \langle z, \xi\rangle}{\langle z, z\rangle^2}$$

și am demonstrat formula (2) pentru punctele z ale sferei unitate S^{2n-1}. Cazul general se reduce la cel considerat prin utilizarea omotetiei $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Teorema este astfel demonstrată.

Să observăm că prin construcția efectuată putem defini pe spațiul tangent la $\mathbf{C}P^n$ nu numai structura euclidiană (2), ci și o structură hermitiană.

Într-adevăr, să considerăm complementul hermitian-ortogonal H_z la direcția vectorului z în spațiul $T\mathbf{C}_z^{n+1}$, unde $z \in S^{2n-1}$. Aplicația $p_*\big|_{H_z} : H_z \to T(\mathbf{C}P^n)\ p(z)$ este (așa cum am arătat mai sus) un izomorfism al spațiului H_z pe spațiul tangent la $\mathbf{C}P^n$ în $p(z)$ și acest izomorfism transportă pe $T(\mathbf{C}P^n\ p(z)$ structura hermitiană de pe H_z.

Este evident că forma pătratică definită de această structură hermitiană indusă este dată de formula (2). Putem deci scrie, fără a efectua noi calcule, formula pentru produsul scalar hermitian pe spațiul tangent la $\mathbf{C}P^n$:

$$\langle \zeta_1, \zeta_2\rangle = \frac{\langle \xi_1, \xi_2\rangle \langle z, z\rangle - \langle \xi_1, z\rangle \langle z, \xi_2\rangle}{\langle z, z\rangle^2} \tag{3}$$

unde $\zeta_1, \zeta_2 \in T(\mathbf{C}P^n)\ p(z)$ și $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbf{C}_z^{n+1}$ sînt vectori arbitrari care satisfac $p_*(\xi_k) = \zeta_k$, $k = 1,2$. Subliniem că în formula 3) punctul z nu este neapărat pe sfera unitate.

Structurile euclidiene (2) și hermitiene (3) construite pe spațiile tangente la $\mathbf{C}P^n$ nu sînt invariante în raport cu toate transformările proiective ale varietății $\mathbf{C}P^n$, ci numai în raport cu cele induse de transformările unitare (care păstrează structura hermitiană) liniare ale spațiului liniar complex $\mathbf{C}^{n+1}$.

B. Structura simplectică a spațiului proiectiv complex. Să considerăm partea imaginară a formei hermitiene (3), luată cu coeficientul $-1/\pi$ (în problema 1, p. 427 se va explica de ce se alege acest coeficient)

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\ \langle \zeta_1, \zeta_2\rangle \tag{4}$$

La fel ca partea imaginară a oricărei forme hermitiene, forma biliniară reală Ω, definită pe spațiile tangente la spațiul proiectiv este antisimetrică și nedegenerată.

Teoremă. *2-forma diferențială Ω definește pe spațiul proiectiv complex o structură simplectică.*

D e m o n s t r a ț i e. Mai trebuie să demonstrăm numai faptul că forma Ω este închisă.

Să considerăm diferențiala exterioară $d\Omega$ a formei Ω. $d\Omega$ este o 3-formă diferențială pe varietatea CP^n, invariantă în raport cu transformările lui CP^n induse de transformările unitare ale spațiului C^{n+1}. Din această invarianță rezultă că $d\Omega = 0$.

Într-adevăr, să considerăm un punct $z \in CP^n$ și în spațiul tangent al CP^n în z, o C-bază hermitian-ortonormată $e_1, \ldots, e_n$. Atunci vectorii $e_1, \ldots, e_n\ ie_1, \ldots, ie_n$ formează o R-bază euclidian-ortonormată. Arătăm că valoarea formei $d\Omega$ pe oricare trei din vectorii acestei R-baze este zero. (Presupunem că $n > 1$; pentru $n=1$ nu avem ce demonstra).

Să observăm că din orice triplet de vectori din R-baza indicată mai sus, cel puțin unul este hermitian-ortogonal la ceilalți doi. Să notăm acest vector cu e (și pe ceilalți doi cu f și g). Se poate construi cu ușurință o transformare unitare a spațiului C^{n+1} care să inducă pe CP^n o mișcare (izometrie) cu proprietatea că lasă pe loc punctul considerat z și complementul hermitian-ortogonal la e, dar schimbă direcția vectorului e (în cea opusă).

Datorită invarianței, valoarea lui $d\Omega$ pe vectorii e, f, g coincide cu valoarea lui $d\Omega$ pe vectorii $-e, f, g$, și, prin urmare, este zero. Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Există și o altă modalitate de a construi aceeași structură simplectică pe spațiul proiectiv complex. Și anume, să considerăm oscilațiile mici ale unui pendul matematic cu spațiul de configurații de dimensiune $n+1$. Utilizăm integrala primă a energiei pentru a micșora cu 1 numărul gradelor de libertate ale sistemului. Spațiul de faze redus care se obține după această operație este CP^n, iar structura simplectică pe el coincide cu structura Ω descrisă mai sus pînă la un factor constant.

Un alt mod de a construi o structură simplectică pe CP^n este de a reprezenta acest spațiu ca una din orbitele reprezentării coadjuncte ale unui grup Lie: pe fiecare asemenea orbită există totdeauna o structură simplectică standard (vezi anexa 2, punctul A). Se poate lua ca grup Lie grupul operatorilor unitari (care conservă metrica hermitiană) în spațiul liniar complex de dimensiune $n+1$. În acest caz, orbitele reprezentării coadjuncte sînt aceleași ca și cele ale reprezentării adjuncte. În reprezentarea adjunctă, operatorul de simetrie (reflectare) în raport cu un hiperplan (care schimbă semnul primei coordonate și le lasă neschimbate pe celelalte) are drept orbită pe CP^n. *Într-adevăr, operatorul de simetrie în raport cu un hiperplan este univoc determinat de dreapta complexă ortogonală hiperplanului.*

C. Structura simplectică a varietăților algebrice proiective. Vom construi acum o structură simplectică pe orice subvarietate complexă a spațiului proiectiv complex. Și anume, fie $j : M \to CP^n$ scufundarea varietății complexe M în spațiul proiectiv. Structurile riemanniană, hermitiană și simplectică pe spațiul proiectiv CP^n induc pe M structuri corespunzătoare. Spre exemplu, structura simplectică pe M este dată de formula

$$\Omega_M = j^*\Omega.$$

Teoremă. *Forma diferențială Ω_M definește pe varietatea M o structură simplectică.*

D e m o n s t r a ț i e. Faptul că 2-forma Ω_M este nedegenerată rezultă din ipoteza că M este o subvarietate complexă. Într-adevăr, forma pătratică pe TM_x

$$(\xi, \xi) = \Omega_M(\xi, i\xi)$$

este pozitiv definită (ea este indusă de metrica riemanniană a lui CP^n). Prin urmare, forma biliniară $(\xi, \eta) = \Omega_M(\xi, i\eta)$ este nedegenerată. Forma Ω fiind închisă, rezultă că și Ω_M este închisă. Teorema este deci demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Am definit atît în spațiul proiectiv complex, cît și pe subvarietățile sale complexe o structură hermitiană pe spațiile tangente, a cărei parte imaginară reprezintă structura simplectică.

O varietate complexă dotată cu o metrică hermitiană a cărei parte imaginară este o formă închisă (deci o structură simplectică) se numește *varietate kähleriană*, iar metrica sa hermitiană — *metrică kähleriană*. În geometria varietăților kähleriene s-au obținut multe rezultate importante; în particular, aceste varietăți au proprietăți topologice remarcabile (vezi, de exemplu, A. Weil, *Introduction à l'étude de variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958).

Toate varietățile simplectice cunoscute admit și o structură kähleriană. Nu este însă clar care din proprietățile topologice ale varietăților kähleriene nu depind decît de structura simplectică.

P r o b l e m a 1. Să se calculeze structura simplectică Ω în harta afină $w = z_1/z_0$ a dreptei proiective complexe CP^1.

Răspuns. $\Omega = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, unde $w = x + iy$.

Coeficientul din definiția formei Ω a fost ales astfel încît să se obțină orientarea obișnuită a dreptei complexe $dx \wedge dy$ și pentru ca integrala formei Ω pe întreaga dreaptă proiectivă să fie egală cu 1.

Problema 2. Să se demonstreze că structura simplectică Ω este dată în harta afină $w_k = z_k z_0^{-1} (k = 1, \ldots, n)$ a spațiului proiectiv $\mathbf{C}P^n = \{(t_0 : z_1 : \ldots : z_n)\}$ de formula

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} \frac{\sum\limits_{o \leqslant k \leqslant l \leqslant n} (w_k\, dw_l - w_l\, dw_k) \wedge (\bar{w}_k\, d\bar{w}_l - \bar{w}_l\, d\bar{w}_k)}{\sum\limits_{k=0}^{n} (w_k \bar{w}_k)^2}.$$

Observație. Formele diferențiale cu valori complexe pe spațiul complex (de exemplu, dw_k și $d\bar{w}_k$) se definesc ca fiind funcții liniare complexe de vectorii tangenți ; dacă $w_k = x_k + iy_k$, atunci

$$dw_k = dx_k + i\, dy_k, \qquad d\bar{w}_k = dx_k - i\, dy_k.$$

În $\mathbf{C}^n$, spațiul acestor forme este de dimensiune complexă $2n$; o $\mathbf{C}$-bază este formată, de exemplu, de cele $2n$ forme dw_k, $d\bar{w}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ sau de cele $2n$ forme dx_k, dy_k.

Produsul exterior de definește în mod obișnuit și satisface regulile obișnuite. De exemplu

$$dw \wedge d\bar{w} = (dx + i\, dy) \wedge (dx - i\, dy) = -2i\, dx \wedge dy.$$

Fie f o funcție netedă pe $\mathbf{C}^n$ (în general, cu valori complexe). Un exemplu de astfel de funcție este $|w|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \bar{w}_k$. Diferențiala funcției f este o 1-formă complexă. Prin urmare, ea se poate descompune în raport cu baza dw_k, $d\bar{w}_k$. Coeficienții acestei descompuneri se numesc derivatele „în raport cu w_k" și „în raport cu $_k\bar{w}$" :

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_k} dw_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k} dw_k.$$

În calculul derivatelor exterioare este de asemenea comod să se pună în evidență diferențiala d' în raport cu variabilele w și diferențiala d'' în raport cu variabilele $\bar{w}$, astfel încît d' = d' + d''.

De exemplu, pentru funcția f

$$d'f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_k} dw_k, \quad d''f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k} dw\bar{w}.$$

Pentru 1-forma diferențială

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k\, dw_k + \sum_{n=1}^{n} b_k\, d\bar{w}_k,$$

operatorii d' și d'' se definesc similar :

$$d'\omega = \sum_{k=1}^{n} d'a_k \wedge dw_k + \sum_{k=1}^{n} d'b_k \wedge d\bar{w}_k.$$

$$d''\omega = \sum_{k=1}^{n} d''a_k \wedge dw_k + \sum_{k=1}^{n} d''b_k \wedge d\bar{w}_k.$$

Problema 3. Să se demonstreze că structura simplectică Ω pe spațiul proiectiv $\mathbf{C}P^n$ este dată, în harta afină $w_k = z_k z_0^{-1}$, de formula

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} d'd'' \ln \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$

ANEXA 4
STRUCTURI DE CONTACT

Pe o varietate de dimensiune impară nu poate exista o structură simplectică. Analoaga structurii simplectice pentru varietățile de dimensiuni impară este o structură mai puțin simetrică, dar care are și ea o importanță destul de mare — structura de contact.

În mecanică, sursa structurilor simplectice o constituie spațiile de faze (fibrările cotangente ale varietăților de configurații) pe care există totdeauna o structură simplectică canonică. Sursa structurilor de contact o constituie varietățile de elemente de contact ale spațiilor de configurații.

Prin definiție, se numește *element de contact* într-un punct al unei varietăți netede de dimensiune n, un plan $(n-1)$-dimensional tangent la varietate în acest punct (deci un subspațiu $(n-1)$-dimensional al spațiului n-dimensional tangent în punctul dat).

Mulțimea tuturor elementelor de contact ale unei varietăți de dimensiune n, are o structură naturală de varietate netedă de dimensiune $2n-1$. Se dovedește că pe această varietate de dimensiune impară există în plus o „structură de contact" remarcabilă (vom spune mai jos ce înțelegem prin aceasta).

Varietatea elementelor de contact ale unei varietăți riemanniene n-dimensionale este strîns legată de varietatea $(2n-1)$-dimensională a vectorilor unitari tangenți la această varietate sau de varietatea $(2n$-$1)$-dimensională de nivel constant a energiei unui punct material care se mișcă inerțial pe o varietate riemanniană dată. Structurile de contact pe aceste varietăți $(2n-1)$-dimensionale sînt strîns legate de structura simplectică pe spațiul de faze $2n$-dimensional al punctului material (deci de fibrarea cotangentă a varietății riemanniene inițiale).

A. Definiția structurii de contact.

D e f i n i ț i e . Se numește *structură de contact* pe o varietate un cîmp neted de hiperplane tangente*⁾, care satisface o anumită condiție de nedegenerare; ea va fi formulată mai tîrziu. Pentru aceasta, să vedem cît de complicată poate fi structura unui astfel de cîmp de hiperplane în vecinătatea unui punct al unei varietăți de dimensiune N.

E x e m p l u . Fie $N = 2$. Atunci varietatea este o suprafață, iar cîmpul de hiperplane — un cîmp de drepte. Un astfel de cîmp este, în vecinătatea unui punct, structurat totdeauna simplu și la fel, și anume ca un cîmp al tangentelor la o familie de drepte paralele din plan. Mai exact, unul din rezultatele fundamentale ale teoriei locale a ecuațiilor diferențiale ordinare arată că este posibil să se transforme orice cîmp neted de drepte tangente la o varietate în cîmpul tangentelor la o familie de drepte paralele din spațiul euclidian, această transformare realizîndu-se printr-un difeomorfism, într-o vecinătate suficient de mică a oricărui punct al varietății.

Dacă $N > 2$, hiperplanul nu mai este o dreaptă și situația este mai complicată. De exemplu, un cîmp de plane tangente bidimensionale în spațiul euclidian tridimensional nu poate fi totdeauna transformat printr-un difeomorfism într-un cîmp de plane paralele. Dificultatea este următoarea : există cîmpuri pe plane tangente pentru care nu este posibilă determinarea unei „suprafețe integrale" — deci a unei suprafețe care să aibă un plan tangent dat în fiecare punct al ei.

Condiția de nedegenerare a cîmpului de hiperplane care apare în definiția structurii de contact constă în faptul că acest cîmp trebuie să fie, ca structură, la „depărtarea maximă" de un cîmp de plane tangente la o familie de hipersuprafețe. Pentru a măsura această depărtare și pentru a ne convinge că există cîmpuri fără hipersuprafețe integrale, trebuie să facem cîteva construcții și calcule**⁾.

B. Condiția de integrabilitate a lui Frobenius. Să considerăm un punct al unei varietăți de dimensiune N pe care se dă un cîmp

*⁾ Se numește hiperplan într-un spațiu liniar orice subspațiu a cărui dimensiune este cu 1 mai mică decît dimensiunea spațiului (deci orice mulțime de nivel 0 a unei funcționale liniare care nu este identic nulă).
Un hiperplan tangent este un hiperplan în spațiul tangent.

**⁾ Începînd cu acest loc, nu mai utilizăm prefixul „hiper". După preferință, putem să ne închipuim mereu că ne aflăm în spațiul tridimensional și că hipersuprafețele sînt suprafețe obișnuite. Cazul cu mai multe dimensiuni este analog celui tridimensional.

de $(N-1)$ — plane tangente și să încercăm că construim o suprafață care să treacă prin acest punct și să fie tangentă la cîmpul dat în fiecare punct al ei (o suprafață integrală).

În acest scop, introducem în vecinătatea punctului considerat un sistem de coordonate în așa fel încît în punctul ales, unul din planele de coordonate să fie tangent la planul cîmpului. Vom numi orizontal acest plan, iar axa de coordonate care nu este conținută în el — axa verticală.

C o n s t r u c ț i a s u p r a f e ț e i i n t e g r a l e. Suprafața integrală, atunci cînd există, este în vecinătatea originei coordonatelor (deci a punctului ales) graficul unei funcții de $N-1$ variabile. Pentru a o construi, să considerăm un drum arbitrar în planul orizontal. Atunci dreptele verticale care trec prin punctele acestui drum formează o suprafață de dimensiune 2 (un cilindru) pe care cîmpul de plane definește, prin intersecție, un cîmp de drepte tangente. Suprafața integrală căutată, dacă există, intersectează cilindrul, după o curbă integrală a acestui cîmp de drepte; ea pleacă din originea coordonatelor. Această curbă integrală există totdeauna, indiferent dacă suprafață integrală există sau nu. Prin urmare, putem construi suprafața integrală peste planul orizontal, mișcîndu-se pe curbe netede din acest plan.

Pentru a obține însă din toate aceste curbe integrale o suprafață integrală netedă, trebuie ca rezultatul construcției noastre să nu depindă de plan, ci să fie definit numai punctul final.

În particular, la parcurgerea unui drum închis din vecinătatea originei coordonatelor din planul orizontal, curba integrală de pe cilindru trebuie să se închidă.

Se pot construi cu ușurință exemple de cîmpuri de plane pentru care această închidere să nu aibă loc; rezultă că nu există suprafață integrală. Cîmpurile de plane de acest tip se numesc *neintegrabile*.

E x e m p l u d e c î m p d e p l a n e n e i n t e g r a b i l. Pentru a defini cîmpurile de plane și a măsura cantitativ abaterea de la închidere, introducem următoarele notații.

Înainte de toate, să observăm că un cîmp de (hiper)plane poate fi dat local de o 1-formă diferențială. Într-adevăr, un (hiper)plan în spațiul tangent definește o 1-formă pe acest spațiu pînă la înmulțirea cu o constantă nenulă. Alegem această constantă în așa fel încît valoarea formei pe vectorii tangenți definiți de coordonata verticală să fie 1.

Această condiție este satisfăcută într-o vecinătate a originei coordonatelor, deoarece planul asociat de cîmp acestui punct nu

conține direcția verticală. Această condiție definește univoc forma (pe cîmpul de plane).

De exemplu, un cîmp de plane în spațiul tridimensional uzual, care nu are suprafețe integrale, este cel definit de 1-forma

$$\omega = x\,dy + dz,$$

unde x și y sînt coordonate orizontale, iar z este cea verticală.

Demonstrația faptului că acest cîmp de plane este neintegrabil este dată mai jos.

C o n s t r u c ț i a 2-f o r m e i d i f e r e n ț i a l e c a r e m ă s o a r ă n e i n t e g r a b i l i t a t e a. Cu ajutorul 1-formei diferențiale care definește cîmpul putem măsura gradul de neintegrabilitate. Acesta se face cu ajutorul următoarei construcții (fig. 236).

Să considerăm o pereche de vectori aplicați în originea coordonatelor și conținuți în planul orizontal al sistemului nostru de coordonate. Construim cu ajutorul lor un paralelogram. Obținem în acest fel două drumuri care unesc originea coordonatelor cu vîrful opus al paralelogramului. Deasupra fiecăruia din aceste drumuri se poate construi o curbă integrală (din două arce) prin procedeul descris mai sus. Drept rezultat, deasupra vîrfului paralelogramului opus originei coordonatelor se obțin, în general, două

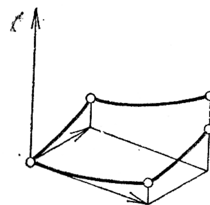


Fig. 236. Curbe integrale construite pentru un cîmp de plane neintegrabil.

puncte diferite. Diferența dintre înălțimile acestor puncte este o funcție de perechea de vectori aleasă. Această funcție este antisimetrică și se anulează dacă unul din vectori este nul. Prin urmare, termenul liniar al seriei Taylor în punctul O a acestei funcții de perechi de vectori este nul, iar termenul pătratic este o formă biliniară antisimetrică definită pe planul orizontal.

Dacă cîmpul este integrabil, 2-forma astfel obținută este nulă. Din acest motiv, această 2-formă poate fi utilizată ca o măsură a neintegrabilității cîmpului.

Utilizînd sistemul de coordonate ales putem identifica planul orizontal cu planul asociat de cîmp originei coordonatelor. Prin urmare, ca rezultat al construcției noastre apare o 2-formă definită pe planul cîmpului.

Corectitudinea definiției 2-formei. Mai sus am construit 2-forma cu ajutorul coordonatelor. Valoarea pe care o ia această formă pe o pereche de vectori tangenți nu depinde însă de sistemul de coordonate, ci numai de acea 1-formă care definește cîmpul de plane.

Pentru a ne convinge de acest lucru, este suficient să demonstrăm următoarea teoremă.

Teoremă. *2-forma definită mai sus pe spațiul nul (nucleul) 1-formei* ω *coincide cu diferențiala exterioară a lui* ω, $d\omega\Big|_{\omega=0}$.

Demonstrație. Să arătăm că diferența dintre înălțimile celor două puncte care se obțin drept rezultat al celor două mișcări după laturile paralelogramului coincide cu integrala 1-formei ω pe cele patru laturi ale paralelogramului, modulo termeni mici de ordinul trei în raport cu laturile paralelogramului.

În acest scop, să remarcăm că înălțimea la care se ridică o curbă integrală deasupra unui drum de lungime ε care începe în originea coordonatelor este de ordinul ε^2, deoarece în originea coordonatelor planul asociat de cîmp este orizontal. Prin urmare, integralele 2-formei $d\omega$ pe toate cele patru suprafețe verticale bazate pe laturile paralelogramului și mărginite din curbele integrale și planul orizontal sînt de ordinul ε^2, dacă laturile sînt de ordinul ε.

Integralele formei ω pe curbele integrale sînt egale cu zero. Utilizînd formula lui Stokes, creșterea înălțimii de-a lungul unei curbe integrale de deasupra unei laturi oarecare a paralelogramului este egală cu integrala 1-formei ω de-a lungul acestei laturi modulo termeni mici de ordinul trei.

Teorema rezultă acum imediat din definiția diferențialei exterioare.

Mai există un singur element arbitrar, și anume alegerea 1-formei ω cu care am definit 2-forma noastră. 1-forma ω este definită de cîmpul de plane numai pînă la înmulțirea cu o funcție f care nu se anulează nicăieri. Cu alte cuvinte, am putea începe construcția cu forma $f\omega$. Am fi ajuns atunci la 2-forma

$$d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega,$$

care în planul nostru diferă de 2-forma $d\omega$ prin înmulțirea cu numărul nenul $f(0)$.

Prin urmare, *2-forma construită pe planul cîmpului este definită invariant pînă la multiplicarea cu o constantă nenulă.*

Condiția de integrabilitate a unui cîmp de plane.

Teoremă. *Dacă un cîmp de hiperplane este integrabil, atunci 2-forma definită mai sus pe planul cîmpului este egală cu zero. Reciproc, dacă 2-forma construită în fiecare plan al cîmpului este nulă, atunci cîmpul este integrabil.*

Prima afirmație a teoremei este evidentă din modul în care a fost construită 2-forma. Demonstrația celei de-a doua afirmații poate fi făcută utilizînd exact aceleași raționamente cu ajutorul cărora am demonstrat comutativitatea a doi curenți pentru care cîmpurile de vectori corespunzătoare au paranteza lui Poisson nulă. Putem pur și simplu să ne referim la această comutativitate și să o aplicăm curbelor integrale care apar deasupra axelor drepte de coordonate din planul orizontal.

Teoremă. *Condiția de integrabilitate a unui cîmp de plane:*

$$d\omega = 0 \textit{ pentru } \omega = 0$$

este echivalentă cu următoarea condiție a lui Frobenius

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

Demonstrație. Să considerăm valoarea formei $\omega \wedge d\omega$ pe trei vectori bazici (definiți de coordonate) diferiți arbitrari. Dintre aceștia, numai unul poate fi vertical. Prin urmare, dintre toate componentele care apar în definiția valorii produsului exterior pe trei vectori, numai una poate fi nulă: ea este egală cu produsul dintre valoarea formei ω pe vectorul vertical și valoarea formei $d\omega$ pe perechea de vectori orizontali. Dacă cîmpul dat de forma ω este integrabil, al doilea termen descris este nul și deci 3-forma $\omega \wedge d\omega$ se anulează pe orice triplet de vectori.

Reciproc, dacă 3-forma $\omega \wedge d\omega$ este nulă pe orice triplet de vectori, atunci ea se anulează și pe orice triplet format dintr-un vertical bazic și doi vectori orizontali bazici. Dar valoarea lui $\omega \wedge d\omega$ pe un astfel de triplet este egală cu produsul dintre valoarea lui ω pe vectorul vertical și valoarea lui $d\omega$ pe perechea de vectori orizontali. Primul termen este nenul și deci al doilea este nul, ceea ce înseamnă că forma $d\omega$ se anulează în planul $\omega = 0$, c.c.t.d.

C. Cîmpuri nedegenerate de hiperplane.

Definiție. Un cîmp de hiperplane definit pe varietatea M este *nedegenerat în punctul* $x \in M$ dacă rangul 2-formei exterioare

$$(d\omega)\,x\Big|_{\omega_x=0} \quad (\text{deci } (d\omega)_x \,|\, \{\xi \in TM_x : \omega_x(\xi) = 0\})$$

este egal cu dimensiunea hiperplanului.

Aceasta înseamnă că pentru orice vector nenul din hiperplanul $\omega_x = 0$ trebuie să existe un alt vector nenul din același hiperplan, astfel încît valoarea lui $(d\omega)_x$ pe această pereche de vectori să fie nenulă.

D e f i n i ţ i e . Un cîmp de hiperplane definit pe varietatea M este nedegenerat dacă este nedegenerat în orice punct $x \in M$.

Să observăm că pe o varietate de dimensiune pară nu poate exista un cîmp de hiperplane nedegenerat. Într-adevăr, pe o astfel de varietate hiperplanele sînt de dimensiune impară şi rangul oricărei forme biliniare antisimetrice pe un spaţiu de dimensiune impară este mai mic decît dimensiunea spaţiului (vezi §44).

Pe varietăţi de dimensiune impară există cîmpuri de hiperplane nedegenerate.

E x e m p l u . Să considerăm spaţiul euclidian de dimensiune $2m+1$ cu coordonatele x, y, z (unde x şi y sînt vectori m-dimensionali şi z este un număr). 1-forma

$$\omega = x\,dy + dz$$

defineşte un cîmp de hiperplane pe acest spaţiu. Hiperplanul cîmpului în originea coordonatelor are ecuaţia $dz = 0$. În acest hiperplan putem considera pe x şi y drept coordonate. Prin urmare, 2-forma noastră pe hiperplanul cîmpului se scrie

$$d\omega\Big|_{\omega=0} = dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_m \wedge dy_m.$$

Rangul acestei forme este $2m$ şi deci cîmpul nostru este nedegenerat în originea coordonatelor, deci şi într-o vecinătate a acesteia (de fapt, cîmpul din exemplul nostru este nedegenerat în toate punctele spaţiului).

Putem, în sfîrşit, să dăm definiţia structurii de contact: *se numeşte structură de contact pe o varietate diferenţiabilă un cîmp nedegenerat de hiperplane tangente.*

D. Varietatea elementelor de contact. Termenul de „structură de contact" se explică prin faptul că o astfel de structură există întotdeauna pe varietatea elementelor de contact ale unei varietăţi netede.

Să considerăm o varietate netedă de dimensiune n.

D e f i n i ţ i e . Un hiperplan (de dimensiune $n-1$) care este tangent la varietate într-un punct oarecare al ei se numeşte *element de contact*, iar punctul respectiv — *punct de contact*.

Mulţimea tuturor elementelor de contact ale unei varietăţi netede de dimensiune n are o structură de varietate netedă de dimensiune $2n-1$.

Într-adevăr, dacă fixăm un punct al varietăţii, mulţimea tuturor elementelor de contact în acest punct reprezintă mulţimea tuturor subspaţiilor de dimensiune $n-1$ ale unui spaţiu liniar de dimensiune n, deci spaţiul proiectiv real de dimensiune $n-1$. Prin urmare, pentru a da un element de contact trebuie să dăm cele n coordonate ale punctului de contact şi încă $n-1$ coordonate care definesc un punct al spaţiului proiectiv $(n-1)$-dimensional — în total $2n-1$ coordonate.

Varietatea tuturor elementelor de contact ale unei varietăţi n-dimensionale este spaţiul total al unei fibrări a cărei bază este varietatea n-dimensională dată iar fibra — spaţiul proiectiv $(n-1)$-dimensional.

Teoremă. *Fibrarea elementelor de contact este proiectivizata fibrării cotangente: ea poate fi obţinută din fibrarea cotangentă, înlocuind fiecare spaţiu liniar cotangent de dimensiune n prin spaţiul proiectiv $(n-1)$-dimensional (ale cărui puncte sînt dreptele care trec prin vectorul nul al spaţiului cotangent).*

Într-adevăr, orice element de contact este dat de o 1-formă pe spaţiul tangent în punctul de contact pentru care acest element este mulţimea de nivel zero (nucleul). Această formă este nenulă şi ea este definită pînă la multiplicarea cu un număr real nenul.

Dar o 1-formă pe spaţiul tangent este un element al spaţiului cotangent în punctul de contact. Prin urmare, o 1-formă nenulă pe spaţiul tangent, definită pînă la multiplicarea cu un număr real nenul reprezintă un vector nenul al spaţiului cotangent, unic determinat pînă la multiplicarea cu un număr real nenul, deci un punct al spaţiului cotangent proiectivizat.

S t r u c t u r a d e c o n t a c t p e v a r i e t a t e a e l e m e n t e l o r d e c o n t a c t .

În spaţiul tangent la un punct oarecare al varietăţii elementelor de contact există un hiperplan remarcabil. El se numeşte *hiperplanul de contact* şi se defineşte în modul următor.

Să fixăm un punct al varietăţii $(2n-1)$-dimensionale a elementelor de contact la varietatea n-dimensională iniţială. Putem considera acest punct ca un plan $(n-1)$-dimensional tangent la varietatea iniţială.

D e f i n i ţ i e . Un vector tangent în punctul fixat la varietatea elementelor de contact *aparţine hiperplanului de contact* dacă proiecţia sa pe varietatea n-dimensională este conţinută în acel plan $(n-1)$-dimensional care reprezintă punctul fixat mai sus al varietăţii elementelor de contact*).

*) Fie V^n varietatea iniţială, M^{2n-1} varietatea elementelor de contact şi $\pi : M^{2n-1} \to V^n$ proiecţia canonică care asociază fiecărui element de contact punctul de contact. Fie $\alpha \in M^{2n-1}$ un punct care corespunde hiperplanului tangent $\bar{\alpha} \subset TV^n_x$, $x \in V^n$, $x = \pi(\alpha)$. Un vector $\xi \in TM^{2n-1}_x$ este în hiperplanul de contact în α dacă $\pi_{*\alpha}(\xi) \in \bar{\alpha}$, unde $\pi_{*\alpha} : TM^{2n-1}_\alpha \to TV^n_{\pi(\alpha)}$ este diferenţiala lui π în punctul α. (*N. T.*)

Cu alte cuvinte, *o deplasare a unui element de contact dat este tangentă la hiperplanul de contact dacă viteza punctului de contact aparține planului care reprezintă elementul dat; elementul se poate însă roti arbitrar.*

E x e m p l u. Să luăm o subvarietate în varietatea n-dimensională și să considerăm toate $(n-1)$-planele tangente la această subvarietate (deci elementele de contact). Toate aceste elemente de contact formează în varietatea $(2n-1)$-dimensională a tuturor elementelor de contact o subvarietate netedă. Dimensiunea acestei subvarietăți este egală cu $n-1$, *indiferent de dimensiunea subvarietății inițiale* (care poate fi $(n-1)$-dimensională, dar poate avea și o dimensiune mai mică, fiind chiar o curbă sau un punct).

Subvarietatea $(n-1)$-dimensională astfel construită în varietatea $(2n-1)$-dimensională a tuturor elementelor de contaet este tangentă în fiecare punct al ei la cîmpul de hiperplane de contact (aceasta rezultă din definiția hiperplanelor de contact). Prin urmare, *cîmpul de hiperplane* $(2n-2)$-*dimensionale de contact are varietăți integrale de dimensiune* $n-1$.

P r o b l e m ă . Are acest cîmp de plane și varietăți integrale de dimensiune mai mari?

Răspuns. Nu.

P r o b l e m ă . Poate fi definit cîmpul hiperplanelor de contact printr-o 1-formă diferențială pe varietatea tuturor elementelor de contact?

Răspuns. Nu, chiar și în ipoteza că varietatea n-dimensională inițială este spațiul euclidian (de exemplu, planul bidimensional).

Vom demonstra mai jos că *cîmpul hiperplanelor de contact definit pe varietatea* $(2n-1)$-*dimensională a tuturor elementelor de contact ale unei varietăți n-dimensionale este nedegenerat.*

Demonstrația utilizează structura simplectică a fibrării cotangente.

Aceasta se poate face datorită faptului că varietatea elementelor de contact este legată printr-o construcție simplă de spațiul total al fibrării cotangente (a cărei proiectivizată este varietatea elementelor de contact). În acest cadru, nedegenerarea cîmpului hiperplanelor de contact pe proiectivizata fibrării este strîns legată de nedegenerarea 2-formei care definește structura simplectică pe fibrarea cotangentă.

Vom efectua această construcție mai jos într-o situație mai generală. Mai precis, din fiecare varietate impară înzestrată cu o structură de contact se poate construi „simplectizata" ei care este o varietate simplectică de dimensiune mai mare cu 1. Relațiile reciproce dintre aceste două tipuri de varietăți — cele de contact, de dimensiune impară și cele simplectice, de dimensiune pară, sînt aceleași ca între varietatea elementelor de contact cu structura ei de contact și fibrarea cotangentă cu structura ei simplectică.

E. Simplectizarea unei varietăți de contact. Să considerăm o varietate de contact arbitrară, deci o varietate de dimensiune impară N pe care este definit un cîmp de hiperplane tangente nedegenerat (de dimensiune pară $N-1$). Aceste plane vor fi denumite în continuare *plane de contact*. Fiecare plan de contact este tangent la varietatea de contact într-un anumit punct, care va fi denumit în continuare *punct de contact*.

D e f i n i ț i e . Vom numi *formă de contact* orice formă liniară pe spațiul tangent într-un punct al varietății de contact și al cărei nucleu coincide cu planul de contact.

Trebuie să subliniem că o formă de contact nu este o formă diferențială, ci o formă liniară, algebrică, pe un anumit spațiu tangent.

D e f i n i ț i e . Se numește *simplectizata* unei varietăți de contact mulțimea tuturor formelor de contact definite pe spațiile tangente ale varietății de contact date, înzestrată cu structura de varietate simplectică definită mai jos.

În primul rînd, să observăm că *mulțimea tuturor formelor de contact pe o varietate de contact are o structură naturală de varietate diferențiabilă de dimensiune pară* $N+1$. Într-adevăr, putem interpreta mulțimea tuturor formelor de contact ca spațiul unei fibrări peste varietatea de contact inițială. Proiecția de bază este aplicația care asociază fiecărei forme de contact punctul de contact.

Fibra acestei fibrări este mulțimea tuturor formelor de contact cu punct de contact comun. Toate aceste forme se obțin una din alta prin înmulțire cu un număr diferit de zero (deoarece ele definesc același plan de contact). Prin urmare, fibra fibrării noastre este unidimensională : ea este o dreaptă fără un punct.

De asemenea, să observăm că pe varietatea tuturor formelor de contact acționează grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Într-adevăr, produsul dintre o formă de contact și un număr real este din nou o formă de contact. Evident, grupul acționează pe spațiul total al fibrării noastre lăsînd pe loc fiecare fibră (la înmulțirea unei forme de contact cu un număr punctul de contact nu se schimbă).

O b s e r v a ț i e . Pînă acum nu am utilizat ipoteza de nedegenerare a cîmpului de plane. Această ipoteză este necesară pentru

a arăta că varietatea care se obține prin simplectizarea unei varietăți de contact are într-adevăr o structură simplectică.

E x e m p l u . Să considerăm varietatea (de dimensiune $2n-1$) a tuturor elementelor de contact al unei varietăți netede de dimensiune n. Pe această varietate a elementelor de contact este definit un cîmp de hiperplane (pe care le-am definit mai sus și le-am denumit de contact). Prin urmare, varietatea elementelor de contact poate fi simplectizată.

Drept rezultat, se obține o varietate simplectică de dimensiune $2n$. Această varietate este spațiul total al fibrării cotangente a varietății n-dimensionale inițiale din care s-au eliminat covectorii nuli. Acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule constă în înmulțirea cu numere a vectorilor cotangenți.

Pe fibrarea cotangentă este definită 1-forma remarcabilă „$p\,dq$". O 1-formă similară este definită și pe orice varietate care se obține prin simplectizarea unei varietăți de contact.

1-f o r m a c a n o n i c ă p e v a r i e t a t e a s i m p l e c t i z a t ă.

D e f i n i ț i e . *1-forma canonică* pe varietatea care se obține prin simplectizarea unei varietăți de contact este 1-forma α a cărei valoare pe fiecare vector tangent ξ la simplectizată într-un punct oarecare p (fig. 237) este egal cu valoarea pe care o ia pe proiecția

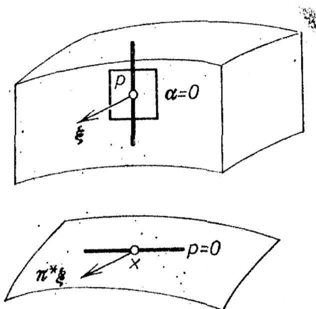


Fig. 237. Simplectizarea unei varietăți de contact.

vectorului ξ pe spațiul tangent la varietatea de contact acea 1-formă pe acest spațiu tangent care este punctul p :

$$\alpha(\xi) = p(\pi_* \xi),$$

unde π este proiecția canonică a simplectizatei pe varietatea de contact.

Teoremă. *Diferențiala exterioară a 1-formei canonice pe varietatea simplectizată este o 2-formă nedegenerată.*

Corolar. *Varietatea care se obține prin simplectizarea unei varietăți de contact este înzestrată cu o structură simplectică canonică (care este deci univoc determinată) definită de structura de contact a varietății de dimensiune impară inițiale.*

D e m o n s t r a ț i e . Afirmația teoremei avînd un caracter local, este suficient să o demonstrăm într-o vecinătate mică a unui punct arbitrar al varietății. Într-o astfel de vecinătate suficient de mică, cîmpul de plane de contact poate fi dat prin intermediul unei forme diferențiale ω pe varietatea de contact. Să fixăm o astfel de 1-formă ω.

În acest mod am realizat și o reprezentare a acelei părți a varietății simplectizate care se proiectează pe vecinătatea aleasă sub forma unui produs direct al vecinătății cu o dreaptă fără un punct.

Mai precis, perechii (x, λ) formate dintr-un punct x al varietății de contact (situat în vecinătatea aleasă) și un număr real nenul λ îi asociem forma de contact care este definită de 1-forma diferențială $\lambda\omega$ în spațiul tangent în x.

În acest mod, în partea considerată a varietății simplectizate este definită o funcție λ care nu ia valoarea zero. Trebuie să subliniem că λ este numai o coordonată locală pe varietatea simplectizată și că această coordonată nu este definită canonic; ea depinde de alegerea 1-formei ω.

În notațiile introduse, 1-forma canonică α se scrie ca

$$\alpha = \lambda\, \pi^* (\omega)$$

și nu depinde de alegerea lui ω.

Diferențiala exterioară a 1-formei α are deci expresia

$$d\,\alpha = d\,\lambda \wedge \pi^* (\omega) + \lambda\, \pi^* (d\,\omega).$$

Să arătăm că forma $d\,\alpha$ este nedegenerată, deci că pentru orice vector tangent ξ la simplectizată există un vector η pentru care $d\,\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

Pentru aceasta, împărțim vectorii tangenți la simplectizată în mai multe tipuri. Numim un vector ξ *vertical* dacă el este tangent la fibră, deci dacă $\pi_*(\xi) = 0$. Numim un vector ξ *orizontal* dacă el este tangent la o suprafață de nivel a funcției λ, deci dacă $d\lambda(\xi) = 0$. În sfîrșit, numim un vector ξ *vector de contact* dacă proiecția lui pe varietatea de contact este conținută în planul de contact, deci dacă $\omega(\pi_* \xi) = 0$ (sau, cu alte cuvinte, $\alpha(\xi) = 0$).

Să calculăm valoarea formei $d\alpha$ pe o pereche de vectori ξ, η :

$$d\alpha(\xi, \eta) = (d\lambda \wedge \pi^*(\omega))\,(\xi, \eta) + (\lambda\, \pi^*(d\omega))\,(\xi, \eta).$$

Să presupunem la început că vectorul ξ nu este de contact. Luăm drept η un vector vertical nenul : $\pi_*(\eta) = 0$. Atunci al doilea termen este nul, iar primul este egal cu

$$-\,d\,\lambda(\eta)\,\omega\,(\pi_*(\xi))$$

și este nenul, $\eta \neq 0$, fiind vertical și ξ nefiind de contact. Deci, în ipoteza că ξ nu este de contact, am găsit un vector η pentru care $d\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

Să presupunem aici că ξ este un vector de contact nevertical. Fie atunci η un vector de contact arbitrar. În acest caz primul termen se anulează complet, iar cel de-al doilea (și deci întreaga sumă) se reduce la $\lambda\, d\omega(\pi_*(\xi), \pi_*(\eta))$. Cum vectorul ξ nu este vertical, vectorul $\pi_*(\xi)$ din planul de contact este nenul. Dar 2-forma $d\omega$ este nedegenerată pe planul de contact (conform definiției structurii de contact). Prin urmare există un vector de contact η pentru care $d\omega(\pi_*(\xi), \pi(\eta)) \neq 0$. Cum $\lambda \neq 0$, am determinat un vector η pentru care $d\,\alpha(\xi, \eta) \neq 0$.

În sfîrșit, dacă vectorul ξ este nenul și vertical, se poate lua drept η orice vector care nu este de contact. Teorema prin urmare este demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Construcția 1-formei α și a 2-formei $d\alpha$ funcționează pentru orice varietate pe care este definit un cîmp de hiperplane și nu depinde de condiția de nedegenerare. *2-forma* $d\alpha$ *va defini însă o structură simplectică numai în cazul în care cîmpul de plane este nedegenerat.*

D e m o n s t r a ț i e. Să presupunem că cîmpul este degenerat, deci că există un vector nenul ξ' în planul cîmpului într-un punct astfel încît $d\,\omega(\xi', \eta') \neq 0$ pentru orice vector η' al acestui plan.

Pentru un astfel de ξ' fixat, funcția $\eta' \mapsto d\,\omega\,(\xi', \eta')$ este o formă liniară care este identic nulă pe planul cîmpului. Prin urmare, există un număr μ care nu depinde de η' astfel încît

$$d\omega\,(\xi', \eta') = \mu\, \omega(\eta'),$$

de data asta pentru orice vector η' tangent la varietate în punctul considerat.

Fie ξ un vector tangent la varietatea simplectizată pentru care $\pi_*(\xi) = \xi'$. Un astfel de vector este definit pînă la adăugarea unui vector vertical și vom arăta că prin adăugarea unui astfel de vector, convenabil ales, avem

$$d\alpha\,(\xi, \eta) = 0 \text{ pentru orice } \eta.$$

Într-adevăr, primul termen al formulei pentru $d\,\alpha$ este $d\lambda(\xi)'\cdot\omega(\pi_*(\eta))$ (deoarece $\omega(\pi_*(\xi)) = \omega\,(\xi') = 0$). Al doilea termen este egal cu $\lambda\, d\,\omega(\pi_*(\xi), \pi_*(\eta)) = \lambda\, \mu\, \omega(\pi_*(\eta))$. Alegem componenta verticală a vectorului ξ în așa fel încît $d\,\lambda\,(\xi) = -\lambda\,\mu$. Atunci vectorul ξ va fi antiortogonal pe toți vectorii η.

Prin urmare, dacă $d\,\alpha$ este o structură simplectică, atunci cîmpul de hiperplane inițial este o structură de contact și afirmația de mai sus este demonstrată.

Corolar. *Cîmpul hiperplanelor de contact definește pe varietatea tuturor elementelor de contact ale unei varietăți netede arbitrare o structură de contact.*

D e m o n s t r a ț i e. Prin simplectizarea varietății $(2n-1)$-dimensionale a tuturor elementelor de contact ale unei varietăți netede n-dimensionale, înzestrată cu cîmpul de plane $(2n-2)$-dimensionale de contact, se obține, conform construcției, spațiul

total al fibrării cotangente la varietatea netedă n-dimensională inițială din care s-au eliminat convectorii nuli. 1-forma canonică α pe varietatea simplectizată coincide, conform definiției, cu acea 1-formă pe spațiul total al fibrării cotangente pe care am denumit-o $\ll p\, dq \gg$ și care stă la baza mecanicii hamiltoniene (vezi §37). Prin urmare, diferențiala ei exterioară este forma $\ll dp \wedge dq \gg$ care definește în mod uzual structura simplectică pe spațiul fazelor. Rezultă că forma $d\,\alpha$ nu este degenerată și deci, conform observației precedente, cîmpul hiperplanelor de contact este nedegenerat. Corolarul este demonstrat.

F. Difeomorfisme de contact și cîmpuri vectoriale de contact.

D e f i n i ț i e. Un difeomorfism al unei varietăți de contact pe ea însăși se numește *difeomorfism de contact* dacă el conservă structura de contact, deci dacă el transformă fiecare plan al cîmpului de plane care definește structura tot într-un plan al cîmpului.

E x e m p l u. Să considerăm varietatea $(2n-1)$-dimensională a tuturor elementelor de contact ale unei varietăți netede n-dimensionale, înzestrată cu structura ei de contact uzuală. Fiecărui element de contact i se poate asocia o „parte pozitivă'' alegînd unul din semispațiile în care acest element împarte spațiul tangent n-dimensional la varietatea inițială.

Un element de contact cu o parte pozitivă aleasă va fi denumit în continuare *element de contact orientat* (*transversal*).

Mulțimea tuturor elementelor de contact orientate pe varietatea noastră n-dimensională are o structură de varietate netedă $(2n-1)$-dimensională și o structură de contact naturală (ea este o acoperire cu două foi a varietății elementelor de contact obișnuite, neorientate).

Să presupunem acum că varietatea n-dimensională inițială este înzestrată cu o metrică riemanniană. Atunci pe varietatea elementelor de contact orientate apare un „curent geodezic''*). Evoluția la timpul t dată de acest curent se definește în modul următor. Presupunem dat un element de contact și considerăm geodezica care pleacă din punctul de contact al acestui element în direcția ortogonală elementului și în sensul pozitiv dat de orientare. Mișcăm punctul de contact de-a lungul acestei geodezice, mișcînd în același timp și elementul de contact astfel încît el să rămînă tot

*) Riguros vorbind, ar trebui să mai presupunem că varietatea este completă, deci că orice geodezică se poate prelungi nemărginit.

timpul ortogonal la geodezică. După timpul t obținem un nou element de contact orientat. În acest mod am definit corect *curentul geodezic pe varietatea elementelor de contact orientate.*

Teoremă. *Curentul geodezic pe varietatea elementelor de contact orientate este format din difeomorfisme de contact.*

Nu vom da aici demonstrația acestei teoreme deoarece ea nu reprezintă altceva decît o reformulare în termeni noi a principiului lui Huygens (vezi §46).

D e f i n i ț i e. Un cîmp de vectori pe o varietate de contact este un *cîmp de contact* dacă el este cîmpul de viteze (generatorul infinitezimal) al unui grup (local) cu un parametru de difeomorfisme de contact.

Teoremă. *Paranteza lui Poisson a două cîmpuri de contact este un cîmp de contact. Cîmpurile de contact formează o subalgebră Lie a algebrei tuturor cîmpurilor netede de vectori pe o varietate de contact.*

Demonstrația rezultă din definiții.

G. Simplectizarea difeomorfismelor de contact și a cîmpurilor vectoriale de contact. Din fiecare difeomorfism de contact al unei varietăți de contact se poate construi în mod canonic un difeomorfism simplectic al varietății simplectizate.

Acest difeomorfism simplectic comută cu acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule pe varietatea simplectizată și este definit de următoarea construcție.

Reamintim că orice punct al varietății simplectizate este o formă de contact pe varietatea de contact inițială.

D e f i n i ț i e. *Imaginea formei de contact p cu punctul de contact x prin difeomorfismul de contact f* al unei varietăți de contact date pe ea însăși este o formă

$$f_!(p) = (f^*_{f(x)})^{-1}(p).$$

Mai simplu, transportăm forma p de pe spațiul tangent în punctul x pe spațiul tangent în punctul $f(x)$ cu ajutorul difeomorfismului f (a cărei diferențială în punctul x stabilește un izomorfism între spațiul tangent în x și cel tangent în $f(x)$).

Difeomorfismul f fiind de contact, forma $f_!(p)$ este de contact.

Teoremă. *Aplicația $f_!$ definită mai sus a simplectizatei varietății de contact pe ea însăși este un difeomorfism simplectic care comută cu acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule și conservă 1-forma canonică pe varietatea simplectizată.*

D e m o n s t r a ț i e. Afirmațiile teoremei rezultă din observația că 1-forma canonică, 2-forma simplectică și acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule sînt definite numai de structura de contact (în construcția lor nu intervin coordonate locale sau alte mijloace neinvariante) iar difeomorfismul f conservă această structură. De aici rezultă că $f_!$ conservă tot ceea ce este construit invariant din structura de contact și deci, în particular, 1-forma canonică α, diferențiala ei $d\alpha$ și acțiunea grupului, c.c.t.d.

Teoremă. *Orice difeomorfism simplectic al simplectizatei unei varietăți de contact, care comută cu acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule are următoarele două proprietăți* : 1) *se proiectează pe varietatea de contact inițială ca un difeomorfism de contact* ; 2) *conservă 1-forma canonică α.*

D e m o n s t r a ț i e. Orice difeomorfism care comută cu acțiunea grupului multiplicativ se proiectează pe (induce) un difeomorfism al varietății de contact. Pentru a demonstra că în cazul în care se pleacă de la un difeomorfism simplectic se obține unul de contact, este suficient să demonstrăm afirmația 2) (deoarece într-un plan de contact se proiectează vectorii ξ pentru care $\alpha(\xi) = 0$ și numai ei).

Pentru a demonstra a doua afirmație, să exprimăm integrala formei α pe un drum arbitrar γ prin intermediul structurii simplectice $d\alpha$:

$$\int_\gamma \alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\sigma(\varepsilon)} d\alpha,$$

unde 2-lanțul $\sigma(\varepsilon)$ se obține din γ prin acțiunea tuturor numerelor reale din intervalul $[\varepsilon, 1]$. În frontiera 2-lanțului $\sigma(\varepsilon)$ apar, în afara lui γ, două segmente verticale și drumul $- \varepsilon \cdot \gamma$. Integralele formei α pe segmentele verticale sînt egale cu zero, iar integrala pe $\varepsilon \cdot \gamma$ tinde la zero împreună cu ε.

Din invarianța 2-formei $d\alpha$ și faptul că difeomorfismul nostru F comută cu acțiunea grupului multiplicativ rezultă că pentru orice drum

$$\int_{F\gamma} \alpha = \int_\gamma \alpha$$

și deci difeomorfismul F conservă 1-forma α, c.c.t.d.

D e f i n i ț i e. Operația de *simplectizare a unui cîmp de vectori* de contact se realizează prin construcția următoare. Considerăm cîmpul ca fiind cîmpul de viteze al unui grup cu un parametru de difeomorfisme și obținem un grup cu un parametru de difeomorfisme simplectice. Considerăm cîmpul vitezelor acestui grup. Acesta se numește *simplectizatul* cîmpului de contact inițial.

Teoremă. *Simplectizatul unui cîmp de vectori de contact este un cîmp de vectori hamiltonian. Hamiltonianul acestui cîmp poate fi*

ales omogen de gradul 1 *în raport cu acțiunea grupului multiplicativ al numerelor reale nenule:*

$$H(\lambda x) = \lambda H(x).$$

Reciproc, orice cîmp de vectori hamiltonian pe varietatea simplectizată care are un hamiltonian omogen de gradul 1 *se proiectează pe varietatea de contact inițială ca un cîmp de vectori de contact.*

D e m o n s t r a ț i e. Caracterul hamiltonian al simplectizatului cîmpului de contact rezultă din caracterul simplectic al simplectizatului unui difeomorfism de contact. Faptul că hamiltonianul este omogen rezultă din omogenitatea difeomorfismelor simplectizate (ele comută cu înmulțirea cu $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$). Prin urmare, prima afirmație a teoremei rezultă din teorema privind simplectizarea difeomorfismelor de contact.

A doua parte rezultă similar din teorema privind difeomorfismele simplectice omogene și teorema este demonstrată.

Corolar. *Operația de simplectizare a cîmpurilor vectoriale este un izomorfism al algebrei Lie a cîmpurilor vectoriale de contact definite pe varietatea inițială pe algebra Lie a cîmpurilor vectoriale local-hamiltoniene cu hamiltonieni omogeni de gradul* 1.

Demonstrația este evidentă.

H. Teorema lui Darboux pentru structuri de contact. Teorema lui Darboux despre care este vorba este teorema de unicitate locală a unei structuri de contact. Ea poate fi formulată în oricare din următoarele trei forme.

Teoremă. *Toate varietățile de contact de aceeași dimensiune sînt local difeomorfe prin difeomorfisme de contact (altfel spus, pentru orice două varietăți de contact de aceeași dimensiune și orice alegere a cîte unui punct de fiecare, există cîte o vecinătate a fiecărui punct în varietatea respectivă și un difeomorfism între cele două vecinătăți, difeomorfism care transformă un punct în celălalt și cîmpul de hiperplane din prima vecinătate — în cîmpul de hiperplane din a doua vecinătate).*

Teoremă. *Orice varietate de contact de dimensiune* $2m-1$ *este local difeomorfă printr-un difeomorfism de contact cu varietatea elementelor de contact ale spațiului numeric m-dimensional.*

Teoremă. *Orice* 1*-formă diferențială care definește pe o varietate de dimensiune* $2n+1$ *un cîmp nedegenerat de hiperplane se scrie într-un anumit sistem local de coordonate în «forma normală»*

$$\omega = x\,dy + dz,$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *și* z *sînt coordonate locale.*

Este evident că primele două teoreme rezultă din cea de-a treia pe care, la rîndul ei o vom deduce din teorema similară a lui Darboux privind forma normală a 2-formelor care definesc structuri simplectice.

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i l u i D a r b o u x. Simplectizăm varietatea noastră de contact. Pe varietatea simplectică $(2n+2)$-dimensională astfel obținută sînt definite 1-forma canonică α, 2-forma nedegenerată $d\alpha$, proiecția π pe varietatea de contact inițială și în fiecare punct, o direcție verticală.

1-forma diferențială ω dată pe varietatea de contact definește în fiecare punct o formă de contact.

Mulțimea tuturor acestor forme este o subvarietate de dimensiune $2n+1$ a varietății simplectice. Proiecția π aplică difeomorf această subvarietate pe varietatea de contact inițială. Verticalele intersectează această subvarietate sub un unghi nenul (transversal).

Alegem un punct oarecare al varietății noastre de contact și considerăm un punct din subvarietatea construită în varietatea simplectică, care se proiectează peste punctul ales. În vecinătatea punctului din varietatea simplectică se pot alege coordonate locale în care

$$d\alpha = dp_0 \wedge dq_0 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$$

și subvarietatea $(2n+1)$-dimensională să fie dată de ecuația $p_0 = 0$ (vezi §43 unde, în demonstrația teoremei lui Darboux, prima coordonată se alege arbitrar).

Să observăm acum că 1-forma $p_0\,dq_0 + \ldots + p_n\,dq_n$ are diferențiala $d\alpha$. Prin urmare, local

$$\alpha = p_0\,dq_0 + \ldots + p_n\,dq_n + dw,$$

unde w este o funcție; putem considera că w se anulează în originea coordonatelor. În particular, pe hipersuprafața $p_0 = 0$, forma α are expresia

$$\alpha\Big|_{p_0=0} = p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,d\,q_n + dw.$$

Proiecția π permite ca să se transporte pe varietatea de contact coordonatele $p_1, \ldots, p_n$; q_0; $q_1, \ldots, q_n$; și funcția w. Mai precis, definim funcțiile x, y și z prin formulele

$$x_i(\pi(A)) = p_i(A),\quad y_i(\pi(A)) = q_i(A),\quad z(\pi(A)) = w(A),$$

unde A este un punct al hipersuprafeței $p_0 = 0$.

Obținem atunci

$$\omega = x\,dy + dz$$

și rămîne să verificăm că funcțiile $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z)$ formează un sistem de coordonate. Pentru aceasta este suficient să arătăm că derivata parțială a funcției w în raport cu q_0 este nenulă. Cu alte cuvinte, trebuie să verificăm că 1-forma α nu se anulează pe vectorul definit de direcția coordonatei q_0. Această ultimă condiție este

echivalentă cu faptul că 2-forma $d\alpha$ nu se anulează pe perechea de vectori dată de direcţia verticală şi direcţia coordonatei q_0.

Dar vectorul definit de direcţia coordonatei q_0 este antiortogonal tuturor vectorilor din planul de coordonate $p_0 = 0$. Dacă, în plus, el ar fi antiortogonal şi direcţiei verticale, atunci ar fi antiortogonal tuturor vectorilor, ceea ce ar contrazice nedegenerarea formei $d\alpha$. Prin urmare, $\partial w / \partial q_0 = 0$ şi teorema este demonstrată.

I. Hamiltonieni de contact. Să presupunem că structura de contact pe o varietate de contact dată este definită de o 1-formă ω pe care am fixat-o.

D e f i n i ţ i e . Se numeşte *ω-scufundarea* varietăţii noastre de contact în simplectizata ei aplicaţia care asociază fiecărui punct al varietăţii de contact restricţia formei ω la spaţiul tangent în acel punct.

D e f i n i ţ i e . Se numeşte *hamiltonian de contact* al unui cîmp vectorial de contact definit pe varietatea de contact cu 1-forma fixată ω, funcţia K pe varietatea de contact care ia în orice punct A valoarea hamiltonianului omogen H al cîmpului vectorial simplectizat pe imaginea lui A prin ω-scufundare :

$$K(A) = H\left(\omega\Big|_A\right).$$

Teoremă. *Fie X un cîmp vectorial de contact pe o varietate de contact cu 1-forma fixată ω. Hamiltonianul de contact K este egal cu valoarea formei ω pe cîmpul de contact :*

$$K = \omega(X).$$

D e m o n s t r a ţ i e . Utilizăm formula care exprimă creşterea hamiltonianului obişnuit de-a lungul unui drum prin intermediul cîmpului vectorial şi al structurii de contact (§ 48, C).

Fie B punctul din varietatea simplectizată în care vrem să calculăm hamiltonianul şi $\{\lambda B\}$, $0 < \lambda \leqslant 1$ un segment vertical. Evoluţia acestui segment într-un interval de timp mic τ, sub acţiunea curentului simplectizat construit din curentul lui X generează o bandă bidimensională $\sigma(\tau)$. Valoarea hamiltonianului H în punctul B este

$$H(B) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint_{\sigma(\tau)} d\,\alpha,$$

deoarece $H(\lambda B) \to 0$ cînd $\lambda \to 0$. Dar integrala 2-formei $d\,\alpha$ pe bandă este egală cu integrala 1-formei α pe partea din frontiera formată de traiectoria punctului B (celelalte părţi ale frontierei dau integrale nule). Prin urmare, integrala dublă este egală pur şi simplu cu integrala 1-formei α pe un segment de traiectorie, iar limita- cu valoarea 1-formei α pe vectorul viteză Y al cîmpului simplectizat. Dar $K(\pi(B)) =$

$$= H(B) = \alpha(Y)\Big|_B = \omega(X)\Big|_B, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

J. Formule de calcul. Să presupunem că utilizăm coordonatele din teorema lui Darboux, în care forma diferenţială ω capătă forma normală

$$\omega = x\,dy + dz,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

P r o b l e m ă. Să se determine componentele cîmpului vectorial de contact cu hamiltonianul de contact dat $K = K(x, y, z)$.

Răspuns. Ecuaţiile curentului de contact au forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial K}{\partial y} + \dfrac{\partial K}{\partial z}x, \\ \dot{y} = \dfrac{\partial K}{\partial x}, \\ \dot{z} = K - x\dfrac{\partial K}{\partial x}. \end{cases}$$

R e z o l v a r e . Un punct al varietăţii simplectizate poate fi dat prin $2n+2$ numere x_i, y_i, z, λ unde (x, y, z) sînt coordonate pe varietatea de contact şi λ este numărul cu care trebuie înmulţită forma ω pentru ca să se obţină punctul dat al varietăţii simplectizate.

În aceste coordonate $\alpha = \lambda\, x\, dy + \lambda\, dz$. Din acest motiv, în sistemul de coordonate p, q în care

$$\mathbf{p} = (p, p_0), \quad p = \lambda\, x, \quad p_0 = \lambda,$$

$$\mathbf{q} = (q, q_0), \quad q = y, \quad q_0 = z,$$

forma α capătă forma standard.

$$\alpha = \mathbf{p}\,d\mathbf{q} \text{ şi deci } d\,\alpha = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}.$$

Acţiunea T_μ a grupului multiplicativ al numerelor reale nenule se reduce la înmulţirea lui p cu μ :

$$T_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mu\,\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Hamiltonianul de contact K se exprimă prin hamiltonianul obişnuit $H = H(p, q, p_0, q_0)$ prin formula

$$K(x, y, z) = H(x, y, 1, z).$$

Funcţia H este omogenă de gradul 1 în p. Rezultă că derivatele parţiale ale lui K în punctul (x, y, z) sînt legate de derivatele parţiale ale lui H în punctul $(p=x, p_0 = 1, q=y, q_0 = z)$ prin relaţiile

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_0} = \frac{\partial K}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_0} = K - x\frac{\partial K}{\partial x}.$$

Ecuaţiile lui Hamilton cu hamiltonianul H au deci, în punctul considerat, forma

$$\dot{x} + \dot{\lambda} x = -\frac{\partial K}{\partial y}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial K}{\partial z},$$

$$\dot{y} = \frac{\partial K}{\partial x}, \quad \dot{z} = K - x\frac{\partial K}{\partial x},$$

de unde se obţine şi răspunsul de mai sus.

Problemă. Să se determine hamiltonianul de contact al parantezei lui Poisson a două cîmpuri vectoriale de contact cu hamiltonienii K şi K'.

Răspuns. $(K, K') + \frac{\partial K}{\partial z} \cdot \mathcal{E} K' - \frac{\partial K'}{\partial z} \mathcal{E} K$, unde cu paranteze se notează paranteza lui Poisson în raport cu variabilele x, y, iar $\mathcal{E}$ este operatorul lui Euler: $\mathcal{E} F = F - x \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$.

Rezolvare. În notaţiile din soluţia la problema precedentă, trebuie să exprimăm paranteza lui Poisson uzuală a hamiltonienilor omogeni H şi H' în punctul $(p=x, p_0=1, q=y, q_0=z)$ prin hamiltonienii de contact K şi K'. Avem:

$$(H, H') = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H'}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H'}{\partial q} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial q_0}\frac{\partial H'}{\partial p_0} - \frac{\partial H}{\partial p_0}\frac{\partial H'}{\partial q_0}.$$

Introducînd valorile derivatelor aşa cum au fost ele determinate în soluţia problemei precedente, obţinem, în punctul considerat,

$$(H, H') = \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial K'}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial K'}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial K}{\partial z}\left(K' - x\frac{\partial K'}{\partial x}\right) - \frac{\partial K'}{\partial z}\left(K - x\frac{\partial K}{\partial x}\right).$$

K. Varietăţi legendreene. În categoria varietăţilor de contact subvarietăţilor lagrangeene ale spaţiului de faze simplectizat le corespunde o clasă interesantă de varietăţi care pot fi denumite legendreiene, deoarece sînt strîns legate de transformarea lui Legendre.

Definiţie. Se numeşte *subvarietate legendreană* a unei varietăţi de contact de dimensiune $2n+1$ orice subvarietate integrală de dimensiune n a cîmpului de hiperplane de contact.

Cu alte cuvinte, este vorba de varietăţile integrale de dimensiunea maximală pentru varietăţile integrale ale unui cîmp de hiperplane nedegenerate.

Exemplul 1. Mulţimea tuturor elementelor de contact tangente la o subvarietate arbitrară a unei varietăţi m-dimensionale este o subvarietate legendreană $(m-1)$-dimensională a varietăţii de contact $(2m-1)$-dimensională formată din toate elementele de contact.

Exemplul 2. Mulţimea tuturor planelor tangente la graficul unei funcţii $f = \varphi(x)$ din spaţiul euclidian de dimensiune $n+1$ cu coordonatele $(x_1, \ldots, x_n; f)$ este o subvarietate legendreană a varietăţii de dimensiune $2n+1$ a tuturor hiperplanelor neverticale din spaţiul care conţine graficul (structura de contact este dată de 1-forma

$$\omega = p_1 \, dx_1 + \ldots + p_n \, dx_n - df;$$

planul cu coordonatele (p, x, f) trece prin punctul cu coordonatele (x, f) şi este paralel cu planul $f = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$).

Transformarea lui Legendre poate fi descrisă în aceşti termeni în modul următor.

Să considerăm și o a doua varietate de contact de dimensiune $2n+1$: spațiul cu coordonatele (P, X, F) și structura de contact definită de 1-forma

$$\Omega = P\,dX - dF.$$

Se numește *involuția lui Legendre* aplicația care transformă un punct (p, x, f) al primului spațiu în punctul cu coordonatele

$$P = x, \quad X = p, \quad F = px - f$$

din cel de-al doilea spațiu.

După cum se verifică ușor, involuția lui Legendre transformă prima structură de contact în cea de-a doua. Este evidentă următoarea

Teoremă. *Un difeomorfism al unei varietăți de contact pe o altă varietate de contact, care transformă planele de contact în plane de contact, transformă și orice subvarietate legendreană într-o subvarietate legendreană.*

În particular, sub acțiunea involuției lui Legendre, subvarietatea legendreană a planelor tangente la graficul unei funcții trece într-o nouă subvarietate legendreană. Această nouă subvarietate se numește *transformata lui Legendre* a varietății inițiale.

Proiecția noii subvarietăți pe spațiul cu coordonatele (X, F) (paralel cu direcția P) nu este, în general, o varietate netedă : ea are singularități. Această proiecție se numește *transformata lui Legendre* a graficului funcției φ.

Dacă φ este o funcție *convexă*, atunci proiecția este și ea graficul unei funcții $F = \Phi(X)$. În acest caz, funcția Φ se numește *transformata lui Legendre* a funcției φ.

Să mai considerăm și un alt exemplu, furnizat de mișcarea elementelor de contact orientate sub acțiunea curentului geodezic pe o varietate riemanniană. Luăm drept „front de undă inițial" o subvarietate netedă arbitrară a varietății noastre riemanniene (de orice dimensiune). Mulțimea tuturor elementelor de contact orientate tangente la această subvarietate este o subvarietate legendreană a varietății tuturor elementelor de contact ale varietății riemanniene. Din teorema precedentă obținem un

Corolar. *Mulțimea tuturor elementelor de contact tangente la frontul de undă inițial se transformă sub acțiunea curentului geodezic, după timpul t, într-o subvarietate legendreană a varietății tuturor elementelor de contact.*

Trebuie să observăm că această nouă subvarietate legendreană poate să nu fie familia tuturor elementelor tangente la o varietate netedă, deoarece pe frontul de undă pot apărea, în timpul evoluției singularități.

Singularitățile legendreene care apar în acest mod pot fi descrise la fel ca singularitățile lagrangeene (vezi anexa 12). Se numește *fibrare legendreană* a unei varietăți de contact $(2n+1)$-dimensionale o fibrare ale cărei fibre sînt subvarietăți legendreene de dimensiune n. Singularitățile legendreene sînt, prin definiție, singularitățile aplicației de proiecție a subvarietăților legendreene ale varietății de contact $(2n+1)$-dimensionale pe baza $(n+1)$-dimensională a fibrării legendreene.

Să considerăm un spațiu $\mathbf{R}^{2n+1}$ cu structura de contact definită de 1-forma $\omega = x\,dy + dz$, unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Aplicația $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ definește o fibrare legendreană.

Se numește *echivalență* a două fibrări legendreene un difeomorfism între spațiile totale ale fibrărilor care transformă structura de contact și fibrele primei fibrări în structura de contact și respectiv fibrele celei de-a doua. Se poate demonstra că *orice fibrare legendreană este echivalentă cu fibrarea specială descrisă mai sus în vecinătatea oricărui punct al spațiului total al fibrării.*

Structura de contact a spațiului total definește pe fibrele legendreene o structură locală de spațiu proiectiv. Orice echivalență legendreană conservă această structură : ea definește pe fibre transformări local proiective.

Următoarea teoremă permite o descriere locală a subvarietăților și aplicațiilor legendreene cu ajutorul funcțiilor generatoare.

Teoremă. *Pentru orice partiție $I \cup J$ a mulțimii de indici $\{1, \ldots, n\}$ în două submulțimi disjuncte și pentru orice funcție $S(x_I, y_J)$ de n variabile x_i, $i \in I$ și y_j, $j \in J$, formulele*

$$y_I = \frac{\partial S}{\partial x_I}, \quad x_J = -\frac{\partial S}{\partial y_J}, \quad z = S - x_I \frac{\partial S}{\partial x_I}$$

definesc o subvarietate legendreană a lui $\mathbf{R}^{2n+1}$. Reciproc, orice subvarietate legendreană a lui $\mathbf{R}^{2n+1}$ este dată, în vecinătatea fiecărui punct al său, pentru cel puțin una din cele 2^n alegeri posibile ale partiției $I \cup J$, prin formulele indicate.

Demonstrația se bazează pe observația că pe o subvarietate legendreană $dz + x\,dy = 0$ și deci $d(z + x_I y_I) = y_I\,dx_I - x_J\,dy_J$.

Să introducem în formulele teoremei precedente funcţia S dată de una din formele care apar în lista celor mai simple singularităţi legendreene, dată în anexa 12. Se obţin singularităţi lagrangeene care se conservă la deformări mici ale aplicaţiei legendreene $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ (deci trec în singularităţi echivalente la o mică deformare a lui S). Pentru $n < 6$, orice aplicaţie legendreană se poate transforma, printr-o deformare oricît de mică, într-o aplicaţie care are numai singularităţi locale echivalente cu singularităţile din listele $A_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$, $D_k(4 \leqslant k \leqslant 6)$, E_6.

În particular, obţinem în acest mod şi lista singularităţilor fronturilor de undă generice în spaţii cu mai puţin de şapte dimensiuni.

În spaţiul tridimensional uzual lista acestor singularităţi este următoarea :

$$A_1 : S = \pm x_1^2;\ A_2 : S = \pm x_1^3;\ A_3 : S = \pm x_1^4 + x_1^2 y_2,$$

unde $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, $n = 2$.

Proiecţiile subvarietăţilor legendreene indicate aici pe baza fibrării legendreene (deci pe spaţiul cu coordonatele y_1, y_2, z) au un punct critic simplu în cazul A_2 şi o coadă de rîndunică (vezi fig. 246) în cazul A_3.

Prin urmare, un front de undă generic în spaţiul tridimensional are numai muchii de întoarcere şi puncte singulare de tip „coadă de rîndunică". La mişcarea frontului, în momente izolate de timp se observă şi restructurări de cele trei tipuri A_4, D_4^-, D_4^+ (vezi anexa 12, unde sînt reprezentate causticile corespunzătoare descrise de singularităţile frontului de undă în mişcarea lor).

P r o b l e m a 1. Să considerăm o elipsă în plan pe fiecare normală interioară a elipsei, un segment de lungime t. Desenaţi curba obţinută şi studiaţi-i singularităţile atunci cînd t variază.

P r o b l e m a 2. Efectuaţi aceeaşi analiză pentru un elipsoid cu trei axe (inegale) în spaţiul tridimensional.

L. Contactizarea. În paralel cu simplectizarea varietăţilor de contact există şi operaţia de contactizare a varietăţilor simplectice care au o formă simplectică omoloagă cu zero.

Contactizata E^{2n+1} a unei varietăţi simplectice (M^{2n}, ω) se construieşte ca spaţiul total al unei fibrări cu fibra $\mathbf{R}$ peste M^{2n}.

Fie U o vecinătate suficient de mică a unui punct $x \in M$, pe care există un sistem de coordonate canonice p, q în care $\omega^2 = dp \wedge dq$. Să considerăm produsul direct $U \times \mathbf{R}$ cu coordonatele p, q, z.

Fie $V \times \mathbf{R}$ produsul direct construit similar cu o altă vecinătate V (sau eventual, cu $V = U$) şi cu alte coordonate P, Q, Z; $dP \wedge dQ = \omega^2$. Dacă $U \cap V \neq \varnothing$, atunci pentru orice punct din această intersecţie identificăm fibrele corespunzătoare celor două produse directe în aşa fel încît forma $dz + p\,dq = dZ + P\,dQ = \alpha$ să fie global definită (acest lucru este posibil deoarece $P\,dQ - p\,dq$ este o diferenţială totală pe $U \cap V$).

Se verifică uşor că în urma lipirii apare o fibrare E^{2n+1} peste M^{2n} şi că forma α defineşte pe E^{2n+1} o structură de contact. Varietatea E^{2n+1} se numeşte *contactizata* varietăţii simplectice M^{2n}. Dacă clasa de omologie a formei ω^2 este întreagă, atunci se poate defini o contactizare cu fibra S^1.

M. Integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi. Fie M^{2n+1} o varietate de contact şi E^{2n} o hipersuprafaţă în M^{2n+1}. Structura de contact pe M defineşte pe E o anumită structură geometrică şi, în particular, un cîmp de direcţii care se numesc *direcţii caracteristice*. Analiza acestei structuri geometrice permite să se reducă integrarea ecuaţiilor neliniare generale cu derivate parţiale de ordinul întîi la integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare.

Presupunem aici că subvarietatea E^{2n} este transversală în fiecare punct al său la hiperplanul de contact. În acest caz, în fiecare punct x a lui E^{2n} intersecţia dintre spaţiul tangent TE_x^{2n} şi hiperplanul de contact din x este un subspaţiu de dimensiune $2n-1$ al lui TE_x^{2n} şi deci pe E^{2n} apare un cîmp de hiperplane. În plus, structura de contact pe M^{2n+1} defineşte pe E^{2n} un cîmp de plane care sînt conţinute în hiperplanele $(2n-1)$-dimensionale puse în evidenţă mai sus.

Într-adevăr, fie α o 1-formă pe M^{2n+1} care defineşte local structura de contact, $\omega^2 = d\alpha$ şi $K_x \approx \mathbf{R}^{2n}$ hiperplanul de contact în punctul $x \in E^{2n}$. Fie $\Phi = 0$ o ecuaţie locală a lui E^{2n} (presupunem deci că $d\Phi\Big|_x \neq 0$).

Restricţia lui $d\Phi\Big|_x$ la K_x defineşte o formă liniară nenulă pe K_x. 2-forma ω_x^2 înzestrează pe K_x cu o structură simplectică liniară şi deci cu un izomorfism între spaţiul K_x şi dualul său. 1-formei nenule $\left(d\Phi\Big|_x\right)\Big|_{K_x}$ îi corespunde deci un vector nenul

$\xi_x \in K_x$ astfel încît $\mathrm{d}\Phi\Big|_x (\cdot) = \omega_x^2(\xi_x, \cdot)$. Vectorul ξ_x se numește *vectorul caracteristic* al varietății E^{2n} în punctul x. Vectorul caracteristic ξ_x este conținut în intersecția dintre spațiul K_x și spațiul tangent la E^{2n} în punctul x, deoarece $\mathrm{d}\Phi\Big|_x (\xi_x) = 0$.

Vectorul ξ_x nu este definit univoc de varietatea E^{2n} și structura de contact pe M: el poate fi înmulțit cu un număr real nenul. Într-adevăr, atît 2-forma ω_x^2 pe K_x, cît și 1-forma $\mathrm{d}\,\Phi\Big|_x$ pe K_x sînt definite numai pînă la multiplicarea cu un număr real nenul.

Direcțiile vectorilor caracteristici (deci dreptele care conțin acești vectori) sînt însă definite univoc de structura de contact, în toate punctele lui E^{2n}.

Prin urmare, pe hipersuprafața E din varietatea de contact M apare un cîmp de direcții *caracteristice*.

Curbele integrale ale acestui cîmp de direcții se numesc *caracteristice*.

Să presupunem că se dă o subvarietate $(n-1)$-dimensională I a hipersuprafeței E^{2n} și că I este varietate integrală pentru cîmpul de contact (altfel spus, în fiecare punct al lui I, spațiul tangent la I este conținut în hiperplanul de contact).

Teoremă. *Dacă în punctul $x \in I$ caracteristica de pe E^{2n} nu este tangentă la I, atunci în vecinătatea punctului x caracteristicile de pe E^{2n} care trec prin punctele lui I formează o subvarietate legendreană L^n a lui M^{2n+1}.*

D e m o n s t r a ț i e . Fie ξ cîmpul de vectori pe E^{2n} definit de vectorii caracteristici. Conform formulei de omotopie avem pe E^{2n}: $L_\xi \alpha = \mathrm{d} i_\xi \alpha + i_\xi\, \mathrm{d}\alpha$.

Dar $i_\xi \alpha = 0$, vectorul caracteristic aparținînd hiperplanului de contact. Prin urmare, pe E^{2n} avem $L_\xi\, \alpha = i_\xi \omega$. Dar 1-forma $i_\xi\, \omega$ se anulează pe intersecția dintre spațiul tangent la E^{2n} și hiperplanul de contact (într-adevăr, pe hiperplanul de contact avem $i_\xi \omega = \mathrm{d}\Phi$, iar pe cel tangent $\mathrm{d}\Phi = 0$). Prin urmare, pe spațiul tangent la E^{2n} avem $i_\xi \omega = c\,\alpha$. În final, pe hipersuprafața E^{2n} are loc egalitatea

$$L_\xi\, \alpha = c\, \alpha$$

(unde c este o funcție netedă în vecinătatea punctului x).

Fie acum $\{g^t\}$ curentul (local) al cîmpului ξ și η un vector tangent la E^{2n}. Să punem $\eta(t) = g^t_* \eta$ și $y(t) = \alpha(\eta(t))$. Atunci funcția y satisface ecuația diferențială liniară

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c(t)\, y(t).$$

Dacă $\eta(0)$ este tangent la I, atunci $y(0) = \alpha(\eta(0)) = 0$. Prin urmare, $y(t) = \alpha(\eta(t)) = 0$ și deci $\eta(t)$ este conținut în hiperplanul de contact, pentru orice t. Rezultă că $g^t I$ este o varietate integrală a cîmpului de contact și deci varietatea formată reunind varietățile $g^t I$ pentru t mic este legendreană. Teorema este demonstrată.

E x e m p l u . Să considerăm spațiul numeric $\mathbf{R}^{2n+1}$ cu coordonatele $x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n; u$ și cu structura de contact definită de 1-forma $\alpha = \mathrm{d}u - p\,\mathrm{d}x$. O funcție $\Phi(x, p, u)$ definește o ecuație diferențială $\Phi(x, \partial u/\partial x, u) = 0$ și o subvarietate $E^{2n} = \Phi^{-1}(0)$ a spațiului $\mathbf{R}^{2n+1}$ ($\mathbf{R}^{2n+1}$ se numește *spațiul 1-jeturilor de funcții pe* $\mathbf{R}^n$).

A da o *condiție inițială* pentru ecuația $\Phi = 0$ înseamnă a da o valoare f a funcției u pe o hipersuprafață Γ de dimensiune $n-1$ din spațiul n-dimensional cu coordonatele $x_1, \ldots, x_n$.

Condiția inițială definește derivatele lui u în cele $n-1$ direcții independente tangente în fiecare punct la Γ. Derivata lui u în direcția transversală poate fi obținută, în general, din ecuația diferențială; dacă în cadrul acestui procedeu sînt satisfăcute ipotezele în care funcționează teorema funcțiilor implicite, atunci condiția inițială se numește *necaracteristică*.

O condiție inițială necaracteristică definește o subvarietate integrală $(n-1)$-dimensională I a formei α (care este graficul aplicației $u = f(x)$, $p = p(x)$, $x \in \Gamma$). Caracteristicile de pe E care intersectează pe I formează o subvarietate legendreană a lui $\mathbf{R}^{2n+1}$ care este graficul aplicației $u = u(x)$, $p = \partial u/\partial x$.

Funcția obținută $u(x)$ este soluție a ecuației $\Phi(x, \partial u/\partial x, u) = 0$, cu condiția inițială $u\Big|_\Gamma = f$.

Să observăm că pentru a găsi funcția u trebuie să rezolvăm sistemul de $2n$ ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi pentru caracteristicile de pe E^{2n} și să efectuăm o serie de operații „algebrice".

ANEXA 5

SISTEME DINAMICE CU SIMETRIE

Conform teoremei lui E. Noether grupurile cu un parametru de simetrie ale unui sistem dinamic definesc integrale prime. Dacă sistemul admite un grup de simetrie mai larg, atunci apar mai multe integrale prime.

Varietăţile comune de nivel constant ale acestor integrale prime în spaţiul fazelor sînt varietăţi invariante ale curentului hamiltonian. Un subgrup al grupului de simetrie care lasă pe loc o varietate invariantă, acţionează pe ea. În multe cazuri se poate considera varietatea-factor a varietăţii invariante în raport cu acest subgrup. Această varietate-factor se numeşte spaţiul de faze redus. Spaţiul de faze redus are o structură simplectică naturală. Sistemul hamiltonian iniţial induce pe spaţiul de faze redus un sistem care este şi el hamiltonian.

Fibrarea spaţiului fazelor în varietăţile comune de nivel constant ale integralelor prime are, în general, singularităţi. Un exemplu îl constituie fibrarea planului fazelor dată de curbele de nivel constant ale energiei.

În anexa de faţă se tratează pe scurt sistemele dinamice în spaţiile de fază reduse şi legătura lor cu varietăţile invariante din spaţiul de faze iniţial. Toate aceste probleme au fost studiate de către Jacobi şi Poincaré („eliminarea nodurilor" în problema mai multor corpuri, „coborîrea ordinului" în sistemele cu simetrie, „rotaţiile permanente" ale unui solid rigid etc. O tratare amănunţită în terminologia contemporană se găseşte în articolele lui S. Smale, *Topology and Mechanics*, I, II, Inventiones Mathematicae 10, *4* (1970), 305—331; 11, *1* (1970), 45—64) şi ale lui J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of Symmplectic Manifolds with Symmetry*", Reports on Mathematical, Physics 5, *1* (1974), 121—130.

A. Acţiuni Poisson ale grupurilor Lie. Să considerăm o varietate simplectică (M^{2n}, ω^2) şi fie G un grup Lie care acţionează pe M^{2n} ca grup de difeomorfisme simplectice. Fiecare grup cu un parametru al lui G acţionează atunci ca un curent local-hamiltonian pe M. În multe din cazurile importante aceşti curenţi au funcţii Hamilton uniforme*).

E x e m p l u . Fie V o varietate netedă şi G un grup de difeomorfisme ale lui V. Orice difeomorfism transformă 1-formele pe V în 1-forme pe V şi deci grupul G acţionează şi pe fibrarea cotangentă $M = T^*V$.

Reamintim că pe fibrarea cotangentă este întotdeauna definită 1-forma diferenţială canonică α (forma $p\,dq$) şi structura simplectică naturală $\omega = d\alpha$. Acţiunea lui G pe M este simplectică, deoarece ea conservă 1-forma α şi deci şi 2-forma $d\alpha$.

Un subgrup cu un parametru $\{g^t\}$ al lui G defineşte pe M un curent. Se verifică uşor că acest curent are o funcţie Hamilton uniformă, şi anume această funcţie a lui Hamilton H este dată de formula teoremei lui Noether

$$H(x) = \alpha\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x\right), \text{ unde } x\in M.$$

Să presupunem că se dă o asemenea acţiune a grupului Lie G pe varietatea simplectică conexă M încît oricărui element a al algebrei Lie a grupului G îi corespunde un grup cu un parametru de difeomorfisme canonice cu funcţia lui Hamilton uniformă H_a. Aceste funcţii Hamilton sînt definite pînă la un termen aditiv constant care poate fi ales astfel încît H_a să depindă liniar de a. Pentru aceasta este suficient ca să se aleagă arbitrar constantele în funcţiile lui Hamilton corespunzătoare vectorilor unei baze arbitrare a algebrei Lie a grupului G, după care se defineşte funcţia lui Hamilton asociată unui element arbitrar al algebrei ca fiind combinaţia liniară corespunzătoare a celor de bază.

Prin urmare, pentru acţiunea simplectică a grupului G cu hamiltonieni uniformi (univoci) pe M se poate construi o aplicaţie liniară a algebrei Lie a grupului G în algebra Lie a funcţiilor lui Hamilton pe M. Prin intermediul acestei aplicaţii liniare, comutatorului $[a, b]$ a două elemente din algebra Lie îi corespunde funcţia $H_{[a,b]}$ care este egală cu paranteza lui Poisson (H_a, H_b) sau *se deosebeşte de această paranteză printr-o constantă*:

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b) + C(a, b).$$

O b s e r v a ţ i e . Apariţia constantei C în această formulă este legată de un fenomen interesant: existenţa unei clase de coomologie de dimensiune doi pentru algebra Lie a cîmpurilor de vectori (global) hamiltoniene.

*) Bine definite global. (*N. T.*)

Mărimea $C(a, b)$ este o funcţie biliniară antisimetrică pe algebra Lie. Din identitatea lui Jacobi rezultă că

$$C([a, b], c) + C([b, c], a) + C([c, a], b) = 0.$$

O funcţie biliniară antisimetrică pe o algebră Lie care are această ultimă proprietate se numeşte *cociclu bidimensional* al algebrei Lie.

Dacă constantele aditive din funcţiile lui Hamilton se aleg altfel, atunci cociclul C se schimbă în C', unde

$$C'(a, b) = C(a, b) + p([a, b]),$$

unde p este o funcţie liniară pe algebra Lie.

Un astfel de cociclu C' se numeşte *coomolog* cu cociclul C.

O clasă de cociclii coomologi între ei se numeşte *clasă de coomologie* a algebrei Lie.

Prin urmare, *o acţiune simplectică a grupului G pentru care există hamiltonieni uniformi defineşte o clasă bidimensională de coomologie a algebrei Lie a grupului G.*

Această clasă de coomologie măsoară abaterea acţiunii respective faţă de o acţiune în care funcţia lui Hamilton asociată comutatorului poate fi aleasă ca fiind egală cu paranteza lui Poisson a funcţiilor Hamilton ale elementelor ce apar în comutator.

D e f i n i ţ i e. O acţiune a unui grup Lie conex pe o varietate simplectică se numeşte *acţiune Poisson* dacă funcţiile Hamilton ale subgrupurilor cu un parametru sînt uniforme şi alese astfel încît funcţia lui Hamilton depinde liniar de elementul din algebra Lie şi funcţia lui Hamilton a unui comutator este egală cu paranteza lui Poisson a funcţiilor lui Hamilton :

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b).$$

Cu alte cuvinte, o acţiune Poisson a unui grup defineşte un omomorfism al algebrei Lie a acestui grup în algebra Lie a funcţiilor lui Hamilton.

E x e m p l u. Fie V o varietate netedă şi G un grup Lie care acţionează pe V ca grup de difeomorfisme. Fie $M = T^*V$ fibrarea cotangentă a varietăţii V cu structura simplectică uzuală $\omega = d\alpha$. Funcţiile lui Hamilton ale subgrupurilor cu un parametru se definesc ca mai sus :

$$H_a(x) = \alpha\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x\right), \quad x \in T^*V.$$

Teoremă. *Acţiunea construită este de tip Poisson.*

D e m o n s t r a ţ i e. Conform definiţiei 1-formei α, funcţia lui Hamilton H_a este liniară şi omogenă „în impulsuri" (adică pe fiecare spaţiu cotangent). Prin urmare, şi paranteza lui Poisson a două funcţii ale lui Hamilton este liniară şi omogenă. Prin urmare, funcţia

$$H_{[a,b]} - (H_a, H_b)$$

este liniară şi omogenă în impulsuri. Fiind o constantă, ea este egală cu zero, ceea ce trebuia demonstrat.

În mod analog se verifică că simplectizata unei acţiuni de contact este o acţiune Poisson.

E x e m p l u. Fie V spaţiul euclidian tridimensional şi G grupul cu şase parametri al mişcărilor sale. O bază în algebra Lie este definită de şase subgrupuri cu un parametru : translaţiile cu viteza 1 de-a lungul celor trei axe de coordonate q_1, q_2, q_3 şi rotaţiile cu viteza unghiulară 1 în jurul acestor axe. Funcţiile lui Hamilton corespunzătoare sînt egale, conform formulei (1) (şi în notaţiile corespunzătoare sînt egale, conform formulei (1) (şi în notaţiile uzuale) cu p_1, p_2, p_3 şi respectiv M_1, M_2, M_3, unde $M_1 = q_2p_3 - q_3p_2$ ş.a.m.d. Teorema demonstrată are aici următoarea semnificaţie : pentru oricare două dintre aceste şase funcţii, paranteza lui Poisson este egală cu funcţia lui Hamilton a comutatorului grupurilor cu un parametru corespunzătoare.

O acţiune Poisson a grupului G pe varietatea simplectică M defineşte o aplicaţie a lui M în spaţiul dual al algebrei Lie a grupului :

$$P : M \to \mathfrak{g}^*.$$

Şi anume, să fixăm un punct $x \in M$ şi să considerăm funcţia pe algebra Lie $\mathfrak{g}$ a lui G, care asociază fiecărui element $a \in \mathfrak{g}$ valoarea hamiltonianului H_a în punctul fixat x :

$$p_x(a) = H_a(x).$$

Funcţia $p_x : \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ este liniară şi deci $p_x \in \mathfrak{g}^*$: p_x este un element al spaţiului dual al algebrei Lie ; asociind acest element punctului x, obţinem

$$P(x) = p_x.$$

Urmînd propunerea lui Souriau, vom denumi aplicaţia P *moment.* Subliniem că valorile momentului sînt totdeauna vectori ai spaţiului liniar $\mathfrak{g}^*$.

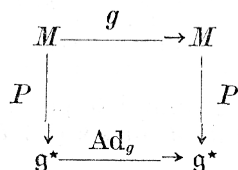
E x e m p l u. Fie V o varietate netedă, G — un grup Lie care acţionează pe V ca grup de difeomorfisme, $M = T^*V$ — fibrarea cotangentă şi H_a — funcţia lui Hamilton a acţiunii lui Poisson a lui G pe M, construită mai sus (vezi (1)).

Atunci aplicaţia „moment", $P : M \to \mathfrak{g}^*$ poate fi descrisă în modul următor. Să considerăm aplicaţia $\Phi_x : G \to M$ definită de acţiunea tuturor elementelor grupului G asupra unui punct fixat x din M (deci $\Phi_x(g) = g \cdot x$). 1-forma canonică α pe M induce o 1-formă $\Phi_x^*\alpha$ pe G. Restricţia acesteia la spaţiul tangent în elementul unitate al lui G este o formă liniară pe algebra Lie.

Prin urmare, am asociat fiecărui punct $x \in M$ o formă liniară $\Phi_x^* \alpha | TG_e$ pe algebra Lie. Se verifică uşor că aplicaţia $M \to \mathfrak{g}^*$ astfel obţinută coincide cu momentul acţiunii lui Poisson considerate.

În particular, dacă V este spaţiul euclidian tridimensional, iar G este grupul rotaţiilor în jurul punctului O, atunci valorile momentului sînt vectorii momentului cinetic uzual ; dacă G este grupul rotaţiilor în jurul unei axe, atunci valorile momentului sînt momentele cinetice relativ la această axă. În sfîrşit, dacă G este grupul translaţiilor, atunci valorile momentului sînt vectorii impuls.

Teoremă. *O acţiune Poisson a unui grup Lie conex se transformă prin P în acţiunea coadjunctă a grupului G pe spaţiul dual $\mathfrak{g}^*$ al algebrei Lie* $\mathfrak{g}$ (vezi anexa 2) ; *altfel spus, diagrama*



este comutativă, pentru orice $g \in G$.

Corolar. *Să presupunem că funcţia lui Hamilton $H : M \to \mathbf{R}$ este invariantă în raport cu acţiunea Poisson a grupului G pe M. Atunci momentul este integrală primă a sistemului cu funcţia lui Hamilton H.*

D e m o n s t r a ţ i a t e o r e m e i. Teorema afirmă că funcţia lui Hamilton H_a a grupului cu un parametru de difeomorfisme h^t este transformată prin difeomorfismul g în funcţia lui Hamilton $H_{Ad_g a}$ a grupului cu un parametru $gh^t g^{-1}$. Fie g^s grupul cu un parametru cu funcţia lui Hamilton H_b. Este suficient să arătăm că derivatele în raport cu s (la $s=0$) ale funcţiilor $H_a(g^s x)$ şi $H_{\mathrm{Ad}_{g^s} a}(x)$ coincid, pentru orice $x \in M$. Prima derivată este egală cu valoarea în punctul x a parantezei lui Poisson (H_a, H_b) a funcţiilor H_a şi H_b. A doua derivată este $H_{[a,b]}(x)$. Acţiunea lui G fiind de tip Poisson, teorema este demonstrată.

D e m o n s t r a ţ i a c o r o l a r u l u i. Derivata oricărei componente a momentului în direcţia cîmpului de vectori cu funcţia lui Hamilton H este egală cu zero, ea fiind egală cu derivata funcţiei H în direcţia dată de curentul corespunzător unui subgrup cu un parametru al lui G, c.c.t.d.

B. Spaţiul de faze redus. Fie dată o acţiune Poisson a grupului G pe varietatea simplectică M. Să considerăm o mulţime de nivel constant al momentului, adică imaginea reciprocă prin aplicaţia P a unui punct anumit $p \in \mathfrak{g}^*$. Vom nota această mulţime cu M_p, astfel încît (fig. 238)

$$M_p = P^{-1}(p).$$

În multe dintre cazurile importante, mulţimea M_p este o varietate. Acest lucru se va întîmpla, de exemplu, cînd p este o

valoare regulată a momentului : diferenţiala lui P în orice punct $x \in M_p$ aplică spaţiul tangent TM_x la M în x pe întregul spaţiu tangent în p la $\mathfrak{g}^*$.

Grupul G, acţionînd pe M, permută, în general, mulţimile M_p între ele. Dacă însă considerăm subgrupul de izotropie (staţionar) al punctului p în raport cu acţiunea coadjunctă (este vorba de grupul format din elementele $g \in G$ pentru care $\mathrm{Ad}_g^* p = p$), atunci

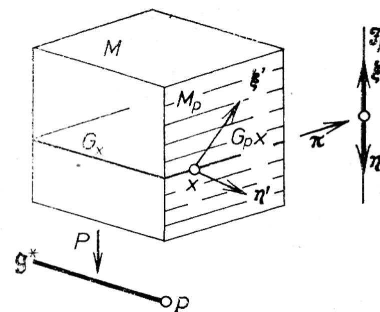


Fig. 238. Spaţiul de faze redus.

acest subgrup lasă pe M_p pe loc. Să notăm acest subgrup de izotropie cu G_p. Grupul G_p este grup Lie şi el acţionează pe mulţimea M_p de nivel constant al momentului.

Spaţiul de faze redus se obţine din M_p prin factorizare în raport cu acţiunea grupului G_p. Pentru ca această factorizare să aibă sens*) trebuie să facem cîteva ipoteze. De exemplu, este suficient să presupunem că

1) p este o valoare regulată şi deci M_p este o varietate.
2) Grupul de izotropie G_p este compact.
3) Elementele grupului G_p acţionează pe M_p fără puncte fixe.

O b s e r v a ţ i e. Aceste condiţii pot fi slăbite. De exemplu, în locul ipotezei de compacitate a grupului G_p, putem presupune că acţiunea lui G_p pe M_p este proprie (deci că imaginile reciproce ale mulţimilor compacte prin aplicaţia $(g, x) \mapsto (g(x), x)$ sînt compacte). De exemplu, acţiunea unui grup pe el însuşi prin translaţii la stînga sau dreapta este totdeauna proprie.

Dacă condiţiile 1) 2) şi 3) sînt îndeplinite este uşor să se definească o structură de varietate diferenţiabilă (netedă) pe spaţiul orbitelor acţiunii lui G_p pe M_p. Astfel, putem lua drept hartă în

*) Pentru ca spaţiul-factor să fie o varietate. (*N. T.*)

vecinătatea orbitei punctului $x \in M_p$ orice suprafață transversală la orbita $G_p x$ și de codimensiune egală cu codimensiunea orbitei.

Varietatea orbitelor astfel obținută se numește *spațiul de faze redus al sistemului cu simetrie*.

Vom nota cu F_p spațiul de faze redus corespunzător valorii p a momentului. Varietatea F_p este baza unei fibrări $\pi : M_p \to F_p$ cu fibrele difeomorfe cu grupul G_p.

Pe spațiul de faze redus F_p există o structură simplectică naturală. Într-adevăr, să considerăm doi vectori arbitrari ξ, η, tangenți la F_p în punctul $f \in F_p$. Punctul f este una din orbitele grupului G_p în varietatea M_p. Fie x un punct din această orbită. Vectorii ξ și η se obțin din niște vectori ξ', $\eta' \in T(M_p)_x$ tangenți la M_p în x prin proiecția $\pi : M_p \to F_p$*).

D e f i n i ț i e. Se numește *produsul scalar antisimetric* al vectorilor ξ și η tangenți într-un punct la spațiul de faze redus produsul scalar antisimetric a doi vectori corespunzători ξ', η' tangenți la varietatea simplectică inițială M:

$$[\xi, \eta]_p = [\xi', \eta'] \; (\xi', \eta' \in T(M_p)_x.$$

Teoremă**). *Produsul scalar antisimetric al vectorilor ξ și η nu depinde de alegerea punctului x și a reprezentanților ξ' și η' și definește o structură simplectică pe spațiul de faze redus.*

Corolar. *Spațiul de faze redus este de dimensiune pară.*

D e m o n s t r a ț i a t e o r e m e i. Să considerăm în spațiul tangent la M în punctul x următoarele două subspații:

$T(M_p)_x$ — spațiul tangent la varietatea de nivel constant a momentului M_p;

$T\,(Gx)_x$ — spațiul tangent la orbita Gx a grupului G.

Lemă. *Aceste două subspații sînt fiecare complementul antiortogonal al celuilalt în TM_x.*

D e m o n s t r a ț i e. Un vector ζ aparține complementului antiortogonal al spațiului tangent la orbita grupului G atunci și numai atunci cînd produsele scalare antisimetrice ale vectorului ζ cu vectorii viteză ai curenților hamiltonieni dați de acțiunea lui G sînt nule (conform definiției). Dar aceste produse scalare antisimetrice

*) Mai exact, $\xi = \pi_{*x}(\xi')$, $\eta = \pi_{*x}(\eta')$. (*N.T.*).

**) Sub această formă această teoremă a fost formulată pentru prima dată de Marsden și Weinstein. (Vezi și K. Meyer, *Symmetries and Integrals in Mechanics, Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973).

Diverse cazuri particulare au fost considerate încă de pe vremea lui Jacobi și utilizate de Poincaré și urmașii săi în mecanică, de Kirillov și Kostant în teoria grupurilor și de Fadeev în teoria generală a relativității.

sînt egale cu derivatele funcțiilor lui Hamilton corespunzătoare în direcția vectorului ζ. Prin urmare, vectorul ζ aparține complementului antiortogonal al spațiului tangent la orbita grupului G dacă și numai dacă derivata momentului în direcția lui ζ este egală cu zero, deci dacă și numai dacă $\zeta \in T(M_p)_x$. Prima afirmație a lemei este demonstrată: a doua este evidentă.

Reprezentanții ξ' și η' sînt definiți pînă la adăugarea unui vector din spațiul tangent la orbita grupului G_p. Acest spațiu tangent este însă intersecția $T(Gx)_x \cap T(M_p)_x$ dintre spațiul tangent la orbita Gx și spațiul tangent la varietatea M_p (datorită ultimului punct al teoremei de la punctul A). Prin urmare, adăugarea la ξ' a unui vector din $T(G_p x)_x$ nu modifică produsele scalare antisimetrice cu vectorii $\eta' \in T(M_p)_x$ (într-adevăr, conform lemei $T(G_p x)_x$ este antiortogonal la $T(M_p)_x$). În acest mod am demonstrat independența de alegerea reprezentanților ξ' și η'.

Independența mărimii $[\xi, \eta]_p$ de alegere a punctului x în orbita f rezultă din faptul că acțiunea lui G pe M este simplectică și din invarianța lui M_p. Prin urmare, pe F_p este definită 2-forma diferențială:

$$\Omega_p(\xi, \eta) = [\xi, \eta]_p.$$

Această formă este nedegenerată. Într-adevăr, dacă $[\xi, \eta]_p = 0$ pentru orice η, atunci reprezentantul corespunzător ξ' este antiortogonal la întregul subspațiu $T(M_p)_x$, deci este un element din complementul antiortogonal al lui $T(M_p)_x$ în TM_x. Conform lemei, $\xi' \in T(Gx)_x$ deci $\xi = 0$.

Forma Ω_p este închisă. Pentru a ne convinge de acest lucru, să considerăm o hartă arbitrară, deci o suprafață în M_p care intersectează transversal orbita grupului G_p într-un punct.

Forma Ω_p este reprezentată în această hartă de 2-forma indusă de 2-forma ω care definește structura simplectică pe întreg spațiul M prin scufundarea suprafeței. Forma ω fiind închisă și forma indusă este închisă. Teorema este astfel demonstrată.

E x e m p l u l 1. Fie $M = \mathbf{R}^{2n}$ spațiul euclidian de dimensiune $2n$ cu coordonatele p_k, q_k și 2-forma $\sum dp_k \wedge dq_k$. Fie $G = S^1$ cercul unitate, iar acțiunea lui G pe M — cea definită de hamiltonianul oscilatorului liniar

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (p_k^2 + q_k^2).$$

Aplicația moment este pur și simplu $H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$, varietatea de nivel constant nenul a momentului este sfera S^{2n-1} iar spațiul-factor, spațiul proiectiv complex $\mathbf{C}P^{n-1}$.

Prin urmare, teorema precedentă definește o structură simplectică pe spațiul proiectiv complex. Este ușor de verificat că această structură coincide (pînă la un factor) cu cea pe care am construit-o în anexa 3.

E x e m p l u l 2. Fie V un grup Lie și G același grup; acțiunea lui G pe V este dată de translațiile la dreapta. Atunci M_p este

30 — c. 1719

subvarietatea fibrării tangente a grupului formată din acei vectori pentru care translatatele la dreapta în elementul unitate al grupului dau același element în spațiul dual algebrei Lie, $\mathfrak{g}^*$.

Prin urmare, varietatea M_p este difeomorfă cu grupul G și este imaginea unei acțiuni invariante la dreapta a fibrării cotangente. Toate valorile p sînt regulate.

Subgrupul de izotropie G_p al punctului p este format din acele elemente g ale grupului pentru care translațiile la stînga și la dreapta cu g ale lui p dau același rezultat. Fiecare element al grupului G_p diferit de elementul unitate, acționează pe M_p fără puncte fixe (deoarece translațiile la dreapta pe grup nu au puncte fixe).

Grupul G_p acționează propriu (vezi observația de la p. 463). Prin urmare, spațiul de orbite al acțiunii grupului G_p pe M_p este o varietate simplectică.

Dar acest *spațiu de orbite* se identifică ușor cu *orbita* lui p în reprezentarea coadjunctă. Într-adevăr, să aplicăm secțiunea invariantă la dreapta M_p a fibrării tangente în spațiul cotangent la grup în elementul unitate prin translații la *stînga*. Obținem o aplicație

$$\rho : M_p \to \mathfrak{g}^*.$$

Imaginea acestei aplicații este orbita punctului p în reprezentarea coadjunctă iar fibrele sale — orbitele acțiunii grupului G_p. În acest mod, structura simplectică a spațiului de faze redus definește o structură simplectică pe orbitele reprezentării coadjuncte.

Se verifică ușor că această structură coincide cu cea pe care am discutat-o în anexa 3.

Exemplul 3. Fie grupul $G = S^1$ cercul unitate și să presupunem că el acționează fără puncte fixe pe varietatea V. Atunci este definită o acțiune Poisson a cercului pe fibrarea cotangentă $M = T^*V$. Putem defini varietatea de nivel constant M_p a momentului (care are codimensiunea 1 în M) și spațiul de faze redus F_p (a cărui dimensiune este cu doi mai mică decît cea a lui M).

În plus, putem considera și varietatea-factor a varietății V, identificînd între ele toate punctele fiecărei orbite a acțiunii grupului G pe V. Să notăm acest spațiu de orbite cu W.

Teoremă. *Spațiul de faze redus este simplectic difeomorf*) cu fibrarea cotangentă a spațiului de configurații factorizat W.*

*) Cu alte cuvinte, între cele două varietăți există un difeomorfism simplectic (care transformă una în alta structurile simplectice). J.-M. Souriau a introdus termenii de „simplectomorfism'' și „varietăți simplectomorfe''. (*N. T.*)

Demonstrație. Fie $\pi : V \to W$ proiecția canonică și $\sigma \in T^*W_w$ o 1-formă pe W în punctul $w = \pi(v)$, $v \in V$. Forma $\pi^*\sigma \in T^*V_v$ este un element din M_0 și prin factorizare definește un punct din F_0. Reciproc, elementele din F_0 sînt 1-forme invariante pe V care se anulează pe orbite; ele definesc 1-forme pe W. Am construit deci o aplicație $T^*W \to F_0$; se verifică ușor că această aplicație este un difeomorfism simplectic.

Cazul $p \neq 0$, se reduce la cazul $p = 0$ în modul următor. Să considerăm pe V_0 o metrică riemanniană invariantă în raport cu G*). Pentru orice punct $v \in V$, intersecția lui M_p cu spațiul cotangent la V în punctul v, $M_p \cap T^*V_p$, este un hiperplan. Forma pătratică care dă metrica are în acest hiperplan un punct unic de minim $s(v)$. Aplicația $\nu \mapsto \nu - s(v) : T^*V_v \to T^*V_v$ transformă hiperplanul $M_p \cap T^*V_v$ în subspațiul $M_0 \cap T^*V_v$ și se obține un difeomorfism $F_p \to F_0$. Teorema este deci demonstrată.

C. Aplicații la studiul rotațiilor staționare și al bifurcațiilor varietăților invariante. Să presupunem că grupul G acționează Poisson pe varietatea simplectică M și fie H o funcție pe M invariantă la acțiunea lui G. Fie F_p spațiul de faze redus (presupunem că sînt îndeplinite condițiile în care acest spațiu poate fi definit).

Cîmpul de vectori hamiltonian cu funcția lui Hamilton H este tangent la varietatea M_p de nivel constant a momentului (momentul este integrală primă). Cîmpul de vectori care se obține în acest fel pe M_p este invariant în raport cu G_p și definește un cîmp pe spațiul de faze redus.

Teoremă. *Cîmpul de vectori redus pe spațiul de faze redus este hamiltonian. Valoarea funcției lui Hamilton a cîmpului redus într-un punct oarecare al spațiului de faze redus este egală cu valoarea funcției lui Hamilton inițiale H în punctul corespunzător al spațiului de faze inițial.*

Demonstrație. Relația care definește cîmpul de vectori hamiltonian X_H cu hamiltonianul H, pe varietatea simplectică (M, ω), este

$$dH(\xi) = \omega(X_H, \xi), \text{ pentru orice cîmp } \xi$$

și ea implică o relație similară pentru cîmpul redus, datorită definiției structurii simplectice pe F_p, c.c.t.d.

Exemplu. Să considerăm un corp rigid asimetric care are un punct fix și se află sub acțiunea forței gravitaționale (sau

*) O astfel de metrică există întotdeauna: se ia o metrică Riemann arbitrară pe V și se mediază această metrică pe G; $G = S^1$ fiind un grup compact, media este bine definită (finită) și ne furnizează metrica invariantă căutată. (*N. T*)

a altei forțe care derivă dintr-un potențial simetric în raport cu axa verticală).

Pe spațiul configurațiilor SO(3) acționează grupul S^1 al rotațiilor în jurul axei verticale. Funcția lui Hamilton este invariantă în raport cu rotațiile și deci se obține un sistem redus pe spațiul de faze redus.

În cazul nostru spațiul de faze redus este fibrarea cotangentă a spațiului de configurații factorizat (vezi exemplul 3, p. 466). Factorizarea spațiului configurațiilor în raport cu acțiunea grupului rotațiilor în jurul axei verticale a fost efectuată de Poisson în modul următor.

Vom da poziția corpului rigid printr-un reper ortonormat ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Cele trei componente verticale ale vectorilor reperului determină un vector în spațiul numeric euclidian tridimensional. Lungimea acestui vector este egală cu 1 (de ce?). Acest *vector* γ *al lui Poisson**) determină reperul inițial pînă la o rotație în jurul axei verticale (de ce?).

Prin urmare, spațiul configurațiilor factorizat este sfera bidimensională S^2, iar spațiul de faze redus este fibrarea cotangentă T^*S^2 a sferei.

Funcția lui Hamilton redusă pe fibrarea cotangentă a sferei este suma dintre „energia cinetică a mișcării reduse" care este pătratică în raport cu vectorii cotangenți (pe fibră) și „potențialul efectiv" (care include energia potențială și energia cinetică de rotație în jurul axei verticale).

Trecerea la spațiul de faze reduse este aproape echivalentă în cazul nostru cu „eliminarea coordonatei ciclice φ". Diferența este următoarea: în cadrul procedurii obișnuite de eliminare, se cere ca spațiul configurațiilor sau spațiul fazelor să fie un produs direct (al unui spațiu) cu cercul, în timp ce în cazul nostru el este numai o fibrare. Această fibrare poate fi transformată într-un produs direct cu prețul micșorării spațiului configurațiilor (și anume prin introducerea coordonatelor cu singularități la poli); avantajul metodei de abordare de mai sus constă în clarificarea faptului că nu există nici un fel de singularități în vecinătatea polilor (exceptînd singularitățile sistemului de coordonate).

---

*) Poisson a arătat că ecuațiile de mișcare ale corpului rigid se exprimă prin intermediul vectorului γ în forma remarcabil de simplă a „ecuațiilor Euler-Poisson"

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}] = \mu g[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}], \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}].$$

D e f i n i ț i e. Orbitele de pe M care se proiectează pe pozițiile de echilibru ale sistemului redus de pe spațiul de faze redus F_p se numesc *echilibre relative* ale sistemului inițial.

E x e m p l u. Rotațiile staționare ale unui corp rigid, fixat în centrul de inerție sînt echilibre relative.

De asemenea, sînt echilibre relative și mișcările unui corp rigid greu care se reduc la rotații cu viteză constantă în jurul axei verticale.

Teoremă. *O orbită a unui sistem cu o funcție a lui Hamilton G-invariantă este echilibru relativ dacă și numai dacă ea este și orbită a unui subgrup cu un parametru al grupului G prin acțiunea pe spațiul de faze inițial.*

D e m o n s t r a ț i e. Este evident că o orbită a sistemului care este și orbită a grupului se proiectează într-un punct. Dacă orbita $x(t)$ se proiectează într-un punct, atunci ea se poate reprezenta univoc sub forma $x(t) = g(t)\,x(0)$ și atunci se vede ușor că $\{g(t)\}$ este un subgrup c.c.t.d.

Corolarul 1. *Un corp rigid asimetric care se găsește într-un potențial cu simetrie axială și este fixat într-un punct aflat pe axa de simetrie a potențialului are cel puțin două rotații staționare (pentru orice valoare a momentului cinetic relativ la axa de simetrie).*

Corolarul 2. *Un corp rigid cu o axă de simetrie, aflat într-un cîmp de forțe ce derivă dintr-un potențial arbitrar și fixat într-un punct de pe axa de simetrie are cel puțin două rotații staționare (pentru orice valoarea momentului cinetic relativ la axa de simetrie).*

Ambele corolare rezultă din faptul că o funcție definită pe sferă are cel puțin două puncte critice.

O altă aplicație a echilibrelor relative constă în posibilitatea de a studia comod cu ajutorul lor așezarea, din punct de vedere topologic, în spațiul fazelor a varietăților invariante de energie și moment constant.

Teoremă. *Punctele critice ale aplicației «moment — energie»*

$$P \times H : M \to \mathfrak{g}^* \times \mathbf{R}$$

situate pe o mulțime M_p de nivel constant regulat p a momentului coincid cu punctele echilibrelor relative.

D e m o n s t r a ț i e. Punctele critice ale aplicației $P \times H$ sînt extremele condiționate ale energiei restrictate la varietatea M_p de nivel constant a momentului (deoarece varietatea de nivel considerată este regulată, deci $P_* (TM_x) = T_p\mathfrak{g}^*$, pentru orice $x \in M_p$).

Extremele condiționate ale funcției H pe M_p dau, prin factorizare în raport cu grupul G_p, punctele critice ale funcției lui Hamilton reduse (într-adevăr, H este invariantă în raport cu G_p). Teorema este demonstrată.

Studierea efectivă, în cazurile concrete, a echilibrelor relative şi singularităţilor aplicaţiei moment-energie nu este simplă şi nu este complet făcută nici măcar într-o problemă clasică cum este problema mişcării unui corp rigid asimetric cu punct fix în cîmpul gravitaţional. Cazul în care centrul de greutate este situat pe una din axele de inerţie a fost clarificat de S. B. Katok în anexa la traducerea în limba rusă din revista Uspehi Matem Nauk, 27, *2* (1972), 78–133, a articolelor lui S. Smale*).

În această problemă dimensiunea spaţiului de faze este şase, iar grupul de simetrie — cercul unitate; spaţiul de faze redus T^*S^2 este de dimensiune patru.

Varietăţile de nivel constant necritic ale energiei, în spaţiul redus, sînt (în funcţie de valorile momentului şi energiei) de următoarele patru tipuri: S^3, $S^2 \times S^1$, $\mathbf{R}P^3$ şi „covrigul" care se obţine din sfera S^3 de dimensiune trei prin lipirea a două „mînere" de forma

$$S^1 \times D^2 \ (D^2 \text{ este discul } \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}).$$

* Vezi de asemenea:
E. Lacomba, *Mechanical systems with symmetry on homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., *185* (1973), 477–491. (*N.T.*)
Ia. V. Tatarinov, *Asupra topologiei spaţiului fazelor configuraţiilor compacte cu simetrie*, Vestnik Mosk. Univ. Mat. — Meh., *5* (1973).
Ia. V. Tatarinov, *Portretele integralelor clasice ale problemei rotaţiei unui solid rigid în jurul unui punct fix*, Vestnik Mosk. Univ. Mat.—Meh., *6* (1974).

ANEXA 6

FORMELE NORMALE ALE HAMILTONIENILOR PĂTRATICI

În anexa de faţă se expune tabelul formelor normale la care se poate aduce un hamiltonian pătratic prin transformări simplectice liniare. Acest tabel a fost alcătuit de D. M. Galin pe baza lucrării lui J. Williamson, *On an algebraic problem concerning the normal forms of liniar dynamical systems*, Amer. Journ. of Math., 58 *1* (1936), 141–163.

În lucrarea lui Williamson sînt indicate formele normale la care se poate reduce o formă pătratică într-un spaţiu simplectic peste un corp arbitrar.

A. Notaţii. Vom scrie hamiltonianul sub forma

$$H = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

unde $\mathbf{x} = (p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ este vectorul scris într-o bază simplectică şi A este un operator liniar simetric. Ecuaţiile canonice corespunzătoare au atunci forma

$$\dot{\mathbf{x}} = IA\mathbf{x}, \text{ unde } I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom denumi *valori proprii* ale hamiltonianului valorile proprii ale operatorului infinitezimal-simplectic IA. În mod similar, prin celulă Jordan vom înţelege o celulă Jordan a operatorului IA.

Valorile proprii ale hamiltonianului sînt de patru tipuri: perechi reale $(a, -a)$, perechi pur imaginare (ib, ib), cvadruplete $(\pm a \pm ib)$ şi valori proprii nule.

Celulele Jordan corespunzătoare celor doi membrii ai unei perechi sau celor patru membrii ai unui cvadruplet au totdeauna aceeași structură.

În cazurile în care partea reală a unei valori proprii este egală cu zero, trebuie făcută deosebirea între celulele Jordan de ordin par și cele de ordin impar. Celulele de ordin impar cu valoare proprie nulă sînt în număr par și se împart în mod natural în perechi.

Lista finală de forme normale este următoarea.

B. Hamiltonienii. Unei perechi de celule Jordan de ordinul k cu valori proprii reale $\pm a$ îi corespunde hamiltonianul

$$H = -a \sum_{j=1}^{k} p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}.$$

Unui cvadruplet de celule Jordan de ordinul k cu valorile proprii $\pm a \pm ib$ îi corespunde hamiltonianul

$$H = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^{k} (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}) + \sum_{j=2}^{2k-2} p_j q_{j+2}.$$

Unei perechi de celule Jordan de ordinul k cu valoarea proprie zero îi corespunde hamiltonianul

$$H = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \quad (\text{pentru } k = 1,\ H = 0).$$

Unei celule Jordan de ordinul $2k$ cu valoarea proprie zero îi corespunde un hamiltonian cu exact una din următoarele două forme:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{k-j} - \sum_{j=1}^{k} q_j q_{k-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}$$

$\left(\text{dacă } k = 1, \text{ forma este } H = \pm \frac{1}{2} q_1^2\right)$. Hamiltonienii cu semne opuse la primul termen nu se pot transforma unul în celălalt.

Unei perechi de celule Jordan de ordinul impar $2k+1$ cu valorile proprii pur imaginare $\pm ib$ îi corespunde un hamiltonian cu exact una din următoarele două forme:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{k} (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3}) \right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}.$$

Cînd $k = 0$, $H = \pm \frac{1}{2} (b^2 p_1^2 + q_1^2)$. Hamiltonienii cu semne opuse la primul termen pot fi transformați unul în altul.

Unei perechi de celule Jordan de ordinul par $2k$ cu valorile pur imaginare $\pm ib$ îi corespunde un hamiltonian cu una din următoarele două forme:

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{b^2} q_{2j-1} q_{2k-2j+1} + q_{2j} q_{2k-2j+2} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} (b^2 p_{2j+1} p_{2k-2j+1} + p_{2j+2} p_{2k-2j+2}) \right] - b^2 \sum_{j=1}^{k} p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^{k} p_{2j} q_{2j-1}.$$

$\left(\text{pentru } k = 1,\ H = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} q_1^2 + q_2^2 \right) - b^2 q_1 q_2 + p_2 q_1 \right)$. Și aici cei doi hamiltonieni, cu semne diferite la primul termen, nu se pot transforma unul în altul printr-o transformare simplectică reală.

Teorema lui Williamson. *Orice spațiu liniar real simplectic pe care este definită o formă pătratică H se descompune într-o sumă directă de subspații simplectice reale antiortogonale astfel încît forma H se scrie ca sumă de forme de tipurile indicate mai sus pe aceste subspații.*

C. Celule Jordan neeliminabile. Un hamiltonian dat „generic" nu are valori proprii multiple și se aduce la o formă simplă (cu toate celulele Jordan de ordinul întîi). Dacă se consideră însă nu un hamiltonian individual, ci o întreagă familie de sisteme, care depind de parametri, atunci pentru anumite valori excepționale ale parametrilor pot apărea structuri jordaniene mai complicate. O parte din acestea pot fi înlăturate prin deformări mici ale familiei, altele însă nu pot fi eliminate prin deformări mici. Dacă numărul l de parametri ai familiei este finit, atunci astfel de cazuri neeliminabile dintr-o familie l-parametrică sînt în număr finit. Teorema lui Galin formulată mai jos permite enumerarea tuturor acestor cazuri pentru l fixat.

Să notăm cu $n_1(z) \geqslant n_2(z) \geqslant \ldots \geqslant n_s(z)$, $s = s(z)$, dimensiunile celulelor Jordan cu valoarea proprie $z \neq 0$ și cu $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_u$ și $\widetilde{m}_1 \geqslant \widetilde{m}_2 \geqslant \ldots \geqslant \widetilde{m}_v$ dimensiunile celulelor Jordan cu valoarea proprie zero, m_j fiind pare și $\widetilde{m}_j$ impare (din fiecare pereche de celule de dimensiune impară se socotește numai una).

Teoremă. *În spațiul tuturor hamiltonienilor pătratici, varietatea hamiltonienilor cu dimensiunile celulelor Jordan indicate are codimensiunea* :

$$c = \frac{1}{2} \sum_{z \neq 0} \left[\sum_{j=1}^{s(z)} (2j-1)\, n_j(z) - 1 \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{u} (2j-1)\, m_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{v} [2(2j-1)\, \widetilde{m}_j + 1 \Big] + 2 \sum_{j=1}^{u} \sum_{k=1}^{v} \min\{m_j, \widetilde{m}_k\}.$$

(Observăm că dacă zero nu este valoare proprie atunci în sumă numai primul termen este nenul).

Corolar. *În familiile de sisteme hamiltoniene liniare care depind generic de l parametri, apar numai sisteme cu celule Jordan a căror structură este de așa natură încît numărul c calculat mai sus nu întrece pe l : toate cazurile cu număr c mai mare ca l se pot înlătura printr-o deformare oricît de mică a familiei.*

Corolar. *În familiile cu una sau doi parametri apar ca neeliminabile numai celule Jordan de următoarele* 12 *tipuri* :

$$l = 1 : (\pm a)^2, \quad (\pm \mathrm{i}a)^2, 0^2$$

(aici celulele Jordan sînt notate prin determinanții lor : de exemplu, $(\pm a)^2$ înseamnă perechea de celule Jordan de ordinul doi cu valorile proprii a și respectiv $-a$) ;

$$l = 2 : (\pm a)^3, (\pm \mathrm{i}a)^3, \quad (\pm a \pm \mathrm{i}b)^2, \quad 0^4, (\pm a)^2 (\pm b)^2,$$

$$(\pm \mathrm{i}a)^2 (\pm \mathrm{i}b)^2, (\pm a)^2 (\pm \mathrm{i}b)^2, (\pm a)^2 0^2, (\pm \mathrm{i}a)^2 0^2$$

(celelalte valori proprii sînt simple).

Galin a calculat de asemenea și formele normale la care se poate aduce orice familie de sisteme hamiltoniene liniare care depinde neted de parametri, printr-o schimbare liniară de coordonate care depinde și ea neted de parametri. Spre exemplu, pentru celula Jordan cea mai simplă $(\pm a)^2$, forma normală în acest sens a hamiltonianului este

$$H(\lambda) = -a(p_1 q_1 + p_2 q_2) + p_1 q_2 + \lambda_1 p_1 q_1 + \lambda_2 p_2 q_1$$

(λ_1 și λ_2 — parametri).

ANEXA 7

FORMELE NORMALE ALE SISTEMELOR HAMILTONIENE ÎN VECINĂTATEA PUNCTELOR FIXE ŞI A TRAIECTORIILOR ÎNCHISE

Adesea, atunci cînd se studiază comportarea soluţiilor ecuaţiilor lui Hamilton în vecinătatea unei poziţii de echilibru este insuficientă restrîngerea la ecuaţia liniarizată. Într-adevăr, în sistemele hamiltoniene nu pot apărea poziţii de echilibru asimptotic stabile şi aceasta datorită teoremei lui Liouville privind conservarea volumului. Din acest motiv, stabilitatea sistemului liniarizat este de tip neutru : valorile proprii ale părţii liniare a unui cîmp de vectori hamiltonian într-o poziţie de echilibru stabilă sînt situate toate pe axa imaginară.

Pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale de formă generală o astfel de stabilitate de tip neutru poate fi distrusă printr-o perturbaţie neliniară oricît de mică. Pentru sistemele hamiltoniene, situaţia este mai complexă. De exemplu, să presupunem că partea pătratică a dezvoltării funcţiei lui Hamilton în poziţia de echilibru (aceasta defineşte partea liniară a cîmpului de vectori) este definită (pozitiv sau negativ). Atunci funcţia lui Hamilton are un maxim sau un minim în poziţia de echilibru şi prin urmare, această poziţie de echilibru este stabilă (în sens Liapunov şi nu asimptotic) nu numai pentru sistemul liniarizat, ci şi pentru sistemul neliniar complet.

Se poate însă ca partea pătratică a funcţiei lui Hamilton într-o poziţie de echilibru stabilă să nu fie definită ca semn. Un exemplu simplu este furnizat de funcţie $H = p_1^2 + q_1^2 - p_1^2 - q_2^2$. Studiul stabilităţii sistemului cu o astfel de parte pătratică trebuie să ţină seama de termenii de ordinul următor ai seriei Taylor şi în primul rînd de termenii cubici ai funcţiei lui Hamilton (deci de termenii pătratici ai cîmpului de vectori-viteză din spaţiul fazelor). Acest studiu se efectuează mai comod dacă se aduce funcţia lui Hamilton (şi deci şi cîmpul de vectori hamiltonian) la o eventuală

formă mai simplă, printr-o transformare canonică de variabile adecvată.

Cu alte cuvinte, pentru a studia soluţiile este util să se aleagă un sistem de coordonate canonice în vecinătatea poziţiei de echilibru astfel încît, în măsura posibilităţilor, să se simplifice forma funcţiei lui Hamilton şi a ecuaţiilor de mişcare.

Pentru cîmpurile de vectori de formă generală (nehamiltoniene) problema analoagă se rezolvă uşor ; situaţia generică în acest caz este : în vecinătatea poziţiei de echilibru şi într-un sistem adecvat de coordonate, cîmpul de vectori devine liniar (teoremele corespunzătoare Poincaré şi Siegel se găsesc, de exemplu, în cartea lui C. L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer Verlag, Berlin, 1956) (vezi şi J. Moser, C. L. Siegel, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

În cazul hamiltonian, situaţia este mai complicată. Prima dificultate : în general, aducerea unui cîmp de vectori hamiltonian la forma normală liniară printr-o transformare canonică a variabilelor nu este posibilă. Anume, de obicei se poate „omorî" partea cubică a funcţiei lui Hamilton, dar nu se pot omorî toţi termenii de ordinul patru (acest lucru este legat de faptul că într-un sistem liniar frecvenţa oscilaţiilor nu depinde de amplitudine în timp ce într-un sistem neliniar, în general, depinde). Dificultatea indicată se ocoleşte prin alegerea unei forme normale neliniare care să ţină seama de schimbarea frecvenţelor (aşa-numita variaţie a frecvenţelor). Drept rezultat se pot (în aşa-numitul caz nerezonant) introduce, în vecinătatea poziţiei de echilibru, coordonate acţiune-unghi astfel încît sistemul să devină integrabil modulo termeni de ordin oricît de mare din seria Taylor.

Această procedură permite să se studieze comportarea sistemului pe intervale de timp mari şi pentru condiţii iniţiale în vecinătatea poziţiei de echilibru. Aceasta este însă insuficient pentru a determina dacă poziţia de echilibru este stabilă sau nu în sens Liapunov (datorită faptului că, pe un interval de timp nemărginit, influenţa termenilor de ordin superior — restul seriei lui Taylor — care au fost înlăturaţi poate distruge stabilitatea). Stabilitatea în sens Liapunov ar rezulta dacă sistemul hamiltonian s-ar putea reduce exact la o formă normală similară, fără neglijarea termenilor reziduali. Se poate însă demonstra că această reducere exactă este, în general, imposibilă, iar seriile formale pentru transformările canonice care reduc sistemul la forma normală sînt în cazul general, cu adevărat divergente.

Divergența acestor serii este legată de faptul că posibilitatea reducerii la forma normală ar atrage după sine o comportare mai simplă a orbitelor (ele ar trebui să fie înfășurătoare cvasiperiodice pe toruri) decît cea care are loc în realitate. Comportarea unei poziții de echilibru a unui sistem hamiltonian se analizează în anexa 8. În anexa de față sînt expuse rezultatele formale privind aducerea la forma normală modulo termenii de ordin mare.

Ideea reducerii sistemelor hamiltoniene la forme normale își are originea în lucrările lui Lindstedt și Poincaré*); formele normale în vecinătatea unei poziții de echilibru au fost studiate amănunțit de către G. D. Birkhoff (vezi G. D. Birkhoff, *Dynamical systems* New York, 1927; revised edition, 1966). Formele normale pentru cazurile degenerate sînt date în lucrarea lui A. D. Briuno, *Forma analitică a ecuațiilor diferențiale*, Trudî M.M.O., vol. 25 și 26).

A. Forma normală a unui sistem conservativ în vecinătatea unei poziții de echilibru. Să presupunem că, în aproximația liniară, poziția de echilibru a sistemului hamiltonian cu n grade de libertate pe care îl studiem este stabilă și că toate cele n frecvențe proprii $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sînt diferite. Atunci partea pătratică a hamiltonianului se reduce, printr-o transformare liniară, la forma

$$H = \frac{1}{2}\,\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \ldots + \frac{1}{2}\,\omega_n(p_n^2 + q_n^2).$$

(O parte din numerele ω_k pot fi negative).

D e f i n i ț i e. Frecvențele proprii $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *satisfac o relație de rezonanță de ordinul* K dacă există numerele întregi k_l nu toate egale cu zero pentru care

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0, \qquad |k_1| + \ldots + |k_n| = K.$$

Definiție. Se numește *formă normală Birkhoff de grad s pentru un hamiltonian dat* un polinom de grad s în coordonatele canonice (P_l, Q_l) care, în realitate este un polinom $\left(\text{de grad}\left[\frac{s}{2}\right]\right)$ în variabilele $\tau_l = \frac{1}{2}(P_l^2 + Q_l^2)$.

*) Vezi H. P o i n c a r é *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, **vol. I**, Paris, 1892.

De exemplu, pentru sistemele cu un grad de libertate forma normală de grad $2m$ (sau $2m+1$) are expresia

$$H_{2m} = H_{2m+1} = a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_m\tau^m,$$

$$\tau = \frac{1}{2}(p^2 + Q^2),$$

iar pentru cele cu două grade de libertate, forma normală Birkhoff de grad patru are expresia

$$H = a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_{11}\tau_1^2 + 2a_{12}\tau_1\tau_2 + a_{22}\tau_2^2.$$

Coeficienții a_1 și a_2 reprezintă frecvențele proprii, iar coeficienții a_{ij} descriu dependența frecvențelor de amplitudine.

Teoremă. *Să presupunem că frecvențele proprii* ω_l *nu satisfac nici o relație de rezonanță de ordin mai mic sau egal cu s. Atunci există un sistem de coordonate canonice în vecinătatea poziției de echilibru astfel încît în acest sistem funcția lui Hamilton se reduce la forma normală a lui Birkhoff de grad s, modulo termeni de ordin* $s+1$:

$$H(p, q) = H_s(P, Q) + R, \qquad R = O(|P| + |Q|)^{s+1}$$

Demonstrația acestei teoreme se face ușor în sistemul de coordonate complexe

$$z_l = p_l + iq_l, \quad w_l = p_l - iq_l$$

(la trecerea la acest sistem trebuie înmulțit hamiltonianul cu $-2i$). Dacă termenii de grad mai mic ca N care nu intră în forma normală au fost deja omorîți, atunci o transformare canonică cu funcția generatoare $Pq + S_N(P, q)$ (unde S_N este un polinom de grad N) modifică în dezvoltarea lui Taylor a funcției lui Hamilton numai termenii de grad mai mic sau egal cu N.

La o astfel de transformare canonică, coeficientul monomului de grad N din funcția lui Hamilton, care este de forma

$$z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} w_1^{\beta_1} \ldots w_n^{\beta_n} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n = N)$$

se schimbă, după cum se verifică ușor, cu mărimea

$$s_{\alpha\beta}\,[\lambda_1(\beta_1 - \alpha_1) + \ldots + \lambda_n(\beta_n - \alpha_n)],$$

unde $\lambda_l = i\omega_l$ și $s_{\alpha\beta}$ este coeficientul termenului $z^\alpha w^\beta$ din dezvoltarea funcției $S_N(p, q)$ în raport cu variabilele z, w.

În ipotezele făcute, privind absența rezonanțelor, coeficientul lui $s_{\alpha\beta}$ dintre parantezele pătrate este diferit de zero, exceptînd cazul în care monomul nostru se exprimă prin intermediul produselor $z_l \cdot w_l = 2\tau_l$ (deci cînd $\alpha_l = \beta_l$, $1 \leqslant l \leqslant n$). Prin urmare, putem omorî toți termenii de grad N, cu excepția acelora care se exprimă prin variabilele τ_l. Luînd $N = 3, 4, \ldots$ obținem ceea ce trebuia demonstrat.

La utilizarea teoremei lui Birkhoff este util să se observe că sistemul al cărui hamiltonian este forma normală se integrează complet. Astfel, să considerăm „coordonatele polare canonice" τ_l, φ_l, care sînt legate de P_l și Q_l prin formulele

$$P_l = \sqrt{2\tau_l} \cos \varphi_l, \qquad Q_l = \sqrt{2\tau_l} \sin \varphi_l.$$

Deoarece hamiltonianul se exprimă numai prin coordonatele acțiune sistemul este complet integrabil și descrie mișcări cvasiperiodice pe torurile $\tau = \text{const}$, cu frecvențele $\omega = \partial H / \partial \tau$. În particular, poziția de echilibru $P = Q = 0$ a formei normale este stabilă.

B. Forma normală a unei transformări canonice în vecinătatea unui punct fix. Să considerăm o transformare canonică (care păstrează pur și simplu aria) a planului în plan. Să presupunem că această transformare lasă pe loc originea coordonatelor și că partea sa liniară în origine are valorile proprii $\lambda = e^{\pm i\alpha}$ (altfel spus, este o rotație de unghi α într-un sistem adecvat de coordonate canonice p, q). O astfel de transformare se numește *eliptică*.

D e f i n i ț i e. *Se numește formă normală a lui Birkhoff de grad s pentru transformări o transformare canonică a planului în plan, care este o rotație de unghi variabil și este polinomială de grad cel mult $m = \left[\frac{s}{2}\right] - 1$ în raport cu variabila acțiune τ a unui sistem canonic de coordonate polare :*

$$(\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \ldots + \alpha_m \tau^m)$$

unde

$$p = \sqrt{2\tau} \cos \varphi, \quad q = \sqrt{2\tau} \sin \varphi.$$

Teorema 2. *Dacă valoarea proprie λ a unei transformări canonice eliptice nu este rădăcină a unității de ordinul mai mic sau egal cu s, atunci această transformare se reduce, printr-o transformare canonică de variabile, la forma normală a lui Birkhoff de grad s, modulo termeni de ordin mai mare sau egal cu $s+1$.*

Generalizarea în dimensiuni superioare a noțiunii de transformare eliptică este produsul direct a n rotații eliptice ale planelor (p_j, q_j) cu valorile proprii $\lambda_j = e^{\pm i\alpha_j}$. Forma normală Birkhoff de grad s corespunzătoare este dată de formula

$$(\tau, \varphi) \mapsto \left(\tau, \varphi + \frac{\partial S}{\partial \tau}\right),$$

unde S este un polinom de grad cel mult $\left[\frac{s}{2}\right]$ în variabilele acțiune τ

Teorema 3. *Dacă valorile proprii λ_j ale unei transformări canonice eliptice multidimensionale nu admit rezonanțe de ordin cel mult s*

$$\lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} = 1, \qquad |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant s,$$

atunci această transformare se reduce la forma normală a lui Birkhoff de grad s (cu eroare în termenii de grad s din dezvoltarea aplicației în serie Taylor în punctul $p = q = 0$).

C. Formele normale ale ecuațiilor cu coeficienți periodici în vecinătatea pozițiilor de echilibru. Fie $p = q = 0$ poziția de echilibru a unui sistem cu funcția lui Hamilton dependentă 2π — periodic de timp. Presupunem că ecuația liniarizată este redusă printr-o transformare simplectică liniară și periodică de timp la o formă autonomă liniară cu frecvențele proprii $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Vom spune că sistemul este rezonant de ordin $K > 0$ dacă există o relație

$$k_1 \omega_1 + \ldots + k_n \omega_n + k_0 = 0$$

cu numere întregi $k_0, k_1, \ldots, k_n$, pentru care $k_1 + \ldots + k_n = K$.

Teoremă. *Dacă sistemul nu este rezonant de ordin mai mic sau egal cu s, atunci există o transformare canonică care depinde 2π — periodic de timp și care reduce sistemul în vecinătatea poziției de echilibru, la aceeași formă normală a lui Birkhoff de grad s ca și aceea a sistemului autonom, cu diferență că termenii reziduali R de grad mai mare sau egal cu $s+1$ depind periodic de timp.*

În sfîrșit, să presupunem dată o traiectorie închisă a unui sistem de ecuații Hamilton autonome. Putem atunci reduce sistemul

la o formă normală în vecinătatea acestei traiectorii, utilizînd oricare din următoarele două metode:

1) Reducerea izoenergetică: fixăm valoarea constantă a energiei și considerăm o vecinătate a traiectoriei închise în subvarietatea $(2n-1)$-dimensională de nivel constant a energiei ca fiind spațiul de faze extins al unui sistem cu $n-1$ grade de libertate și dependent periodic de timp.

2) Suprafața de secțiune: fixăm valoarea constantă a energiei și valoarea uneia din coordonate (în așa fel încît suprafața $(2n-2)$-dimensională astfel obținută să intersecteze transversal traiectoria închisă). Atunci orbitele vecine orbitei periodice considerate definesc o aplicație a acestei suprafețe de secțiune $(2n-2)$-dimensionale în ea însăși, avînd ca punct fix intersecția suprafeței cu orbita închisă. Această aplicație conservă structura simplectică naturală de pe suprafața de secțiune $(2n-2)$ dimensională și deci o putem studia cu ajutorul formei normale de la punctul B.

În studierea traiectoriilor închise ale sistemelor hamiltoniene autonome apare un aspect nou în comparație cu studierea pozițiilor de echilibru ale sistemelor cu coeficienți periodici. Și anume, traiectoriile închise ale sistemelor autonome nu sînt dispuse izolat ci formează (de regulă) familii cu un parametru.

Parametrul familiei este valoarea constantei energiei. Într-adevăr, să presupunem că pentru o alegere a valorii constantei energiei traiectoria închisă intersectează transversal suprafața de secțiune $(2n-2)$-dimensională descrisă mai sus și situată în subvarietatea de nivel constant a energiei, care este de dimensiune $2n-1$. Atunci, și pentru valori ale constantei energiei vecine cu cea aleasă va exista o traiectorie închisă asemănătoare. Conform teoremei funcțiilor implicite putem chiar afirma că această traiectorie închisă depinde neted de valoarea constantei energiei.

Dacă vrem să utilizăm forma normală a lui Birkhoff pentru a studia familia cu un parametru de traiectorii închise, ne lovim de următoarele dificultăți. Atunci cînd variază parametrul, familia valorilor proprii ale problemei liniarizate variază, în general, și ea. Prin urmare, pentru anumite valori ale parametrului apar în mod inevitabil rezonanțe care împiedică reducerea la forma normală.

Deosebit de periculoase sînt rezonanțele de ordin inferior, deoarece ele influențează chiar primii termeni ai seriei lui Taylor. Dacă ne interesează o traiectorie închisă pentru care valorile proprii sînt aproape de a satisface o relație de rezonanță, atunci

forma normală a lui Birkhoff trebuie puțin modificată. Și anume, în cazul unei rezonanțe de ordinul N se anulează cîteva din expresiile

$$k_0 - [\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + \ldots + \omega_n(\beta_n - \alpha_n)], \quad |\alpha| + |\beta| = N,$$

care apar ca numitori atunci cînd se disting termenii de grad N din funcția lui Hamilton. Pentru valori ale parametrului care nu corespund unei rezonanțe, dar sînt aproape de o rezonanță, fiecare din combinațiile de frecvențe indicate mai sus nu este, în general, zero, dar este destul de mică (din acest motiv, o astfel de combinație se numește «*numitor mic*»).

Împărțirea cu un numitor mic conduce la următoarele două fenomene:

1) transformarea care reduce hamiltonianul la forma normală depinde discontinuu de parametru (ea are un pol în valoarea de rezonanță a parametrului);

2) domeniul în care forma normală a lui Birkhoff descrie bine sistemul se contractă la zero în momentul rezonanței.

Pentru a elimina aceste neajunsuri, trebuie să renunțăm la distrugerea unor termeni din hamiltonian (și anume, a acelora care devin rezonanți pentru valori de rezonanță ale parametrului). *Acești termeni trebuie păstrați nu numai pentru valoarea de rezonanță a parametrului, ci și pentru valori vecine**⁾.

Forma normală care se obține ca rezultat al acestui procedeu este ceva mai complicată decît cea obișnuită, dar în multe cazuri din ea se pot extrage informații utile privind comportarea soluțiilor în vecinătatea rezonanței.

D. Exemplu: studiul rezonanței de ordinul 3. Să studiem, ca un exemplu simplu, ce se întîmplă cu o traiectorie închisă a unui sistem hamiltonian autonom cu două grade de libertate în vecinătatea unei valori a constantei energiei pentru care perioada oscilațiilor traiectoriilor vecine cu traiectoria închisă dată este de trei ori mai mare decît perioada mișcării pe această traiectorie.

Conform cu cele discutate mai sus, această problemă se reduce la studierea unei familii cu un parametru de sisteme hamiltoniene neautonome cu un grad de libertate, care depind 2π-periodic de

*⁾ Procedeul indicat aici este util nu numai pentru studierea sistemelor hamiltoniene, ci și în teoria generală a ecuațiilor diferențiale. Vezi, de exemplu, V. I. Arnold, *Lecții despre bifurcații și familiile versale*, Uspehi Matem. Nauk, 27, 5, (1972), 120–184.

timp, în vecinătatea poziţiei de echilibru. Putem considera că această poziţie de echilibru este originea coordonatelor, indiferent de valoarea parametrului (pentru a realiza acest lucru, trebuie să facem o schimbare de variabile care depinde de parametru).

În continuare, să observăm că sistemul liniarizat în poziţia de echilibru poate fi transformat într-un sistem liniar cu coeficienţi constanţi cu ajutorul unei transformări canonice liniare de coordonate care depinde 2π-periodic de timp. În coordonatele astfel obţinute, curentul sistemului liniarizat reprezintă o rotaţie uniformă în jurul poziţiei de echilibru. Viteza unghiulară ω a acestei rotaţii depinde de parametru.

Pentru valoarea de rezonanţă a parametrului, $\omega = \frac{1}{3}$ (altfel spus, în timpul 2π se efectuează o treime dintr-o rotaţie completă în jurul originii coordonatelor). Derivata vitezei unghiulare ω în raport cu parametrul este generic diferită de zero. Prin urmare, putem lua ca nou parametru chiar această viteză unghiulară sau, şi mai bine, abaterea ei de la valoarea 1/3. Vom nota această valoare cu ε; ea se numeşte dezacord de *frecvenţă*. Valoarea de rezonanţă a parametrului este acum $\varepsilon = 0$. Ceea ce ne interesează este comportarea sistemului pentru valori mici ale lui ε.

Dacă se neglijează termenii neliniari din ecuaţiile lui Hamilton şi se neglijează şi dezacordul ε, atunci toate traiectoriile sistemului nostru se închid, după ce efectuează trei rotaţii (altfel spus, au perioada 6π). Vrem acum să determinăm ce influenţă au termenii neliniari şi dezacordul de frecvenţă ε asupra comportării sistemului. Este evident că în cazul general nu este posibil ca toate traiectoriile să se închidă. Pentru a studia comportarea lor, este util să considerăm forma normală.

În sistemul de coordonate ales $z = p + iq$, $\bar{z} = p - iq$, funcţia lui Hamilton are forma

$$-2iH = -i\omega z\bar{z} + \sum_{\alpha+\beta=3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{\alpha\beta k} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} e^{ikt} + \ldots,$$

unde prin puncte se notează termenii de ordinul mai mare ca trei şi $\omega = \frac{1}{3} + \varepsilon$.

Atunci cînd reducem hamiltonianul la forma normală putem omorî toţi termenii de ordinul trei, cu excepţia acelora pentru care numitorul mic

$$\omega(\alpha - \beta) + k$$

se anulează în momentul rezonanţei. Aceşti termeni mai admit şi o altă descriere, şi anume ca fiind aceia care sînt constanţi de-a lungul traiectoriilor mişcării periodice care se obţine prin neglijarea dezacordului ε şi a neliniarităţii. Ei se numesc *termeni rezonanţi*. Prin urmare, pentru rezonanţa $\omega = \frac{1}{3}$, termenii rezonanţi sînt cei pentru care

$$\alpha - \beta + 3k = 0.$$

Se vede că dintre termenii de ordinul trei, rezonanţi sînt numai $z^3 e^{-it}$ şi $\bar{z}^3 e^{it}$. Prin urmare, putem reduce funcţia lui Hamilton la forma

$$-2iH = -i\omega z\bar{z} + hz^3e^{-it} - \bar{h}\bar{z}^3e^{it} + \ldots$$

($\bar{h}$ este conjugatul lui h datorită faptului că H este reală).

Să observăm că pentru a reduce funcţia lui Hamilton la această formă normală am efectuat o transformare canonică netedă care depinde 2π-periodic de timp şi depinde neted de parametru, chiar şi pentru valoarea de rezonanţă. Această transformare diferă de transformarea identică numai prin termeni de ordinul al doilea în raport cu abaterea de la traiectoria închisă (funcţia ei generatoare diferă de funcţia generatoare a transformării identice numai prin termeni cubici).

Pentru a studia în continuare comportarea soluţiilor ecuaţiilor lui Hamilton, se procedează în modul următor. În primul rînd, înlăturăm din hamiltonian toţi termenii de ordin mai mare ca trei şi studiem comportarea sistemului trunchiat astfel obţinut. După aceea trebuie să analizăm cum pot influenţa termenii înlăturaţi asupra comportării sistemului.

Studierea sistemului trunchiat se facilitează prin intermediul introducerii în planul variabilei complexe z a unui sistem de coordonate care se rotesc uniform, cu viteza unghiulară 1/3, deci prin substituţia $z = \zeta\, e^{it/3}$. În acest caz se obţine pentru variabila ζ un sistem hamiltonian autonom cu hamiltonianul

$$-2iH_0 = -i\,\varepsilon\,\zeta\bar{\zeta} + h\,\zeta^3 - \bar{h}\,\bar{\zeta}^3, \quad \text{unde} \quad \varepsilon = \omega - \frac{1}{3}.$$

Faptul că în sistemul de coordonate în rotație sistemul trunchiat devine autonom este o mare reușită. Sistemul complet de ecuații ale lui Hamilton (cu considerarea în hamiltonian a termenilor de grad mai mare ca trei), considerat în sistemul de coordonate în rotație nu numai că nu este autonom, dar nu este nici măcar 2π-periodic în timp (este numai 6π-periodic). Sistemul autonom cu hamiltonianul H_0 este, în esență, rezultatul medierii sistemului inițial pe traiectoriile închise ale sistemului liniar cu $\varepsilon=0$ (neglijăm termenii de grad mai mare ca trei).

Putem considera că h este un coeficient real (aceasta se poate realiza printr-o rotație a sistemului de coordonate). Prin urmare, în coordonatele reale (x, y), funcția lui Hamilton se reduce la forma

$$H_0=\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)+a(x^3-3xy^2).$$

Coeficientul a depinde de dezacordul de frecvență ε ca parametru. Generic, acest coeficient a este diferit de zero pentru $\varepsilon=0$. De aceea, printr-o schimbare de coordonate care depinde neted de parametru, putem realiza ca a să fie 1. În final, trebuie să studiem comportarea tabloului orbitelor din planul fazelor (x, y) al sistemului cu hamiltonianul

$$H_0=\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)+(x^3-3xy^2)$$

atunci cînd variază parametrul mic ε.

Se vede ușor că modificarea orbitelor constă în următoarele (fig. 239). Pentru $\varepsilon=0$, mulțimea de nivel constant zero al func-

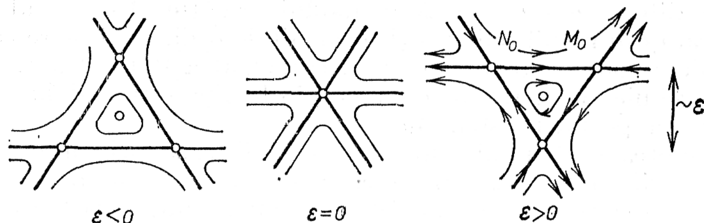


Fig. 239. Trecerea prin rezonanța 3 : 1.

ției H_0 este formată din trei drepte care se intersectează în zero sub unghiuri de 60°. Cînd ε variază, există tot timpul o mulțime de nivel constant compusă din trei drepte; aceste drepte se deplasează prin translație cu variația lui ε, formînd totdeauna un triunghi echilateral cu centrul în originea coordonatelor. Vîrfurile acestui triunghi sînt puncte critice de tip șea ale hamiltonianului. Atunci cînd ε trece prin valoarea zero (deci la trecerea prin rezonanță) punctul critic din originea coordonatelor se transformă dintr-un minim într-un maxim.

Prin urmare, pentru sistemul cu hamiltonianul H_0 originea coordonatelor este o poziție de echilibru stabilă pentru toate valorile parametrului ε, cu excepția valorii de rezonanță $\varepsilon=0$, cînd ea devine instabilă. Pentru valori ale parametrului apropiate de valoarea de rezonanță, triunghiul din vecinătatea originii coordonatelor, umplut de orbite închise, este mic (de ordinul ε) și deci „raza de stabilitate" a originii coordonatelor tinde către zero atunci cînd $\varepsilon \to 0$: este suficientă o perturbație mică (de ordinul ε) a condiției inițiale pentru ca punctul de pe orbită să se afle în afara triunghiului și să înceapă să se îndepărteze de poziția de echilibru.

Reîntorcîndu-ne la problema inițială privind traiectoria periodică, sîntem conduși la următoarele concluzii care, evident, nu sînt demonstrate, deoarece am înlăturat termenii de ordinul mai mare decît trei, dar pot fi fundamentate) :

1. *În momentul trecerii prin rezonanța considerată* 3 :1, *traiectoria periodică își pierde, în general, stabilitatea.*

2. *Pentru valori ale parametrului apropiate de valoarea de rezonanță, în vecinătatea traiectoriei închise considerate pe varietatea corespunzătoare de nivel constant al energiei există o traiectorie închisă instabilă. Ea se închide, învîrtindu-se de trei ori de-a lungul traiectoriei date și efectuînd o rotație în jurul ei. Pentru valoarea de rezonanță a parametrului, această orbită instabilă se confundă cu cea inițială.*

3. *Distanța dintre traiectoria periodică instabilă pusă în evidență mai sus și traiectoria periodică inițială crește la trecerea prin rezonanță ca prima putere a dezacordului de frecvență (deci ca prima putere a abaterii parametrului de la valoarea de rezonanță).*

4. *Prin traiectoria instabilă pusă în evidență, pe varietatea tridimensională de nivel constant a energiei, trec două suprafețe invariante (de dimensiune 2) formate din traiectorii care tind către această traiectorie periodică instabilă atunci cînd* $t \to +\infty$ *pe una dintre suprafețe și cînd* $t \to -\infty$, *pe cealaltă.*

5. *Separatoarele sînt astfel situate încît prin intersecția cu o suprafață, transversală la traiectoria inițială se obține o figură apropiată de cele trei laturi ale triunghiului echilateral și prelungirile*

lor. Vîrfurile triunghiului sînt punctele de intersecție ale traiectoriei periodice instabile cu suprafața transversală.

6. *Pentru condiții inițiale situate în interiorul triunghiului format de separatoare, punctul de pe orbită, rămîne, pe un interval de timp mare (cel puțin de ordin* $1/\varepsilon$), *în vecinătatea traiectoriei periodice inițiale (la o distanță de ordinul* ε), *iar pentru condiții inițiale în exteriorul triunghiului, se îndepărtează destul de repede la o distanță mare în raport cu* ε.

E. Bifurcarea separatoarelor. În realitate, separatoarele despre care este vorba în afirmațiile 4, 5 și 6 sînt construite destul de complicat (din cauza acțiunii termenilor de ordin mai mare ca trei, pe care nu i-am luat în considerare în aproximația noastră). Pentru a ne face o imagine clară, este comod să considerăm o suprafață de secțiune σ bidimensională transversală la traiectoria periodică inițială într-unul din punctele acesteia (și conținută în întregime în varietatea de nivel constant a energiei corespunzătoare).*).

Traiectoriile care încep pe suprafața de secțiune σ o intersectează din nou peste un interval de timp apropiat de perioada traiectoriei închise inițiale. Prin urmare, apare o aplicație a unei vecinătăți a punctului de intersecție a traiectoriei închise cu suprafața σ din suprafața σ în σ. Această aplicație are un punct fix (punctul de intersecție a traiectoriei închise cu suprafața de secțiune σ) și este apropiată de rotația cu 120° în jurul acestui punct, pe care îl luăm ca originea coordonatelor în planul secțiunii σ.

Să considerăm acum a treia iterație a aplicației astfel construite; această nouă aplicație este și ea definită într-o vecinătate a lui zero în secțiunea σ cu valori în secțiunea σ și lasă pe zero pe loc. Această aplicație este însă apropiată de rotația cu 360°, deci de aplicația identică: ea este realizată de traiectoriile sistemului nostru după un timp apropiat de triplul perioadei traiectoriei închise inițiale.

Calculele efectuate ne dau informații netriviale privind structura acestei aplicații după trei perioade. Într-adevăr, înlăturînd termenii de ordin strict mai mare ca trei, schimbăm termenii de ordin strict mai mare ca doi ai aplicației noastre.

*) Aici apare următorul fenomen general: raționamentele se fac mai ușor cu ajutorul aplicației de evoluție după o perioadă, dar de calculat este mai ușor cu ajutorul curenților.

Aplicația după trei perioade care corespunde hamiltonianului trunchiat aproximează (cu o eroare cubică) aplicația după trei perioade reală.

Proprietățile aplicației după trei perioade corespunzătoare hamiltonianului trunchiat ne sînt însă cunoscute, deoarece ea reprezintă aplicația după timpul 6π a curentului cu hamiltonianul $H_0(x, y)$ (demonstrația acestui fapt se bazează pe observația că după timpul 6π, sistemul de coordonate în rotație ales se reîntoarce în poziția inițială). Să vedem acum care dintre aceste proprietăți se conservă la o perturbație mică de ordinul trei în raport cu distanța pînă la punctul fix și care nu.

Să notăm cu $A_0(A)$ aplicația după trei perioade corespunzătoare sistemului trunchiat (respectiv sistemului complet).

1. Aplicația A_0 se include într-un curent: ea este evoluția la timpul 6π a curentului cu hamiltonianul H_0.

Nu există nici un fel de bază pentru a afirma că și aplicația A se include într-un curent.

2. Aplicația A_0 este invariată de rotația cu 120°: există un izomorfism netrivial pentru care $g^3 = E$ și care comută cu A_0.

Nu există nici un fel de bază pentru a afirma că există defeomorfisme g cu $g^3 = E$ care să comute cu aplicația A.

3. Aplicația A_0 are trei puncte fixe instabile situate la distanțe de ordinul ε de originea coordonatelor și în vecinătatea vîrfurilor triunghiului echilateral. Aceasta rezultă din teorema funcțiilor implicite.

4. Separatoarele punctelor fixe ale aplicației A_0 formează (pentru valori ale parametrului care nu sînt de rezonanță, dar în vecinătatea rezonanței) o figură apropiată de laturile triunghiului echilateral și prelungirile acestora. Dacă se pleacă cu un punct situat pe una din laturile triunghiului, atunci, iterînd aplicația A_0 și considerînd imaginile succesive ale punctului ales, se obține un șir de puncte situate pe aceeași latură a triunghiului și care tind către unul din capetele laturii, de exemplu, spre M_0. Aplicînd iteratele lui A_0^{-1} se obține un șir care tinde către celălalt vîrf, pe care îl notăm cu N_0.

Fiecare din cele trei puncte fixe instabile ale aplicației A are și el niște separatoare, apropiate de laturile triunghiului (fig. 240) Mai precis, acele puncte ale planului care tind către punctul fix M formează, atunci cînd li se aplică iteratele A^n, $n \to +\infty$, o curbă netedă Γ^+, invariantă în raport cu A, care trece prin punctul M și este apropiată în vecinătatea punctului M de latura M_0N_0 a

triunghiului format din separatoarele aplicației A_0. Acele puncte care tind către N atunci cînd se aplică A^n, $n \to -\infty$, formează o altă curbă invariantă netedă Γ^-, care trece prin punctul N și este apropiată de M_0N_0 în vecinătatea punctului N_0.

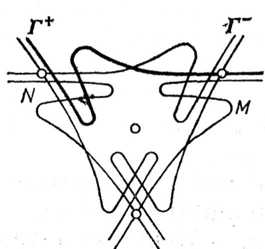


Fig. 240. Bifurcarea separatoarelor.

Cele două puncte curbe Γ^+ *și* Γ^-, *ambele apropiate de dreapta* M_0N_0, *nu trebuie însă nici pe departe să coincidă.* Acesta și este fenomenul bifurcării separatoarelor, care face o distincție fundamentală între comportarea traiectoriilor sistemului complet și cele ale sistemului trunchiat.

Pentru valori mici ale lui ε, mărimea bifurcării separatoarelor este exponențial mică ; din acest motiv, fenomenul bifurcării este ușor de depășit în calculele din cadrul uneia sau alteia din schemele „teoriei perturbațiilor''. Acest fenomen este însă important din punct de vedere principial. De exemplu, din existența lui rezultă imediat *divergența* seriilor diverselor variante ale teoriei perturbațiilor (într-adevăr, dacă seriile ar fi fost convergente, nu ar fi apărut bifurcația).

În general, divergența seriilor din teoria perturbațiilor (atunci cînd cîțiva din primii termeni dau o bună aproximare) este legată de obicei de faptul că se caută un obiect care nu există. Nu este de mirare că dacă încercăm să simulăm fenomenul studiat or într-o schemă care, în realitate, *nu reflectă trăsăturile esențiale ale fenomenului*, seriile noastre diverg.

Seriile lui Birkhoff (care se obțin atunci cînd nu se restrînge normalizarea la un număr finit de termeni ai seriei lui Taylor a hamiltonianului, ci se merge la infinit) constituie unul din exemplele de schemă ale teoriei perturbațiilor care este formal consistentă dar divergentă în realitate. Dacă aceste serii ar fi fost convergente, atunci un sistem oscilant generic cu un grad de libertate și cu coeficienți periodici s-ar fi redus în vecinătatea poziției de echilibru la forma normală autonomă și în el nu ar fi apărut bifurcarea separatoarelor (ori ea, de fapt, apare).

Reîntorcîndu-ne la traiectoria închisă inițială, observăm că celor trei puncte fixe instabile ale aplicației A le corespunde o traiectorie închisă instabilă, apropiată de traiectoria inițială învîrtită de trei ori. Există o familie de traiectorii care tind către această traiectorie instabilă pentru $t \to +\infty$ și o altă familie de traiectorii, care tind către cea instabilă pentru $t \to -\infty$. Pentru

fiecare familie punctele tuturor traiectoriilor formează o suprafață netedă care conține traiectoria noastră instabilă.

Aceste două suprafețe sînt chiar separatoarele despre care a fost vorba în afirmațiile 4, 5 și 6 de la p. 487. Intersecția lor cu suprafața de secțiune transversală reprezintă cele două curbe invariante Γ^+ și Γ^- ale aplicației A. Aceste două curbe formează, intersectîndu-se, o rețea încurcată despre care H. Poincaré care a descoperit primul fenomenul bifurcării separatoarelor scria : „Dacă se încearcă să se reprezinte figura formată de aceste două curbe și de infinitatea punctelor lor de intersecție, fiecare reprezentînd o soluție dublu asimptotică, se constată că aceste intersecții formează un fel de rețea, un țesut, o plasă cu ochiuri infinit strînse ; nici una din cele două curbe nu trebuie să se autointersecteze vreodată, dar ea trebuie să se replieze într-un mod foarte complicat pentru a putea să reintersecteze de o infinitate de ori ochiurile rețelei.

Vom fi uimiți de complexitatea acestei figuri, pe care nici nu încerc măcar să o trasez. Nimic nu este mai potrivit pentru a ne da o idee despre complexitatea problemei celor trei corpuri și, în general, a tuturor problemelor dinamicii unde nu există integrale prime uniforme și unde seriile lui Bohlin sînt divergente" (H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, *Œuvres Choisies*, Dover Publ. Inc., New York, 1957, vol. 2, cap. XXXIII, p. 389).

Trebuie remarcat că și pînă astăzi există multe lucruri neclare în tabloul intersectării separatoarelor.

F. Rezonanțele de ordin superior. Rezonanțele de ordinele următoare lui trei pot fi studiate și ele cu ajutorul formei normale. Trebuie să observăm însă că rezonanțele de ordin mai mare ca patru nu produc de obicei instabilitate, deoarece în forma normală apar termeni de ordinul patru, care garantează existența unui minim sau unui maxim pentru funcția H_0, chiar și în momentul rezonanței.

În cazul unei rezonanțe de ordinul $n > 4$ este tipică modificarea tabloului în spațiul fazelor al sistemului cu hamiltonianul H_0 dat de formula

$$H_0 = \varepsilon\tau + \tau^2\alpha(\tau) + a\,\tau^{n/2}\sin n\,\varphi,$$

$$2\tau = p^2 + q^2,\quad \alpha(0) = \pm 1,$$

care constă în următoarele (fig. 241).

Pentru abateri mici (de ordinul ε) ale frecvenței de la valoarea de rezonanță la distanță mică (de ordinul $\sqrt{|\varepsilon|}$) de poziția de echilibru din originea coordonatelor, funcția H_0 are $2n$ puncte

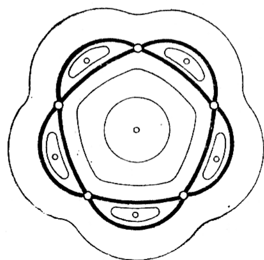


Fig. 241. Hamiltonianul mediat al oscilațiilor de fază în vecinătatea rezonanței 5 : 1.

critice situate în vecinătatea vîrfurilor unui poligon regulat cu $2n$ laturi și centrul în originea coordonatelor. Jumătatea din acestea sînt puncte critice de tip șea, iar cealaltă jumătate sînt puncte de maxim (minim) — dacă originea coordonatelor este punct de minim (respectiv maxim). Punctele șea și punctele stabile alternează. Toate cele n puncte șea sînt situate pe un același nivel al funcției H_0, iar separatoarele lor, care unesc punctele șea consecutive, formează n „insule'', fiecare dintre acestea fiind umplută de orbite închise care înconjură punctul critic stabil. Lărgimea insulelor este de ordinul $\varepsilon^{n/4-1}$. Orbitele închise din interiorul fiecărei insule se numesc *oscilații de fază* (deoarece ceea ce se schimbă este în principal faza oscilațiilor în jurul originei coordonatelor). Perioada oscilațiilor de fază crește la micșorarea dezacordului de frecvență ε ca $\varepsilon^{-n/4}$.

În interiorul inelului îngust format de insule, aproape de originea coordonatelor se găsesc orbite închise care înconjură originea ; și în exteriorul inelului orbitele sînt închise, dar mișcarea pe ele se face în sensul contrar celui din interiorul inelului. Observăm că raza inelului este de ordinul $\sqrt{|\varepsilon|}$ independent de ordinul rezonanței, cu condiția ca aceasta să fie de ordin mai mare ca 4. De asemenea, inelul de insule există numai pentru unul din cele două semne posibile pentru ε.

În cazul în care se trece de la sistemul trunchiat cu hamiltonianul H_0 la cel complet, separatoarele se bifurcă în mod asemănător cu cel descris mai sus pentru rezonanța de ordinul trei. Mărimea bifurcării separatoarelor este exponențial mică (de ordinul $e^{-1/\varepsilon^{n/4}}$),

dar bifurcarea are o importanță principială pentru studierea stabilității, mai ales în cazul dimensiunilor superioare.

Să ne întoarcem la traiectoria noastră închisă inițială și să observăm tabloul care se obține. Atunci cînd ne apropiem pe axa ε de valoarea de rezonanță dintr-o parte determinată*), din traiectoria periodică se bifurcă alte două : una stabilă și una instabilă. Aceste noi traiectorii se închid după ce se rotesc de n ori în jurul traiectoriei inițiale și sînt îndepărtate de aceasta la o distanță de ordinul $\sqrt{|\varepsilon|}$. În vecinătatea traiectoriei stabile există o zonă de oscilații de fază lente cu o perioadă de ordinul $\varepsilon^{-n/4}$și o amplitudine de ordinul π/n în direcția azimutală și una de ordinul $\varepsilon^{(n/4)-1}$ în cea radială. În momentul trecerii prin rezonanță, cel puțin în aproximația pe care o considerăm nu are loc o pierdere a stabilității traiectoriei inițiale.

Cazul rezonanței de ordinul patru este oarecum singular. Aceasta datorită faptului că, în acest caz, în forma normală apar atît termeni de ordinul patru rezonanți, cît și termeni nerezonanți de același ordin. Aspectul orbitelor sistemului trunchiat depinde de care dintre acești termeni din forma normală este preponderent : cel rezonant sau cel nerezonant. În primul caz modificarea este aceeași ca pentru rezonanța de ordinul trei, exceptînd faptul că în loc de triunghi apare un pătrat. În al doilea caz, modificarea este aceeași ca în cazul rezonanței de ordin $n > 4$.

În încheiere să observăm că forma normală studiată reprezintă o aproximație cu atît mai bună cu cît sîntem mai aproape de rezonanță ($\varepsilon < 1$) și cu cît abaterea punctului inițial de la traiectoria periodică este mai mică. Mai precis, la apropierea de comensurabilitatea exactă a perioadei traiectoriei închise cu perioada oscilațiilor traiectoriilor vecine în jurul ei și la apropierea condiției inițiale de traiectoria închisă, crește intervalul de timp în care aproximația noastră descrie corect comportarea orbitelor sistemului.

Din raționamentele noastre nu rezultă nici un fel de concluzie cu privire la comportarea orbitelor care nu sînt închise, pe un interval de timp infinit (de exemplu, cu privire la stabilitatea în sens Liapunov a traiectoriei periodice inițiale) ; într-adevăr, termenii de ordin superior înlăturați la reducerea la forma normală pot să schimbe complet, într-un interval de timp nemărginit, caracterul mișcării. În realitate, în ipotezele considerate, traiectoria periodică inițială este stabilă în sens Liapunov, dar demonstrația necesită considerații esențial diferite de forma normală a lui Birkhoff (vezi anexa 8).

---

*) Spre deosebire de rezonanța de ordinul trei, în care traiectoria periodică instabilă bifurcată există de ambele părți ale valorii de rezonanță.

ANEXA 8

TEORIA PERTURBAŢIILOR MIŞCĂRILOR CVASIPERIODICE ŞI TEOREMA LUI KOLMOGOROV

Numărul de probleme „integrabile" care se pot rezolva exact nu este prea mare (problemele unidimensionale, mişcarea unui punct într-un cîmp central, mişcările euleriană şi lagrangeană ale solidului rigid cu punct fix, problema celor două centre fixe, mişcarea pe geodezicele unui elipsoid). Cu toate acestea, utilizînd aceste „cazuri integrabile" se poate obţine o informaţie destul de importantă privind mişcarea multor sisteme importante, considerînd o problemă integrabilă ca o primă aproximaţie.

O astfel de situaţie apare, de exemplu, în problema mişcării planetelor în jurul Soarelui în virtutea legii atracţiei gravitaţionale universale. Masa planetelor reprezintă aproximativ 0,001 din masa Soarelui şi deci putem neglija, în prima aproximaţie, interacţiunea mutuală a planetelor, luînd în considerare numai atracţia lor de către Soare. Ca rezultat se obţine problema complet integrabilă a mişcării planetelor, fără interacţiune, în jurul Soarelui; fiecare planetă va descrie, independent de celelalte, orbita sa kepleriană, mişcarea sistemului în ansamblu fiind cvasiperiodică. Dacă se ia însă în considerare şi interacţiunea dintre planete, mişcarea kepleriană a fiecărei planete suferă mici modificări.

Teoria perturbaţiilor de mecanica cerească este destinată luării în consideraţie a acestor interacţiuni.

Este clar că, în acest mod de abordare, un calcul pentru o perioadă de 1000 de ani nu trebuie să prezinte dificultăţi de principiu. Dacă vrem însă să studiem intervale mari de timp şi în special dacă sîntem interesaţi de aspectele calitative privind comportarea soluţiilor exacte ale ecuaţiilor de mişcare pe un interval de timp nemărginit, atunci apar astfel de dificultăţi.

Acumularea perturbaţiilor într-un interval de timp, mare în comparaţie cu un interval de 1000 de ani, poate conduce la o schim-

bare totală a caracterului mişcării: spre exemplu, planetele pot cădea pe Soare, se pot îndepărta la infinit de el sau ciocni între ele.

Să observăm că între problema mişcării reale a planetelor şi problema comportării soluţiilor ecuaţiilor de mişcare pe intervale de timp infinite există numai o relatie indirectă. Această din cauză că în intervale de timp de ordinul miliardelor de ani îşi exercită puternic influenta micile efecte neconservative care nu sînt luate în considerare în legea lui Newton. Prin urmare, efectele interacţiunii gravitaţionale a planetelor sînt cu adevărat esenţiale numai în cazul în care ele modifică serios tabloul mişcării pe un interval finit de timp, mic în comparaţie cu intervalul în care se manifestă efectele neconservative.

În determinarea mişcării pe un astfel de interval finit de timp o contribuţie esenţială o au calculatoarele electronice cu ajutorul cărora se determină rapid mişcarea planetelor cu multe mii de ani în viitor sau în trecut.

De remarcat că şi mijloacele contemporane de calcul se pot dovedi incapabile să prevină influenţa perturbaţiilor dacă punctul din spaţiul fazelor intră într-o zonă de stabilitate exponenţială.

Metodele asimptotice şi calitative au o importanţă şi mai mare atunci cînd se studiază mişcarea particulelor încărcate electric în cîmpuri magnetice, deoarece în acest caz particulele întrec calculatorul electronic şi reuşesc să efectueze un număr atît de mare de rotaţii, încît calculul traiectoriilor lor este imposibil chiar şi în absenţa instabilităţii exponenţiale.

În mecanica cerească au fost elaborate o serie de metode care iau în considerare perturbaţiile (Analiza lor amănunţită se găseşte în cartea lui: H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, op. cit.*). Particularitatea tuturor acestor metode este că ele conduc la serii divergente şi deci nu dau nici o informaţie cu privire la comportarea globală a mişcării pe intervale infinite de timp.

Cauza divergenţei seriilor din teoria perturbaţiilor rezidă în prezenţa „numitorilor mici": aceştia sînt combinaţii liniare cu coeficienţi întregi de frecvenţe ale mişcării neperturbate, cu care trebuie să se împartă atunci cînd se calculează influenţa perturbaţiilor. La o rezonanţă exactă (atunci cînd frecvenţele sînt comensurabile) aceşti numitori se anulează şi termenul corespunzător al seriei din teoria perturbaţiilor devine infinit. În vecinătatea rezonanţei, acest termen al seriei este foarte mare.

Spre exemplu, Jupiter şi Saturn parcurg în 24 de ore, în mişcarea lor în jurul Soarelui, aproximativ 299 şi respectiv 120,5 secunde de arc. Prin urmare, numitorul $2\,\omega_{Jup} - 5\,\omega_{Sat}$ este foarte mic în comparaţie cu fiecare din frecvenţe. Aceasta conduce la o perturbaţie reciprocă de perioadă mare a acestor două planete (perioada este de aproximativ 800 de ani); studierea de către Laplace a acestui efect a reprezentat unul din primele succese ale teoriei perturbaţiilor.

Remarcăm că dificultatea pe care o ridică numitorii mici este esenţială. Într-adevăr, numerele raţionale formează o mulţime densă pe dreapta reală. Din această cauză, în spaţiul fazelor pro-

blemei neperturbate, condiţiile iniţiale, pentru care apar rezonanţe şi numitorii mici se anulează, formează o mulţime densă. Prin urmare, funcţiile la care conduc seriile din teoria perturbaţiilor au o mulţime densă de puncte singulare.

Dificultatea indicată aici este tipică nu numai pentru problemele mecanicii cereşti, ci şi pentru toate problemele apropiate de probleme integrabile (de exemplu, pentru problema mişcării unui titirez greu asimetric care se roteşte foarte repede). Poincaré a denumit chiar *problema fundamentală a dinamicii* problema studierii perturbaţiilor mişcărilor cvasiperiodice în sistemul definit de hamiltonianul:

$$H_0 = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \qquad \varepsilon \ll 1$$

în variabilele acţiune $\mathbf{I}$ — unghi $\boldsymbol{\varphi}$.

Aici H_0 este hamiltonianul problemei neperturbate iar εH_1 este perturbaţia, care este o funcţie 2π-periodică de variabilele unghiulare $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. În problema neperturbată ($\varepsilon = 0$) unghiurile φ variază uniform, cu frecvenţele constante

$$\omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k}$$

şi toate variabilele acţiune sînt integrale prime.

Trebuie studiate orbitele ecuaţiilor lui Hamilton

$$\dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}}$$

în spaţiul de faze, care este produsul direct al unui domeniu din spaţiul numeric n-dimensional cu coordonatele $I_1, \ldots, I_n$ şi torul n-dimensional cu coordonatele $\varphi_1, \ldots \varphi_n$.

O înaintare esenţială în studierea orbitelor perturbate ale acestei probleme a fost începută în anul 1954 prin lucrarea lui A. N. Kolmogorov, *Asupra conservării mişcărilor cvasiperiodice la o variaţie mică a hamiltonianului* Dokladk Akad. Nauk 98, *4* (1954), 527—530. În anexa de faţă se expun principalele rezultate obţinute de atunci în acest domeniu. Demonstraţiile pot fi găsite în următoarele lucrări:

V. I. Arnold, *Numitorii mici*, I, *Asupra aplicaţiilor cercului pe el însuşi*, Izvestia AN S.S.S.R, 26, *1* (1961), 21—86.

V. I. Arnold, *Numitorii mici*, II, *Demonstraţia teoremei lui A. N. Kolmogorov privind conservarea mişcărilor cvasiperiodice la o variaţie mică a hamiltonianului*, Uspehi Matem. Nauk. *5* (1963), 13—40.

V. I. Arnold, *Numitorii mici*, III, *Numitorii mici şi problema stabilităţii în mecanica clasică şi mecanica cerească*, Uspehi Matem. Nauk, 18, *6* (1963), 81—192.

V. I. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodique de la mécanique classique*, Paris, Gauthier—Villars, 1967.

J. Moser, *Asupra curbelor invariante ale unei aplicaţii care conservă aria a unui inel pe el însuşi*, Nach. Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys., Kl. 11a, *1* (1962), 1—20.

J. Moser, *Metodă iterativă rapid convergentă şi ecuaţiile diferenţiale neliniare*, Annali della Scuola Norm. Sup. de Pisa, Ser. III, 20, *2* (1966), 265—315; *3* (1966), 499—535.

J. Moser, *Asupra dezvoltării mişcărilor cvasiperiodice în serii de puteri convergente*, Math. Ann., *169* (1967), 136—176.

J. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., *81* (1968)*)

J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems with special emphasis on celestial mechanics*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, *77*, (1973)*).

C. L. Siegel, J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971.

S. Sternberg, *Celestial Mechanics*, I, II, Benjamin, New York, 1969.

Înainte de a formula rezultatele, vom discuta pe scurt comportarea orbitelor problemei neperturbate, studiată în capitolul 10.

A. Mişcarea neperturbată. Sistemul cu hamiltonianul $H_0(\mathbf{I})$ are n integrale prime în involuţie (cele n variabile acţiune). Fiecare mulţime de nivel constant al tuturor acestor integrale prime reprezintă un tor de dimensiune n în spaţiul de faze de dimensiune $2n$. Acest tor este invariant în raport cu curentul sistemului neperturbat: fiecare orbită care începe într-un punct al unui astfel de tor rămîne tot timpul pe el.

Mişcarea punctului din spaţiul fazelor pe torul invariant $\mathbf{I} = \text{const}$ este cvasiperiodică. Frecvenţele acestei mişcări sînt derivatele parţiale ale hamiltonianului neperturbat în raport cu variabilele acţiune:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(\mathbf{I}), \text{ unde } \omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k}.$$

Prin urmare, orbita este densă într-un tor a cărui dimensiune coincide cu numărul de frecvenţe ω_k care sînt aritmetic independente.

Să observăm că frecvenţele depind de torul pe care îl considerăm, deci de valorile fixate ale integralelor prime. În general,

*) (N. T.)

sistemul de n funcţii ω_k de cele n variabile I_k este funcţional independent. În acest caz, putem, pur şi simplu, numerota torii cu ajutorul frecvenţelor lor, luînd variabilele ω_k drept coordonate în vecinătatea punctului considerat în spaţiul variabilelor acţiune I_k.

Cazul în care frecvenţele sînt funcţional independente va fi denumit *cazul nedegenerat*. Prin urmare, condiţia de nedegenerare se scrie

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{I}}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{I}^2}\right) = 0.$$

Conform acestei definiţii, în cazul nedegenerat, pe diverşii tori invarianţi din spaţiul fazelor problemei neperturbate se efectuează mişcări cvasiperiodice cu diverse numere de frecvenţe (independente). În particular, torii pentru care numărul de frecvenţe este cel maximal (deci n) formează o mulţime densă în spaţiul fazelor ; aceşti tori se numesc *nerezonanţi*.

Se poate arăta că torii nerezonanţi formează în spaţiul fazelor o mulţime de măsură egală cu măsura întregului spaţiu şi deci măsura Lebesgue a reuniunii tuturor torilor invarianţi rezonanţi ai sistemului neperturbat este zero. Cu toate acestea, torii rezonanţi există şi alternează cu torii nerezonanţi, formînd şi ei o mulţime densă. În plus, torii cu numărul de frecvenţe independente arbitrar, dar cuprins între 1 şi $n-1$, formează o mulţime densă în spaţiul fazelor. În particular, torii invarianţi pe care toate orbitele sînt închise (numărul frecvenţelor independente se reduce la 1) formează o mulţime densă.

Să observăm că probabilitatea de a nimeri pe un tor rezonant la o alegere aleatoare a punctului iniţial în spaţiul fazelor sistemului neperturbat este egeală cu zero (la fel ca şi probabilitatea de a nimeri peste un număr raţional prin alegerea aleatoare a unui număr real). Prin urmare, neglijînd o mulţime de măsură nulă, putem spune că toţi torii invarianţi ai sistemului neperturbat sînt nerezonanţi şi au un ansamblu complet de n frecvenţe aritmetic independente.

Pe un tor nerezonant orice orbită a mişcării cvasiperiodice este densă. Prin urmare, pentru aproape toate condiţiile iniţiale orbita sistemului neperturbat nedegenerat umple dens un tor invariant de dimensiune egală cu numărul gradelor de libertate (deci jumătate din dimensiunea spaţiului fazelor).

Pentru a ne reprezenta mai bine acest tablou, să considerăm cazul a două grade de libertate ($n=2$). În acest caz, spaţiul fazelor este de dimensiune patru şi deci mulţimile de nivel constant al energiei sînt tridimensionale. Să fixăm una din aceste mulţimi de nivel constant. Această varietate tridimensională fibrată cu tori invarianţi poate fi gîndită în spaţiul tridimensional uzual ca o familie de tori concentrici, care se includ unul în interiorul celuilalt (fig. 242).

Orbitele reprezintă înfăşurări ale acestor tori, ambele frecvenţe de rotaţie variind de la un tor la altul. În cazul general, va varia

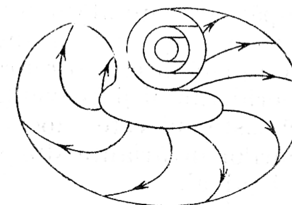


Fig. 242. Tori invarianţi în varietatea tridimensională de nivel constant al energiei.

de la un tor la altul nu numai fiecare frecvenţă, ci şi raportul lor. Dacă derivata raportului frecvenţelor în raport cu variabila acţiune care numerotează torii de pe mulţimea dată de nivel constant a lui H_0 este nenulă, spunem că sistemul nostru este *izoenergetic nedegenerat*. Condiţia de nedegenerare izoenergetică se scrie (aşa cum se vede uşor)

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Condiţiile de nedegenerare şi nedegenerare izoenergetică sînt independente : un sistem nedegenerat poate fi izoenergetic degenerat, iar unul izoenergetic nedegenerat — degenerat. În cazul dimensiunilor superioare ($n>2$), nedegenerarea izoenergetică este echivalentă cu faptul că următoarea aplicaţie a varietăţii de nivel constant $(n-1)$-dimensionale a funcţiei H_0 de cele n variabile acţiune în spaţiul proiectiv $(n-1)$-dimensional

$$\mathbf{I} \mapsto (\omega_1(\mathbf{I}) : \omega_2(\mathbf{I}) : \ldots : \omega_n(\mathbf{I}))$$

este nedegenerată.

Să considerăm un sistem izoenergetic nedegenerat, cu două grade de libertate. Se poate construi ușor o mică suprafață bidimensională, care să intersecteze transversal torii invarianți ai familiei noastre (după o familie de cercuri concentrice în modelul considerat din spațiul euclidian tridimensional).

O orbită care începe într-un punct al acestei suprafețe se va reîntoarce pe ea după ce a efectuat o rotație de-a lungul torului pe care se află. Ca rezultat se obține un punct de pe același cerc (pe care se află punctul inițial), după care torul intersectează suprafața. Apare deci o aplicație a suprafeței în ea însăși.

Aceasta este o aplicație a suprafeței în ea însăși care lasă pe loc cercurile meridiane concentrice după care suprafața intersectează torii. Sub acțiunea ei, fiecare cerc se rotește cu un unghi, și anume cu acea fracție dintr-o rotație completă pe care o reprezintă raportul dintre frecvența de-a lungul meridianului și frecvența de-a lungul ecuatorului. Prin urmare, dacă sistemul este izoenergetic nedegenerat, unghiul de rotație al cercurilor invariante din suprafața de secțiune va varia de la un cerc la altul.

Rezultă că pe unele cercuri acest unghi va fi comensurabil cu rotația completă, iar pe altele — incomensurabil. Și unele și celelalte cercuri formează mulțimi dense, dar pe aproape toate (în sensul măsurii Lebesgue) cercurile unghiul de rotație este incomensurabil cu rotația completă.

Comensurabilitatea sau incomensurabilitatea se manifestă în modul următor în comportarea punctelor cercurilor în raport cu aplicația suprafeței de secțiune pe ea însăși. Dacă unghiul de rotație este comensurabil cu rotația completă, atunci după cîteva iterări ale aplicației punctul se va întoarce în poziția inițială (numărul de iterări necesare pentru aceasta este cu atît mai mare cu cît numitorul fracției care exprimă unghiul de rotație este mai mare). Dacă unghiul de rotație nu este comensurabil cu rotația completă, atunci imaginile succesive ale unui punct dat prin iteratele aplicației formează o mulțime densă în cercul meridian.

Să observăm de asemenea că incomensurabilitatea corespunde torilor nerezonanți, iar comensurabilitatea — celor rezonanți. În plus, existența torilor rezonanți generează următoarea situație. Să considerăm o iterație oarecare a aplicației suprafeței de secțiune definită de parcurgerea orbitelor. Să presupunem că exponentul de iterare este numitorul fracției care exprimă raportul frecvențelor pe unul din torii rezonanți. Atunci iterata respectivă are un întreg cerc invariant format din puncte fixe (și anume meridianul torului rezonant considerat).

Această comportare a punctelor fixe este nenaturală pentru aplicațiile oricît de generale și chiar pentru cele canonice (de obicei punctele fixt sînt izolate). În cazul nostru a apărut un cerc întreg de puncte fixe din cauză că am considerat un sistem neperturbat, integrabil. La o perturbare de formă generală oricît de mică, proprietatea aceasta a aplicației (de a avea un întreg cerc de puncte fixe) trebuie să dispară. Cercul de puncte fixe trebuie să se dezintegreze într-un număr finit de puncte fixe.

Cu alte cuvinte, este de așteptat ca la o mică perturbație a sistemului nostru integrabil, tabloul orbitelor din spațiul fazelor să se schimbe, cel puțin prin faptul că torii invarianți formați din orbite închise trebuie să se dezintegreze astfel încît să rămînă numai un număr finit de orbite închise apropiate de cele ale sistemului neperturbat; celelalte orbite vor avea o comportare mai complicată. Am mai întîlnit o astfel de situație în anexa 7, cînd am studiat comportarea oscilațiilor în vecinătatea unei rezonanțe.

Să vedem ce se întîmplă cu torii invarianți nerezonanți la o perturbație a hamiltonianului. Aplicarea formală a principiului medierii (deci prima aproximație a teoriei perturbațiilor, vezi §52) ne duce la concluzia că *un tor nerezonant nu suferă nici o evoluție.*

Subliniem că aici este esențial caracterul hamiltonian al perturbației, deoarece este clar că la o perturbație neconservativă variabilele acțiune pot evolua. În situațiile care apar în mecanica cerească, această evoluție reprezintă variația seculară a semi-axelor elipselor kepleriene, deci căderea pe Soare a planetelor sau ciocnirea lor sau îndepărtarea la o distanță într-un timp invers proporțional cu mărimea perturbației. Dacă perturbațiile conservative ar conduce, în prima aproximație, la o evoluție, aceasta s-ar manifesta în evoluția planetelor după un interval de timp de ordinul a 1000 ani. Din fericire, ordinul de mărime al perturbațiilor neconservative este mult mai mic.

Teorema lui Kolmogorov care va fi formulată mai jos reprezintă una din justificările riguroase ale concluziilor expuse, deduse din teoria neriguroasă a perturbațiilor, în absența evoluției variabilelor acțiune.

B. Torii invarianți ai sistemului perturbat.

Teoremă. *Dacă sistemul hamiltonian neperturbat este nedegenerat, atunci la o perturbație conservativă suficient de mică majoritatea torilor invarianți nerezonanți nu dispar, ci numai se deformează duțin, astfel încît în spațiul fazelor sistemului perturbat există de asemenea tori invarianți umpluți dens de orbite care îi înfășoară prin mișcări cvasiperiodice cu numărul de frecvențe egal cu numărul gradelor de libertate.*

Torii invarianți indicați formează majoritatea în următorul sens. Complementara reuniunii lor are o măsură care este mică împreună cu perturbația (tinde la zero împreună cu aceasta).

Demonstrația acestei teoreme a lui A. N. Kolmogorov se bazează pe următoarele două observații care i se datorează.

1. Să fixăm un ansamblu nerezonant de frecvențe ale sistemului neperturbat astfel încît frecvențele să fie nu numai aritmetic independente, ci să nu satisfacă aproximativ nici o relație de rezonanță de ordin mic.

Mai exact, fixăm un ansamblu de frecvențe ω pentru care există constantele C și ν astfel încît $|(\boldsymbol{\omega},)\mathbf{k}| > C|\mathbf{k}|^{-\nu}$ pentru toți vectorii întregi $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n, \mathbf{k} \neq 0$.

Se poate arăta că dacă ν este suficient de mare (de exemplu, $\nu = n+1$), măsura mulțimii vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ (dintr-un domeniu mărginit fixat) pentru care condiția de nerezonanță indicată nu este satisfăcută este mică în același timp cu C.

În continuare, vom căuta în vecinătatea torului invariant nerezonant al sistemului neperturbat (corespunzător ansamblului de frecvențe ales) un tor invariant al sistemului perturbat pe care să aibă loc o mișcare cvasiperiodică cu exact aceleași frecvențe (pe care le-am fixat și care, desigur, satisfac condiția de nerezonanță descrisă mai sus).

Prin urmare, în locul variației frecvențelor comună multor scheme ale teoriei perturbațiilor (procedeu care constă în introducerea unor frecvențe care depind de perturbații), trebuie să se păstreze frecvențele nerezonante și constante și apoi să se aleagă condițiile inițale în funcție de perturbație astfel încît să se obțină o mișcare cvasiperiodică cu frecvențele fixate. O astfel de variație a condițiilor inițiale, care să fie mică împreună cu perturbația este posibilă datorită faptului că frecvențele variază împreună cu variabilele acțiune, prin ipoteza de nedegenerare.

2. A doua observație este următoarea : pentru căutarea torului invariant se poate utiliza, în locul dezvoltărilor în serie după puterile perturbației care sînt obișnuite pentru multe scheme ale teoriei perturbațiilor, o metodă rapid convergentă de tipul metodei newtoniene a tangentelor.

Metoda lui Newton a tangentelor pentru căutarea rădăcinilor ecuațiilor algebrice dă, la o eroare inițială egală cu ε, după n aproximații, o eroare de ordinul ε^{2^n}. O astfel de *superconvergență* permite paralizarea acțiunii numitorilor mici care apar la fiecare aproximație ; drept rezultat se reușește nu numai efectuarea unui număr infinit de aproximații, ci și demonstrarea convergenței întregului procedeu.

Ipotezele în care reușesc toate aceste lucruri sînt următoarele : hamiltonianul neperturbat $H_0(\mathbf{I})$ este analitic și nedegenerat, iar hamiltonianul-perturbație $\varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ este analitic și 2π — periodic în variabilele unghiulare $\boldsymbol{\varphi}$. Prezența parametrului mic ε nu este esențială : este important numai că perturbația este suficient de mică într-o vecinătate oarecare complexă de rază ρ a planului variabilelor $\boldsymbol{\varphi}$ (este mai mică în modul decît o funcție pozitivă $M(\rho, H_0)$).

După cum a arătat J. Moser, ipoteza de analiticitate se poate înlocui cu cea de diferențiabilitate de un ordin suficient de mare, dacă se combină metoda lui Newton cu metoda de netezire a funcțiilor la fiecare aproximație, propusă de J. Nash.

Mișcarea cvasiperiodică cu frecvențele fixate $\boldsymbol{\omega}$ a sistemului perturbat, obținută ca rezultat al acestui procedeu, se dovedește chiar a fi o funcție netedă (în cazul analitic — analitică) de parametrul de perturbație ε. Prin urmare, ea ar fi putut fi căutată și fără metoda lui Newton, sub forma unei serii de puteri în ε. Coeficienții acestei serii — care se numește serie Lindstedt — se pot într-adevăr determina ; pentru a demonstra însă convergența ei, trebuie folosită calea indirectă a metodei lui Newton.

C. Zonele de instabilitate. Prezența torilor invarianți în spațiul fazelor problemei perturbate are următoarea semnificație : într-un sistem hamiltonian apropiat de unul integrabil, pentru majoritatea condițiilor inițiale mișcarea rămîne cvasiperiodică cu numărul maximal de frecvențe.

Apare în mod natural întrebarea : ce se întîmplă cu celelalte orbite, ale căror condiții inițiale nimeresc în spațiile dintre torii invarianți care se formează în locul torilor invarianți rezonanți ai problemei neperturbate.

Dezintegrarea unui tor rezonant pe care numărul de frecvențe este cu 1 mai mic decît cel maximal se studiază ușor în prima aproximație a teoriei perturbațiilor. Pentru aceasta trebuie mediată perturbația pe acei tori $(n-1)$-dimensionali în care se dezintegrează torul rezonant $(n-1)$-dimensional (în spațiul de faze al sistemului neperturbat) și care sînt umpluți dens cu orbite ale sistemului neperturbat. În urma acestei medieri se obține un sistem conservativ cu un grad de libertate (vezi studiul oscilațiilor în vecinătatea unei rezonanțe, anexa 7) care se studiază cu ușurință.

În aproximația considerată, în vecinătatea torului rezonant n-dimensional care se dezintegrează apare un ansamblu de tori

$(n-1)$-dimensionali stabili şi instabili care alternează, astfel încît în jurul torilor stabili punctul din spaţiul fazelor efectuează oscilaţii. Mişcările cvasiperiodice corespunzătoare au un ansamblu complet de n frecvenţe, şi anume cele $n-1$ frecvenţe mari ale oscilaţiilor iniţiale şi o frecvenţă mică (de ordinul $\sqrt{\varepsilon}$) a oscilaţiilor lente ale punctului din spaţiul fazelor.

Nu trebuie însă să ne închipuim că singura diferenţă dintre mişcarea în sistemul perturbat şi cea în cel neperturbat este apariţia ,,insulelor'' în care se efectuează oscilaţii ale punctului din spaţiul fazelor. În realitate, fenomenul este mult mai complicat decît prima aproximaţie descrisă mai sus. Una din caracteristicile acestei comportări complexe a orbitelor sistemului perturbat este fenomenul de bifurcare al separatoarelor, discutat în anexa 7.

Atunci cînd se studiază mişcările sistemului perturbat care nu sînt situate pe torii invarianţi, trebuie făcută o deosebire între cazul cu două grade de libertate şi cel cu mai multe grade de libertate. Cînd numărul gradelor de libertate este doi dimensiunea spaţiului fazelor este patru şi varietăţile de nivel constant al energiei sînt de dimensiune trei. Din acest motiv, torii invarianţi separă mulţimea de nivel constant a energiei.

Prin această separare, o orbită care începe în spaţiul (fanta) dintre doi tori invarianţi rămîne tot timpul captivă între aceşti doi tori. Din acest motiv, oricît de complicată ar fi această orbită, ea nu iese din fanta ei şi variabilele acţiune corespunzătoare rămîn veşnic în vecinătatea valorilor iniţiale.

Dacă numărul n al gradelor de libertate este mai mare ca 2, torii invarianţi n-dimensionali nu separă varietatea $(2n-1)$-dimensională de nivel constant al energiei, ci sînt aşezaţi ca punctele în plan sau ca dreptele în spaţiul tridimensional. În acest caz, ,,fantele'' corespunzătoare diverselor rezonanţe comunică între ele şi deci torii invarianţi nu împiedică ca o orbită care începe în apropierea unei rezonanţe să se îndepărteze mult. Din acest motiv, nu este justificat să ne aşteptăm ca de-a lungul unei astfel de orbite variabilele acţiune să rămînă în vecinătatea valorilor lor iniţiale în orice moment al timpului.

Cu alte cuvinte, în sistemele cu două grade de libertate (care satisfac condiţia de nedegenerare izoenergetică — această condiţie este generic satisfăcută), pentru perturbaţii destul de mici, variabilele acţiune de-a lungul orbitei nu numai că nu suferă perturbaţii seculare în nici o aproximaţie a teoriei perturbaţiilor (altfel spus, variază puţin pe un interval de timp de ordinul $(1/\varepsilon)^N$ pentru orice N, unde ε este mărimea perturbaţiei), dar chiar rămîn veşnic în vecinătatea condiţiilor iniţiale — şi aceasta atît pentru orbitele nerezonante care sînt mişcări cvasiperiodice pe torii invarianţi bidimensionali (şi care umplu cea mai mare parte a spaţiului fazelor), cît şi pentru celelalte condiţii iniţiale.

În acelaşi timp, există sisteme cu mult de două grade de libertate, care satisfac toate condiţiile de nedegenerare şi în care, în ciuda faptului că pentru majoritatea condiţiilor iniţiale mişcarea este cvasiperiodică, pentru anumite condiţii iniţiale este posibilă o îndepărtare lentă a variabilelor acţiune de la condiţiile lor iniţiale. În exemplele pe care le avem la dispoziţie*) viteza medie a acestei îndepărtări se dovedeşte a fi de ordinul $e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$: această viteză scade deci mai repede ca orice putere la micşorarea perturbaţiei. Nu este deci de mirare că îndepărtarea indicată nu se detectează în nici una din aproximaţiile teoriei perturbaţiilor (aici prin viteză medie se înţelege raportul dintre creşterea variabilelor acţiune şi timp, deci este vorba, de fapt, de o creştere de ordinul întîi într-un interval mare de timp de ordinul $e^{1/\sqrt{\varepsilon}}$.

Estimarea unei mărginiri superioare a vitezei medii de îndepărtare a variabilelor acţiune de la condiţiile iniţiale, în sistemele generice de ecuaţii canonice hamiltoniene cu n grade de libertate apropiate de sisteme integrabile se găseşte într-o lucrare recentă a lui N. N. Nehoroşev**).

Această estimare, la fel ca şi estimarea inferioară de mai sus, este de forma e^{-1/ε^d}. Prin urmare, creşterea variabilelor acţiune este mică în comparaţie cu e^{1/ε^d} de îndată ce $\varepsilon < \varepsilon_0$. Aici ε este mărimea perturbaţiei, d este un număr cuprins între 0 şi 1, definit, la fel ca şi ε_0, de proprietăţile hamiltonianului neperturbat H_0. Pentru a obţine acest rezultat, se impune o anumită condiţie de nedegenerare asupra hamiltonianului neperturbat (această condiţie are o formulare lungă, dar este generic îndeplinită; în particular, este suficient ca hamiltonianul neperturbat H_0 să fie pătratic convex: a doua diferenţială a funcţiei H_0 să fie (pozitiv sau negativ) definită.

Din estimarea superioară indicată se vede că variaţiile seculare ale variabilelor acţiune nu pot fi surprinse în nici o aproximaţie

---

*) Vezi V. I. Arnold, *Instabilitatea sistemelor dinamice cu mai multe grade de libertate*, Dokladî Akad. Nauk. S.S.S.R., 156, *1* (1964), 9—12.

**) N. N. Nehoroşev, *Asupra comportării sistemelor hamiltoniene apropiate de sisteme integrabile*, Funcţionalnîi analiz i evo prilojenia, 5, *4* (1971), 82—83. (Vezi şi anexa scrisă de N. N. Nehoroşev la traducerea în limba rusă a lucrării J. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*: *Lekţii o gamiltonovîh sistemah*, Mir, Moskva, 1973.

a teoriei perturbaţiilor, viteza medie a variaţiei lor fiind exponenţial mică. Observăm de asemenea că variaţiile seculare ale variabilelor acţiune nu au, după cum se pare, un caracter orientat, ci reprezintă mai mult sau mai puţin o hoinăreală aleatoare între rezonanţe, în jurul torilor invarianţi. O discuţie amănunţită a problemelor care apar aici poate fi găsită în articolul lui G. M. Zaslavski şi B. V. Cirikov, *Instabilitatea stochastică a oscilaţiilor neliniare*, Uspehi Fiziceskih Nauk, vol. 105, *1*, (1971), 3—39.

D. Diversele variante ale teoremei torilor invarianţi. Au fost demonstrate teoreme analoage cu teorema de conservare a torilor invarianţi într-un sistem autonom pentru ecuaţiile neautonome cu coeficienţi periodici şi pentru aplicaţiile simplectice.

Alte situaţii în care funcţionează afirmaţii similare sînt legate de teoria micilor oscilaţii în vecinătatea unei poziţii de echilibru a unui sistem autonom sau a unui sistem cu coeficienţi periodici şi de asemenea, în vecinătatea unei orbite închise a unui curent sau în vecinătatea unui punct fix al unei aplicaţii simplectice.

Condiţiile de nedegenerare necesare în fiecare din cazuri diferă între ele. Din acest motiv, pentru îndrumare enumerăm mai jos aceste condiţii. Ne restrîngem la cele mai simple condiţii de nedegenerare, care sînt satisfăcute în sistemele „generice”. În multe situaţii condiţiile de nedegenerare pot fi slăbite, dar cîştigul care se obţin în acest fel nu acoperă complexitatea formulării.

1. Sistemul autonom. Hamiltonianul este

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \varphi), \qquad \mathbf{I} \in G \subset \mathbf{R}^n, \qquad \varphi (\mathrm{mod}\ 2\pi) \in T^n.$$

Condiţia de nedegenerare

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} \right) \neq 0$$

garantează conservarea*) majorităţii torilor invarianţi la o perturbaţie mică ($\varepsilon \ll 1$).

Condiţia de nedegenerare izoenergetică

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

*) se înţelege că torii se deformează puţin la perturbare.

garantează existenţa pe fiecare varietate de nivel constant al energiei a unei mulţimi de tori invarianţi a cărei complementară este de măsură mică. În general, frecvenţele de pe aceşti tori depind de mărimea perturbaţiei, dar raporturile frecvenţelor se păstrează atunci cînd ε variază.

Dacă $n = 2$, condiţia de nedegenerare izoenergetică garantează şi stabilitatea variabilelor acţiune, în sensul că valorile acestora rămîn veşnic în vecinătatea valorilor iniţiale, la orice perturbaţie destul de mică.

2. Sistemul periodic. Hamiltonianul este

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \varphi, t),$$

$$\mathbf{I} \in G \subset \mathbf{R}^n, \qquad \varphi(\mathrm{mod}\ 2\pi) \in T^n;$$

perturbaţia este periodică nu numai în φ, ci şi în t. Este natural ca sistemul neperturbat să fie considerat în spaţiul de faze $(2n+1)$-dimensional $\{(\mathbf{I}, \varphi, t)\} = \mathbf{R}^n \times T^{n+1}$. Torii invarianţi sînt de dimensiune $n+1$. Condiţia de nedegenerare

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} \right) \neq 0$$

garantează conservarea majorităţii torilor invarianţi $(n+1)$-dimensionali la o perturbaţie mică ($\varepsilon \ll 1$).

Dacă $n = 1$, această condiţie de nedegenerare asigură şi stabilitatea variabilei acţiune: ea rămîne veşnic în apropierea valorii iniţiale, pentru orice perturbaţie suficient de mică.

3. Aplicaţie $(\mathbf{I}, \varphi) \mapsto (\mathbf{I}', \varphi')$ a unui inel de dimensiune $2n$. Funcţia generatoare este

$$S(\mathbf{I}', \varphi) = S_0(\mathbf{I}') + \varepsilon S_1(\mathbf{I}', \varphi),$$

$$\mathbf{I}' \in G \subset \mathbf{R}^n, \qquad \varphi \in T^n.$$

Condiția de nedegenerare

$$\det\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial \mathbf{I}'^2}\right) \neq 0$$

garantează conservarea majorității torilor invarianți ai aplicației neperturbate $((\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \mapsto (\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi} + \partial S_0/\partial \mathbf{I}))$ la perturbații mici $(\varepsilon \ll 1)$.

Dacă $n = 1$, se obține o aplicație care conservă aria unui inel obișnuit pe el însuși. Aplicația neperturbată reprezintă o rotație a fiecărui cerc $I = \text{const}$. Condiția de nedegenerare presupune, în acest caz, că unghiul de rotație variază de la un cerc la altul.

În cazul $n = 1$, torii invarianți se transformă în cercuri obișnuite și teorema arată că la iterarea aplicației toate imaginile unui punct dat rămîn în vecinătatea cercului pe care se găsește punctul inițial, pentru orice perturbație suficient de mică.

4. Vecinătate a poziției de echilibru (cazul autonom). Să presupunem că poziția de echilibru este stabilă în aproximația liniară și deci sînt definite n frecvențe proprii $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Presupunem în plus că între frecvențele proprii nu există relații de rezonanță:

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0 \text{ cu întregi } k_i,\ 0 < \sum |k_i| \leqslant 4.$$

În aceste condiții hamiltonianul se poate aduce la forma normală a lui Birkhoff (vezi anexa 7)

$$H = H_0(\boldsymbol{\tau}) + \ldots,$$

unde $H_0(\tau) = \sum \omega_k \tau_k + \frac{1}{2}\sum \omega_{kl} \cdot \tau_k \tau_l$, iar prin puncte se notează termenii de ordin mai mare ca patru în raport cu distanța pînă la poziția de echilibru.

Condiția de nedegenerare

$$\det(\omega_{kl}) \neq 0$$

garantează existența unei mulțimi de tori invarianți a cărei măsură coincide aproape cu măsura totală într-o vecinătate suficient de mică a poziției de echilibru.

Condiția de nedegenerare izoenergetică

$$\det\begin{pmatrix} \omega_{kl} & \omega_k \\ \omega_l & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

garantează existența unei astfel de mulțimi de tori invarianți pe fiecare mulțime de nivel constant a energiei (suficient de apropiată de cea critică).

În cazul $n = 2$, condiția de nedegenerare izoenergetică se exprimă prin faptul că partea pătratică a hamiltonianului H_0 nu se divide prin cea liniară. În acest caz nedegenerarea izoenergetică asigură stabilitatea în sens Liapunov a poziției de echilibru.

5. Vecinătate a poziției de echilibru (cazul periodic). Să presupunem din nou că poziția de echilibru este stabilă în aproximație liniară și deci sînt definite cele n frecvențe $\omega_1, \ldots, \omega_n$. În plus să presupunem că între frecvențele proprii și frecvența de variație a coeficienților (pe care o vom considera egală cu 1) nu există relații de rezonanță

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n + k_0 = 0, \text{ cu } 0 < \sum |k_i| \leqslant 4.$$

În aceste ipoteze, hamiltonianul se poate reduce la o formă normală a lui Birkhoff care este aceeași ca în cazul autonom, cu deosebirea că termenii de ordin superior $(\geqslant 4)$ sînt 2π-periodici în timp.

Condiția de nedegenerare

$$\det(\omega_{kl}) \neq 0$$

garantează existența torilor invarianți $(n+1)$-dimensionali în spațiul de faze extins $(2n+1)$-dimensional, în vecinătatea cercului $\tau = 0$, care reprezintă poziția de echilibru.

În cazul nostru $n = 1$ condiția de nedegenerare se reduce la faptul că derivata perioadei oscilațiilor mici în raport cu pătratul perioadei amplitudinii acestor oscilații este nenulă. În acest caz nedegenerarea garantează stabilitatea în sens Liapunov a poziției de echilibru.

6. Punctul fix al unei aplicații. Să presupunem că toate cele $2n$ valori proprii ale liniarizatei aplicației canonice

studiate în punctul fix sînt de modul 1 și nu satisfac relații de rezonanță de forma

$$\lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} = 1, \quad |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant 4$$

(cele $2n$ valori proprii fiind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$).

În aceste condiții, dacă se neglijează termenii de ordinul mai mare ca trei din dezvoltarea lui Taylor în punctul fix, aplicația se scrie în forma normală a lui Birkhoff

$$(\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \alpha(\tau)), \text{ unde } \alpha(\tau) = \frac{\partial S}{\partial \tau},$$

$S = \sum \omega_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum \omega_{kl} \tau_k \tau_l$ (coordonatele uzuale în vecinătatea punctului fix se leagă de φ_k și τ_k prin relațiile $p_k = \sqrt{2\tau_k} \cos \varphi_k$, $q_k = \sqrt{2\tau_k} \sin \varphi_k$.

Condiția de nedegenerare

$$\det (\omega_{kl}) \neq 0$$

garantează existența torilor invarianți n-dimensionali (apropiați de torii $\tau = \text{const}$) care formează, în vecinătatea punctului fix, o mulțime de măsură aproape totală.

Dacă $n = 1$, obținem o aplicație a planului obișnuit în el însuși iar torii invarianți se transformă în cercuri. Condiția de nedegenerare arată că, pentru forma normală, derivata unghiului de rotație al unui cerc în raport cu aria mărginită de cerc este nenulă (în punctul fix și deci și într-o vecinătate a acestuia).

În acest caz ($n = 1$), condiția de nedegenerare garantează stabilitatea în sens Liapunov a punctului fix. Să observăm că în aceste condiții condiția de absență a rezonanțelor de ordin mic se scrie

$$\lambda^3 \neq 1, \qquad \lambda^4 \neq 1.$$

Prin urmare, un punct fix al unei aplicații a planului, care conservă aria, este stabil în sens Liapunov dacă partea liniară a aplicației este o rotație de un unghi care diferă de un multiplu al lui 90° și 120° și dacă coeficientul ω_{11} din forma normală a lui Birkhoff

este diferit de zero (această ultimă condiție garantează că unghiul de rotație depinde netrivial de rază).

În cele de mai sus nu ne-am oprit asupra condițiilor de netezime care se presupun în aceste teoreme. Netezimea minimă necesară nu se cunoaște în nici unul din cazuri. Ca exemplu, să menționăm că ultima propoziție privind stabilitatea punctelor fixe ale aplicațiilor planului în plan a fost demonstrată la început de J. Moser în ipoteza că aplicația este de clasă C^{333} și numai după aceea datorită eforturilor lui Moser și Rüssman) numărul necesar de derivate a fost coborît la șase.

E. Aplicații ale teoremei de conservare a torilor invarianți și ale generalizărilor ei. Există multe probleme din mecanică cărora li se aplică teoremele formulate mai sus. Unul din cele mai simple exemple pe care le avem la îndemînă este mișcarea unui pendul sub acțiunea unui cîmp exterior cu variație periodică sau sub acțiunea oscilațiilor verticale ale punctului de suspendare.

Se știe că în absența rezonanței parametrice poziția inferioară de echilibru a pendulului este stabilă în aproximația liniară. *Stabilitatea acestei poziții de echilibru în cazul în care se iau în considerare și efectele neliniare* (în ipoteze suplimentare a absenței rezonanțelor de ordinul trei și patru) poate fi demonstrată numai cu ajutorul teoremelor de conservare a torilor invarianți.

În mod similar, teorema de conservare a torilor invarianți poate fi utilizată pentru a studia mișcările cvasiperiodice ale unui sistem de oscilatori neliniari legați.

Un alt exemplu îl reprezintă curentul geodezic pe o suprafață convexă apropiată de un elipsoid. Acest sistem are două grade de libertate și ne putem convinge că *majoritatea geodezicelor de pe o suprafață apropiată de un elipsoid cu trei axe oscilează între două «caustici» apropiate de linii de curbură ale suprafeței, umplînd dens inelul mărginit de aceste caustici.* În același timp, obținem și teorema de stabilitate a celor două geodezice închise care se obțin prin deformarea suprafeței din cele două elipse care conțin axa mijlocie a elipsoidului (în absența rezonanțelor de ordinul 3 și 4).

Ca un alt exemplu putem considera traiectoriile închise pe o masă de biliard de o formă convexă arbitrară. Printre aceste traiectorii de biliard închise există și unele care sînt stabile în aproximația liniară și putem trage concluzia că, în cazul general, acestea sînt cu adevărat stabile. Un exemplu de astfel de traiectorie de biliard stabilă este axa mică a unei elipse (pe un biliard eliptic). Prin

urmare, *orice traiectorie de biliard închisă apropiată de axa mică a elipsei, pe un biliard apropiat de unul eliptic, este stabilă.*

Aplicarea teoremei de conservare a torilor invarianţi la problema rotaţiei unui solid rigid greu nesimetric permite să se analizeze cazul neintegrabil al unui solid care se roteşte rapid. Din punct de vedere matematic, problema rotaţiei rapide este echivalentă cu problema mişcării cu viteză moderată într-un cîmp gravitaţional slab : parametrul esenţial este raportul dintre energia potenţială şi cea cinetică. Dacă acest parametru este mic, putem utiliza ca primă aproximaţie mişcarea euleriană a solidului rigid.

Aplicînd teorema de conservare a torilor invarianţi problemei cu două grade de libertate care se obţine prin eliminarea coordonatei ciclice (rotaţie în jurul verticalei) ajungem la următorul rezultat privind mişcarea rapidă de rotaţie : *dacă energia cinetică de rotaţie este suficient de mare în raport cu energia potenţială, lungimea vectorului moment cinetic şi înclinarea sa faţă de orizont rămîn veşnic în vecinătatea valorilor lor iniţiale.*

Din aceasta rezultă că mişcarea corpului va fi veşnic apropiată de combinaţia dintre mişcarea lui Euler-Poinsot şi precesia azimutală, excluzînd însă cazul în care valorile iniţiale ale energiei cinetice şi momentului total sînt apropiate de cele pentru care corpul se poate roti în jurul axei mijlocii de inerţie. În ultima situaţie, care se realizează numai în condiţii iniţiale speciale, apare, în urma bifurcării separatoarelor în vecinătatea axei mijlocii, o rostogolire mai complicată decît mişcarea lui Euler-Poinsot în jurul axei mijlocii.

Una din generalizările teoremei de conservare a torilor invarianţi este teorema de invarianţă adiabatică (pe toată axa timpului) a variabilei acţiune într-un sistem unidimensional oscilant cu parametrii variabili periodic. În acest caz trebuie să presupunem că legea de variaţie a parametrilor este dată de o funcţie netedă fixată, periodică în variabila timp lent, iar parametrul mic al problemei este raportul dintre perioada oscilaţiilor proprii şi perioada de variaţie a parametrilor.

Deci, *dacă perioada de variaţie a parametrilor este destul de mare, variaţia invariantului adiabatic al punctului din spaţiul fazelor rămîne mică pe un interval infinit de timp.*

În mod analog se demonstrează *invarianţa adiabatică pe interval infinit a variabilei acţiune în problema mişcării unei particule încărcate într-un cîmp magnetic cu simetrie axială.* În această problemă, distrugerea simetriei axiale măreşte de la doi la trei numărul gradelor de libertate şi deci torii invarianţi încetează de a mai separa varietatea de nivel constant a energiei ; prin urmare devine importantă hoinăreala orbitei prin zonele de rezonanţă.

În sfîrşit, atunci cînd se aplică rezultatele de mai sus în problema celor trei (sau mai multor) corpuri se reuşeşte găsirea unor *mişcări cvasiperiodice* de *«tip planetar»*. Pentru a descrie aceste mişcări, trebuie să spunem cîteva cuvinte despre aproximaţia care urmează celei kepleriene în problema mişcării planetelor. Pentru simplitate, ne vom restrînge aici la problema plană.

Să considerăm, pentru fiecare elipsă kepleriană, vectorul care uneşte focarul elipsei (deci Soarele) cu centrul elipsei. Acest vector se numeşte *vectorul lui Laplace* şi el caracterizează atît mărimea excentricităţii elipsei, cît şi direcţia spre periheliu.

Interacţiile reciproce dintre planete conduc la o mică variaţie în timp a elipselor kepleriene (şi deci a vectorilor lui Laplace). În această variaţie există însă o mare deosebire între comportarea semiaxei mari şi comportarea vectorului Laplace. Şi anume, semiaxa mare nu are perturbaţii seculare — altfel spus, în prima aproximaţie ea nu face decît să oscileze uşor în jurul valorii ei medii („teorema lui Laplace"). Vectorul lui Laplace efectuează însă atît oscilaţii periodice, cît şi o mişcare seculară. Mişcarea seculară se obţine dacă se repartizează masa fiecărei planete de-a lungul orbitei ei, proporţional cu timpul necesar pentru parcurgerea fragmentului de orbită şi se înlocuieşte atracţia dintre planete cu atracţia dintre inelele astfel obţinute, deci se mediază perturbaţia pe mişcările rapide. Mişcarea reală a vectorului lui Laplace se obţine din superpoziţia peste mişcarea seculară a oscilaţiilor mici ; aceste oscilaţii sînt destul de importante dacă ne interesează un interval mic de timp (de ordinul anilor) dar efectul lor devine mic în raport cu efectul mişcării seculare dacă se consideră un interval mare de timp (de ordinul miilor de ani).

Calculele (efectuate încă de Lagrange) arată că mişcarea seculară a vectorului lui Laplace a fiecăreia din cele n planete care se mişcă în plan constă în următoarele (dacă se neglijează pătratele excentricităţilor orbitelor în raport cu excentricităţile).

În planul orbitelor trebuie să considerăm n vectori de lungimi fixate care se rotesc uniform, fiecare cu viteza sa unghiulară. Vectorul lui Laplace este suma lor.

Această descriere a mişcării vectorului lui Laplace se obţine datorită faptului că sistemul hamiltonian mediat pe mişcările rapide, care descrie mişcarea seculară a vectorului lui Laplace, are

o poziţie de echilibru, corespunzătoare excentricităţilor nule. Mişcarea descrisă a vectorului lui Laplace reprezintă descompunerea oscilaţiilor mici în vecinătatea poziţiei de echilibru indicate în oscilaţii proprii. Vitezele unghiulare de rotaţie uniformă a vectorilor care compun vectorul lui Laplace sînt frecvenţele proprii, iar lungimile acestor vectori definesc amplitudinile oscilaţiilor proprii.

Să observăm că mişcarea vectorului Laplace al Pămîntului este, aparent, unul din factorii de care sînt legate perioadele glaciare. Astfel atunci cînd excentricitatea Pămîntului creşte timpul pe care acesta îl petrece în vecinătatea Soarelui se micşorează, iar cel pe care îl petrece departe de Soare se măreşte (conform legii constanţei ariilor); prin urmare, climatul devine mai aspru cu creşterea excentricităţii. Mărimea acestui efect este astfel încît, de exemplu, cantitatea de energie solară care se primeşte într-un an la latitudinea Leningradului poate atinge valori care corespund de fapt latitudinii Kievului (la micşorarea excentricităţii) şi Taimîrului (dacă ea creşte). Perioada caracteristică de variaţie a excentricităţii (de zeci de mii de ani) este în bună concordanţă cu perioada de înaintare a gheţarilor.

Teoremele de conservare a torilor invarianţi conduc la concluzia că pentru mase suficient de mici ale planetelor, în spaţiul de faze al problemei există o mulţime de măsură pozitivă formată din orbite cvasiperiodice pentru care mişcarea corespunzătoare planetelor este apropiată de mişcarea pe elipse de excentricităţi care variază lent, mişcarea vectorilor lui Laplace fiind apropiată de cea dată de prima aproximaţie descrisă mai sus. În plus, dacă masele planetelor sînt suficient de mici, mişcările de acest tip formează o mare parte a domeniului spaţiului fazelor corespunzător, în aproximaţia kepleriană, mişcării planetelor în acelaşi sens pe elipse de excentricităţi mici care nu se intersectează.

Dacă se consideră Soarele nemişcat, numărul gradelor de libertate ale problemei plane a mişcării a n planete este $2n$. Integrala primă a momentului cinetic permite eliminarea unei coordonate ciclice. Rămîn însă destul de multe variabile şi torii invarianţi nu separă varietatea de nivel constant a energiei (chiar şi atunci cînd este vorba de două planete: această varietate este de dimensiune cinci, iar torii sînt bidimensionali). Din această cauză în problema considerată nu se pot trage concluzii cu privire la conservarea semiaxelor mari pe un interval de timp nemărginit pentru toate condiţiile iniţiale, ci numai pentru majoritatea lor.

O problemă cu două grade de libertate se obţine idealizînd în continuare modelul. Înlocuim una din cele două planete cu un „asteroid" care se mişcă în cîmpul celei de-a doua planete (Jupiter) fără a influenţa mişcarea acesteia din urmă.

Problema mişcării unui astfel de asteroid se numeşte *problema restrînsă a celor trei corpuri*. Problema plană restrînsă a celor trei corpuri conduce la un sistem cu două grade de libertate care depinde periodic de timp şi descrie mişcarea asteroidului. Dacă, în plus, se presupune că orbita lui Jupiter este circulară, atunci în sistemul de coordonate care se roteşte împreună cu el se obţine un sistem hamiltonian autonom cu două grade de libertate — aşa-numita problemă plană circulară a celor trei corpuri.

În această problemă există un parametru mic — raportul dintre masa lui Jupiter şi masa Soarelui. Valorii nule a parametrului îi corespunde mişcarea neperturbată, kepleriană, a asteroidului, care se reprezintă în spaţiul fazelor ca o mişcare cvasiperiodică pe un tor de dimensiune doi (deoarece sistemul de coordonate se roteşte). Una dintre frecvenţele acestei mişcări cvasiperiodice este aceeaşi pentru toate condiţiile iniţiale: ea este viteza unghiulară de rotaţie a sistemului de coordonate, deci frecvenţa de rotaţie a lui Jupiter în jurul Soarelui. A doua frecvenţă depinde de condiţiile iniţiale (ea este frecvenţa de rotaţie a asteroidului în jurul Soarelui) şi variază pe varietatea de nivel constant fixat al hamiltonianului.

Prin urmare, condiţia de nedegenerare nu este satisfăcută în această ultimă problemă; condiţia de nedegenerare izoenergetică este însă satisfăcută şi deci teorema lui Kolmogorov poate fi aplicată. Ajungem la concluzia că majoritatea torilor invarianţi cu raportul frecvenţelor iraţional se conservă atunci cînd masa planetei perturbatoare (Jupiter) este nenulă, dar suficient de mică.

În continuare, să observăm că torii invarianţi bidimensionali separă varietatea tridimensională de nivel constant a hamiltonianului. Prin urmare, *mărimea semiaxei mari şi excentricitatea elipsei kepleriene a asteroidului vor rămîne veşnic în vecinătatea condiţiilor iniţiale, în ipoteza că la momentul iniţial elipsa kepleriană nu intersecta orbita planetei perturbatoare şi că masa acestei planete este destul de mică.*

În sistemul fix de coordonate elipsa kepleriană a asteroidului se poate roti lent, sistemul nostru fiind numai izoenergetic nedegenerat şi deci la perturbarea unui tur invariant conservîndu-se numai raportul dintre frecvenţe, nu şi frecvenţele. Ca rezultat al perturbării, frecvenţa mişcării azimutale a periheliului asteroidului în sistemul mobil de coordonate poate fi uşor diferită de frecvenţa lui Jupiter şi atunci în sistemul fix periheliul se va roti lent.

ANEXA 9

TEOREMA GEOMETRICĂ A LUI POINCARÉ; GENERALIZĂRI ŞI APLICAŢII

În studiul său al soluţiilor periodice ale problemelor mecanicii cereşti, H. Poincaré a construit un model foarte simplu care nu elimină însă dificultatea fundamentală a problemei. Un astfel de model este o aplicaţie care conservă aria unei coroane plane pe ea însăşi.

Aplicaţiile de tipul indicat apar atunci cînd se studiază sistemele dinamice cu două grade de libertate, şi anume se construieşte o aplicaţie a unei suprafeţe de secţiune bidimensională pe ea însăşi în modul următor: fiecare punct al suprafeţei de secţiune se transformă în următorul punct de intersecţie a orbitei care pleacă din el cu suprafaţa de secţiune (vezi anexa 7).

Orbitelor închise le corespund puncte fixe ale aplicaţiei suprafeţei de secţiune sau ale iteratelor sale. Reciproc, fiecare punct fix al aplicaţiei suprafeţei de secţiune sau al unei iterate a acesteia determină o orbită închisă.

În acest mod problema existenţei soluţiilor periodice ale problemelor dinamicii se reduce la problema determinării punctelor fixe ale aplicaţiilor unei coroane pe ea însăşi care conservă aria.

A. Punctele fixe ale unei aplicaţii a unei coroane pe ea însăşi.

Teoremă. *Fie dat un homeomorfism al unei coroane pe ea însăşi, care conservă aria. Să presupunem că cercurile care formează frontiera coroanei se rotesc sub acţiunea acestui hemeomorfism în sensuri contrare. Atunci această aplicaţie are cel puţin două puncte fixe.*

Condiţia privind rotirea în sensuri contrare a celor două cercuri de frontieră se exprimă prin faptul că dacă se aleg drept coordonate în coroană (x, y mod 2π) astfel încît cercurile de frontieră să aibă ecuaţiile $x = a$ şi respectiv $x = b$, atunci aplicaţia este dată de formulele

$$(x,y) \mapsto (f(x,y),\ y + g(x,\ y)),$$

unde funcţiile f şi g sînt continue şi $2\pi-$ periodice în y, iar $f(a, y) \equiv a$, $f(b, y) \equiv b$ şi $g(a, y) < 0$, $g(b, y) > 0$ pentru orice y.

Demonstraţia acestei teoreme, pe care Poincaré a enunţat-o şi a publicat-o cu puţin înaintea morţii sale, a fost făcută de abia mai tîrziu, de către G.D. Birkhoff (vezi cartea sa *Dynamical systems*, New York, 1927).

Numeroase probleme legate de această teoremă şi în special încercările de a o generaliza la mai multe dimensiuni, ceea ce ar fi important pentru studierea soluţiilor periodice ale problemelor cu mai mult de două grade de libertate, au rămas deschise pînă azi.

Dificultatea rezidă în faptul că în timp ce raţionamentele cu ajutorul cărora Poincaré a ajuns la enunţarea teoremei sale se aplică într-o serie întreagă de alte cazuri, demonstraţia ingenioasă dată de Birkhoff se pretează cu greutate la generalizări. Din acest motiv nu se ştie dacă concluziile sugerate de raţionamentele lui Poincaré sînt valabile sau nu în afara cadrului teoremei privind coroana plană. Aceste raţionamente constau în următoarele.

B. Legătura dintre punctele fixe ale unei aplicaţii şi punctele critice ale aplicaţiei sale generatoare. Vom defini un difeomorfism simplectic al coroanei,

$$(x,y) \mapsto (X,Y),$$

cu ajutorul funcţiei generatoare $Xy + S\ (X,\ y)$, unde funcţia S este $2\pi-$ periodică în y. Pentru a da în acest fel difeomorfismul, trebuie să fie îndeplinită condiţia $\partial X/\partial x \neq 0$. Atunci

$$\mathrm{d}S = (x - X)\ \mathrm{d}y + (Y - y)\ \mathrm{d}X$$

şi prin urmare, punctele fixe ale difeomorfismului sînt punctele critice ale funcţiei $F(x, y) = S\ (X\ (x, y), y)$. Această ultimă funcţie F poate fi construită totdeauna, definind-o ca integrală din forma $(x-X)\ \mathrm{d}y + (Y-y)\ \mathrm{d}X$. Gradientul acestei funcţii este îndreptat, pe ambele cercuri de frontieră la fel: fie spre interiorul coroanei, fie spre exteriorul ei (datorită condiţiei privind rotirea în sensuri opuse).

Dar fiecare funcţie netedă pe coroană, al cărui gradient pe ambele cercuri de frontieră este îndreptat spre interiorul coroanei (sau spre exteriorul ei) are în interiorul coroanei un punct critic (un maxim sau un minim). În plus, se poate arăta că numărul

punctelor critice ale unei astfel de funcţii definite pe coroană este cel puţin doi. Prin urmare, am fi putut afirma că difeomorfismul nostru are cel puţin două puncte fixe, dacă am fi fost siguri că orice punct critic al funcţiei F este punct fix al aplicaţiei.

Din păcate, acest fapt este adevărat numai în ipoteza suplimentară $\partial X/\partial x = 0$, care asigură că F se poate exprima prin X şi y. Prin urmare, raţionamentul nostru este valabil pentru orice aplicaţie care nu diferă prea mult de identitate. De exemplu, este suficient ca derivatele parţiale ale funcţiei generatoare S să fie mai mici ca 1.

O anumită perfecţionare a acestui raţionament (cu o altă alegere a funcţiei generatoare*)) arată că este chiar suficient numai ca toate valorile proprii ale matricii jacobianului $D(X, Y)/D(x, y)$ să fie diferite de -1, deci ca aplicaţia noastră să nu rotească spaţiul tangent în nici un punct. Din păcate, pentru aplicaţiile care nu sînt apropiate de cea identică, toate condiţiile încetează să mai fie satisfăcute în anumite puncte. În cazul general demonstraţia teoremei lui Poincaré utilizează cu totul alte consideraţii.

Legătura dintre punctele fixe ale aplicaţiei şi punctele critice ale aplicaţiei generatoare pare un fapt mult mai profund decît însăşi teorema privind aplicaţia unei coroane. Mai jos se dau cîteva exemple în care această legătură conduce la concluzii pline de conţinut; este adevărat însă că apar anumite ipoteze restrictive a căror necesitate nu este clară.

C. Difeomorfismele simplectice ale torului. Să considerăm un difeomorfism simplectic al torului, care lasă pe loc centrul său de greutate:

$$(x, y) \mapsto (x + f(x, y),\ y + g(x, y)) = (X, Y),$$

unde x şi y mod 2π sînt coordonate unghiulare pe tor; caracterul simplectic se exprimă prin egalitatea cu 1 a jacobianului $D(X, Y)/D(x, y)$ iar condiţia de conservare a centrului de greutate prin faptul că valorile medii ale funcţiilor f şi g sînt nule.

*) $d\Phi = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} X - x & Y - y \\ dX + dx & dY + dy \end{vmatrix}$.

Teoremă. *Un astfel de difeomorfism are cel puţin patru puncte fixe — dacă se consideră multiplicităţile — şi cel puţin trei puncte fixe geometric distincte, aceasta cel puţin în ipoteza că nici una din valorile proprii ale matricii jacobiene nu este egală cu* -1, *în nici un punct al torului.*

Demonstraţia se bazează pe considerarea unei funcţii pe tor definită de formula

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\int (X - x)(dY + dy) - (Y - y)(dX + dx),$$

şi pe faptul că orice funcţie netedă pe tor are cel puţin patru puncte critice (considerînd multiplicităţile), printre care se află cel puţin trei puncte geometric distincte.

Încercările de a demonstra această teoremă fără a impune restricţii valorilor proprii întîmpină dificultăţi foarte asemănătoare cu cele de care s-a ciocnit Poincaré în teorema coroanei.

Să observăm că teorema coroanei s-ar fi putut deduce din teorema torului dacă în aceasta din urmă am fi putut înlătura ipoteza privind valorile proprii. Într-adevăr, să formăm un tor din două exemplare ale coroanei noastre, lipind la fiecare din cele două cercuri de frontieră încă cîte o coroană îngustă de unire.

Putem atunci construi din aplicaţia dată a coroanei un difeomorfism simplectic al torului astfel încît: 1) pe fiecare din cele două coroane mari difeomorfismul să coincidă cu cel iniţial; 2) pe fiecare din coroanele de unire difeomorfismul să nu aibă puncte fixe; 3) centrul de greutate să fie lăsat pe loc.

Construcţia unui astfel de difeomorfism al torului utilizează ipoteza privind modul în care se rotesc cele două cercuri de frontieră. Pe fiecare din coroanele de unire toate punctele se deplasează în aceeaşi direcţie ca şi pe cele două cercuri care mărginesc fiecare coroană de unire. Deoarece pe cele două coroane de unire direcţiile de deplasare sînt opuse, mărimea deplasării poate fi aleasă în aşa fel încît centrul de greutate să fie conservat.

Acum, din cele patru puncte fixe de pe tor, două trebuie să fie conţinute în coroana iniţială şi deci obţinem teorema referitoare la coroană din cea referitoare la tor.

Teorema cu privire la tor formulată mai sus se generalizează şi la alte varietăţi simplectice, atît bidimensionale cît şi cu mai multe dimensiuni. Pentru a formula aceste generalizări, trebuie înainte de toate să reformulăm condiţia de conservare a centrului de greutate.

Fie $g: M \to M$ un difeomorfism simplectic al varietăţii M. Spunem că difeomorfismul g este *omolog cu identitatea* dacă el poate fi unit cu difeomorfismul identic (care lasă pe loc toate punctele varietăţii M) printr-o curbă netedă g_t formată din difeomorfisme simplectice, astfel încît cîmpul de viteze $\dot{g}_t$ să aibă, la

fiecare moment de timp t fixat, un hamiltonian uniform (univoc). Se poate demonstra că toate difeomorfismele simplectice care sînt omologe cu identitatea formează comutantul componentei conexe a elementului unitate al grupului tuturor difeomorfismelor simplectice ale varietății M.

În cazul în care varietatea noastră este un tor bidimensional, difeomorfismele simplectice omologe cu identitatea coincid cu difeomorfismele de mai sus despre care am afirmat că păstrează centrul de greutate.

În acest mod ajungem la următoarea generalizare a teoremei lui Poincaré.

Teoremă. *Orice difeomorfism simplectic omolog cu identitatea al unei varietăți simplectice compacte are un număr minim de puncte fixe care coincide cu numărul minim de puncte critice ale unei funcții netede definite pe varietate, cel puțin în cazul în care acest difeomorfism nu este prea îndepărtat de difeomorfismul identitate.*

Să remarcăm că ipoteza de omologie a difeomorfismului cu identitatea este esențială — aceasta se vede chiar și pe exemplul unei translații a torului : aceasta nu are nici un punct fix.

În ceea ce privește ultima restricție (ca difeomorfismul să nu fie prea îndepărtat de identitate), nu este clar dacă ea este esențială sau nu. În cazul în care varietatea noastră este un tor de dimensiunea $2n$, este suficient ca toate valorile proprii ale matricii jacobiene a difeomorfismului (într-un oarecare sistem global de coordonate simplectice dat pe $\mathbf{R}^n$) să fie diferite de -1 și aceasta în orice punct al torului.

Este posibil ca o restricție de acest tip să fie chiar și necesară în problemele multidimensionale. Nu este exclus ca teorema lui Poincaré să reprezinte un efect esențial bidimensional, la fel ca următoarea teoremă a lui A. I. Șnirelman și N. A. Nikișin. *Orice difeomorfism al sferei bidimensionale care conservă aria are cel puțin două puncte fixe geometric distincte.*

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe observația că indicele cîmpului vectorial dat de gradientul unei funcții netede de două variabile nu poate fi, într-un punct critic izolat, mai mare decît 1 (deși poate fi egal cu 1,0, -1, -2, -3, ...), în timp ce suma indicilor tuturor punctelor fixe ale unei difeomorfism al sferei bidimensionale care conservă orientarea este egală cu doi.

Indicele gradientului unei funcții netede de mai mult de două variabile într-un punct critic poate însă lua orice valoare întreagă.

D. Intersecțiile varietăților lagrangeene. Raționamentului lui Poincaré i se poate da și o altă formă, dacă se consideră pe fiecare rază a coroanei punctele care se deplasează pur radial. Puncte de acest tip există pe fiecare din raze, datorită faptului că cercurile care formează frontiera coroanei se rotesc în sensuri opuse. Să presupunem că am reușit să formăm, din punctele care se mișcă pur radial sub acțiunea aplicației, o curbă închisă care separă cercul exterior al coroanei de cel interior. Atunci imaginea acestei curbe prin aplicația noastră, trebuie să intersecteze curba (deoarece domeniile în care curba împarte coroana se transformă în domenii de arii egale cu cele ale domeniilor inițiale).

Dacă atît curba construită cît și imaginea ei intersectează fiecare rază în cîte un singur punct, atunci punctele de intersecție ale curbei cu imaginea ei sînt evident puncte fixe ale aplicației studiate.

Cîte ceva din ultimul raționament se poate extinde și la cazul mai multor dimensiuni, obținîndu-se în acest mod rezultate utile privind soluțiile periodice ale problemelor dinamicii. În cazul mai multor dimensiuni, rolul coroanei este jucat de un spațiu de faze care este produsul cartezian dintre un domeniu al unui spațiu euclidian și un tor de aceeași dimensiune (coroana este produsul dintre un interval și un cerc). Structura simplectică pe acest spațiu de faze este dată în modul uzual, deci de forma $\Omega = \sum dx_k \wedge dy_k$, unde x_k sînt variabilele acțiune, iar y_k — variabilele unghiulare.

Nu este greu să punem în evidență acele difeomorfisme care sînt omologe cu identitatea, și anume difeomorfismul simplectic A este omolog cu identitatea dacă el poate fi obținut din identitate printr-o deformare continuă și dacă, în plus,

$$\oint_{\gamma} x \, dy = \oint_{A\gamma} x \, dy$$

pentru orice contur închis (care nu este neapărat omolog cu zero).

Condiția de omologie cu aplicația identică interzice existența unei deplasări sistematice de-a lungul direcțiilor x („evoluția variabilelor acțiune") permițînd deplasările de-a lungul torilor.

Să considerăm unul din torii n-dimensionali $x = c =$ const și să-i aplicăm difeomorfismul simplectic omolog cu identitatea, pe care îl studiem. Obținem un nou tor de dimensiune n. Se dovedește că *torul inițial se intersectează cu imaginea sa în cel puțin 2^n puncte (considerate cu multiplicitatea lor), printre care se află cel puțin $n + 1$ puncte geometric distincte; acest rezultat este adevărat cel puțin în ipoteza că torul imagine este dat de o ecuație de forma $x = f(y)$ cu f funcție netedă.*

În cazul $n = 1$, rezultatul enunțat arată că fiecare din cercurile concentrice care formează coroana se intersectează cu imaginea sa în cel puțin două puncte. Aceasta rezultă imediat din conservarea ariei, ipoteza că cercul — imagine are o ecuație de forma $x = f(y)$ nemaifiind necesară.

Nu este clar dacă această ipoteză este necesară în cazul $n > 2$. Dacă însă o facem, demonstrația decurge în modul următor.

Să observăm că torul inițial este o subvarietate lagrangeană a spațiului fazelor. Difeomorfismul nostru este simplectic și deci torul imagine este o subvarietate lagrangeană. Restricția 1-formei diferențiale $(x-c)\,\mathrm{d}y$ la acest tor este deci închisă. În plus, această formă este, pe tor diferențiala unei funcții netede *uniforme* F: într-adevăr, difeomorfismul nostru este omolog cu identitatea și deci, pentru orice contur închis γ

$$\oint_{\gamma} (x - c)\,\mathrm{d}y = \oint_{A\gamma} x\,\mathrm{d}y - \oint_{A\gamma} c\,\mathrm{d}y = \oint_{\pi} x\,\mathrm{d}y - \oint_{A\gamma} c\,\mathrm{d}y = c$$

$$\oint_{\gamma} \mathrm{d}y - c\oint_{A\gamma} \mathrm{d}y = 0.$$

Să observăm că punctele de intersecție ale torului cu imaginea sa sînt puncte critice ale funcției F (deoarece în aceste puncte $\mathrm{d}F = (x-c)\,\mathrm{d}y = 0$).

Din ipoteza care asigură că torul imagine se proiectează univoc (deci că torul imagine este dat de o ecuație $x = f(y)$) rezultă că și reciproca este adevărată, astfel încît toate punctele critice ale funcției F sînt puncte de intersecție ale torilor noștri. Într-adevăr această ipoteză ne asigură că y se poate lua ca coordonată locală pe tor și deci că dacă $\mathrm{d}F$ se anulează pe toți vectorii tangenți la torul imagine, obținem $x = c$.

O funcție netedă pe un tor de dimensiune n are cel puțin 2^n puncte numărate cu multiplicitățile lor; dintre acestea, cel puțin $n+1$ sînt geometric distincte (vezi, de exemplu, J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton, 1963).

Rezultă că torii noștri se intersectează în cel puțin 2^n puncte (considerate cu multiplicitățile lor), punctele de intersecție geometric distincte fiind în număr de cel puțin $n + 1$.

Exact același raționament arată că *imaginea oricărui tor lagrangean se intersectează cu torul în cel puțin 2^n puncte (printre care se află cel puțin $n+1$ puncte geometric distincte), de îndată ce facem ipoteza că atît torul inițial, cît și imaginea sa se proiectează univoc pe spațiul $\{y\}$, deci sînt definiți de ecuațiile $x = f(y)$ și respectiv $x = g(y)$.*

Dealtfel, această afirmație se reduce la cea precedentă prin transformarea canonică $(x, y) \mapsto (x - f(y), y)$.

E. Aplicații la căutarea punctelor fixe și a soluțiilor periodice. Să considerăm o transformare simplectică omologă cu identitatea și de forma specială care apare în problemele integrabile ale dinamicii, deci de forma

$$A_0(x, y) = (x, y + \omega(x)), \text{ unde } \omega = \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Aici $x \in \mathbf{R}^n$ este variabila acțiune și $y \pmod{2\pi} \in T^n$ este coordonată triunghiulară.

Să presupunem că pe torul $x = x_0$ toate frecvențele sînt comensurabile:

$$\omega_i(x_0) = \frac{k_i}{N} 2\pi,$$

unde k_i și N sînt întregi; că $\omega(x_0) \neq 0$ și că este îndeplinită condiția de nedegenerare

$$\det\,(\partial\omega/\partial x)|_{x_0} = 0.$$

Teoremă. *Orice difeomorfism simplectic A omolog cu identitatea, suficient de apropiat de A_0, are în vecinătatea torului $x = x_0$ cel puțin 2^n puncte periodice de perioadă N (deci puncte ξ cu proprietatea $A^N \xi = \xi$), numărînd multiplicitățile.*

Demonstrația s-ar fi putut reduce la studierea intersecției a două subvarietăți lagrangeene ale spațiului $4n$-dimensional $\mathbf{R}^n \times T^n \times \mathbf{R}^n \times T^n$ cu structura simplectică $\Omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y$: una dintre acestea este diagonala $(X = x, Y = y)$ iar cealaltă — graficul aplicației A^N.

Este însă mai simplu să se construiască direct o funcție adecvată de tor. Într-adevăr, aplicația A_0^N are forma

$$(x, y) \mapsto (x, y + \alpha(x)), \text{ unde } \alpha(x_0) = 0 \text{ și}$$

det $(\partial\alpha/\partial x)\,|_{x_0} = 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite, aplicația A^N are în vecinătatea torului $x = x_0$ un tor care se deplasează sub acțiunea ei pur radial $((x, y) \mapsto (X, y))$ și este definit de o ecuație de forma $x = f(y)$, imaginea acestui tor fiind și ea dată de o ecuație de aceeași formă, $x = g(y)$. În aceste notații, $X(f(y), y) = g(y)$, $Y(f(y), y) = y$.

Din faptul că aplicația A este omoloagă cu identitatea rezultă că A^N are o funcție generatoare globală de forma $Xy + S(X, y)$ unde S este 2π — periodică în variabilele y.

Funcția $F(y) = S(X(f(y)), y)$ are pe tor cel puțin 2^n puncte critice y_k. Toate punctele $\xi_k = (f(y_k), y_k)$ sînt puncte periodice pentru A^N. Într-adevăr :

$$dF = (x - X)\,dy + (Y - y)\,dX = (x - X)\,dy = (f(y) - g(y))\,dy.$$

Prin urmare, din $dF|_{y_k} = 0$ rezultă că $f(y_k) = g(y_k)$ și deci $A^N\,\xi_k = \xi_k$, ceea ce trebuia demonstrat.

Să ne ocupăm în continuare de traiectoriile închise ale sistemelor conservative. Utilizînd terminologia din anexa 8, putem formula rezultatul care se obține în modul următor :

Corolar. *La dezintegrarea unui tor invariant n-dimensional format din orbite închise ale unui sistem izoenergetic nedegenerat cu n grade de libertate se formează cel puțin* 2^{n-1} *orbite închise ale problemei perturbate (numărate cu multiplicitățile lor) dintre care cel puțin n sînt geometric distincte; această afirmație este adevărată cel puțin în cazul în care perturbația este suficient de mică.*

Demonstrația se reduce la teorema precedentă cu ajutorul unei suprafețe de secțiune de dimensiune $2n-2$. Pentru aceasta este necesar ca, în primul rînd, să se aleagă coordonatele unghiulare y în așa fel încît orbitele închise ale problemei neperturbate pe tor să fie date de ecuațiile $\dot{y}_2 = \ldots = \dot{y}_n = 0$; după aceea, suprafața de secțiune se definește prin ecuația $y_1 = 0$.

În cazul unui sistem cu două grade de libertate se poate aplica teorema lui Poincaré coroanelor care se formează intersectînd torii invarianți cu o suprafață de secțiune bidimensională. Obținem atunci următorul rezultat.

În fanta dintre doi tori invarianți ai unui sistem cu două grade de libertate există totdeauna cel puțin două orbite închise, de îndată ce presupunem că rapoartele dintre frecvențele mișcărilor cvasiperiodice diferă de la un tor la celălalt.

În acest mod se obțin multe soluții periodice în toate problemele cu două grade de libertate în care s-au găsit tori invarianți (de exemplu, în problema restrînsă circulară a celor trei corpuri, în problema geodezicelor închise etc.). A fost chiar emisă ipoteza că în sistemele hamiltoniene „generice" cu spațiul de faze compact

orbitele închise formează o mulțime densă peste tot. Dealtfel, chiar dacă această afirmație este adevărată, faptul că majoritatea orbitelor sînt închise nu are o valoare esențială, deoarece perioadele lor sînt extraordinar de mari.

Un exemplu de aplicare a metodicii lui Poincaré la sisteme cu mai mult de două grade de libertate îl reprezintă teorema lui Birkhoff privind existența unei infinități de soluții periodice vecine cu o soluție periodică liniar-stabilă dată (sau privind existența unei infinități de puncte periodice în vecinătatea unui punct fix al unei transformări simplectice nedegenerate și liniar-stabile a spațiului fazelor pe el însuși). Demonstrația se efectuează în două etape : la început se aproximează aplicația prin forma ei normală, iar apoi se utilizează legătura dintre punctele fixe ale unei aplicații și punctele critice ale funcției generatoare.

Stabilirea prezenței soluțiilor periodice permite, între altele, să se demonstreze că nu există integrale prime (diferite de cele clasice) în multe probleme ale dinamicii. De exemplu, să presupunem că pe o anumită varietate de nivel constant al unor integrale prime cunoscute s-a descoperit o orbită periodică care nu este stabilă. În cazul general, separatoarele acestei soluții formează rețeaua complicată pe care am analizat-o în anexa 7. Dacă se reușește să se pună în evidență acest fenomen de bifurcare a separatoarelor și dacă se poate demonstra că separatoarele nu formează o varietate de dimensiune mai mică decît dimensiunea varietății de nivel constant considerate, atunci putem fi convinși că sistemul nu are integrale prime noi.

Dealtfel, adesea se reușește să se pună în evidență comportarea complicată a orbitelor care împiedică existența integralelor prime și fără a recurge la soluțiile periodice, aruncînd pur și simplu o privire asupra tabloului format de intersecțiile succesive ale unei orbite cu o suprafață de secțiune, tablou determinat cu ajutorul unui calculator electronic.

F. Invarianța funcției generatoare. Am subliniat mai sus supărătoarea neinvarianță a funcțiilor generatoare în raport cu alegerea sistemului de coordonate canonice pe o varietate simplectică.

Pe de altă parte, am utilizat în repetate rînduri legătura dintre punctele fixe ale unei aplicații și punctele critice ale funcției generatoare.

Se dovedește că, deși în general funcția generatoare nu este invariant legată de aplicația canonică, în vecinătatea unui punct fix există totuși o legătură invariantă.

Mai exact, să presupunem că se dă un difeomorfism simplectic care lasă pe loc un anumit punct. Definim în vecinătatea acestui punct „funcţia generatoare"

$$\Phi = \frac{1}{2}\int \sum_k \begin{vmatrix} X_k - x_k & Y_k - y_k \\ \mathrm{d}X_k + \mathrm{d}x_k & \mathrm{d}Y_k + \mathrm{d}y_k \end{vmatrix}$$

cu ajutorul unui sistem de coordonate simplectice arbitrare (x, y)*). Construim în continuare cu ajutorul unui alt sistem de coordonate simplectice (x', y') o funcţie generatoare Φ' definită similar.

Teoremă. *Dacă liniarizarea difeomorfismului simplectic dat în punctul fix nu are nici o valoare proprie egală cu -1, atunci funcţiile Φ şi Φ' sînt echivalente în vecinătatea acestui punct: există un difeomorfism g (care, în general, nu este simplectic) astfel încît*

$$\Phi(z) = \Phi'(g(z)) + \text{const}.$$

Demonstraţia se găseşte în lucrarea lui A. Weinstein, *The invariance of Poincaré's generating function for canonical transformations*, Inventiones Mathematicae, 16, *3* (1972), 202—214.

Trebuie să observăm aici că două difeomorfisme simplectice care au funcţii generatoare echivalente în vecinătatea unui punct fix comun nu sînt neapărat echivalente în clasa difeomorfismelor simplectice (de exemplu, o rotaţie pură şi o rotaţie cu un unghi care depinde de rază, care are partea pătratică în zero a funcţiei generatoare nedegenerată).

*) Creşterea acestei funcţii de-a lungul unui drum arbitrar este egală cu integrala formei care defineşte structura simplectică pe banda formată din segmentele care unesc fiecare punct al drumului cu imaginea sa prin difeomorfismul simplectic. Prin urmare, funcţia Φ este legată de difeomorfism într-un mod invariant la schimbările canonice de coordonate.

ANEXA 10

MULTIPLICITĂŢILE FRECVENŢELOR PROPRII ŞI ELIPSOIZI DEPENDENŢI DE PARAMETRI

În acest curs ne-am întîlnit de cîteva ori cu familii de elipsoizi în spaţiul euclidian. Spre exemplu, atunci cînd am studiat dependenţa frecvenţelor proprii ale oscilaţiilor mici de parametri am întîlnit sistemele de elipsoizi de nivel constant al energiei potenţiale în spaţiul euclidian (metrica spaţiului este definită de energia cinetică); aceşti elipsoizi depindeau de rigiditatea sistemului. Un exemplu îl constituie elipsoidul de inerţie al unui solid rigid (în acest caz parametrii sînt forma solidului rigid şi distribuţia de masă în el).

Vom considera aici o problemă generală, şi anume aceea a determinării valorilor parametrilor pentru care spectrul de valori proprii degenerează — elipsoidul corespunzător devine elipsoid de rotaţie. Să observăm că valorile proprii ale unei forme pătratice în spaţiul euclidian (sau lungimile axelor unui elipsoid) variază continuu la o variaţie continuă a parametrilor sistemului (coeficienţii formei). Pare deci natural să ne aşteptăm ca, într-un sistem care depinde de un singur parametru, atunci cînd parametrul variază să apară momente izolate în care una din valorile proprii să se ciocnească cu o alta şi deci, pentru valori izolate ale parametrului, sistemul să aibă un spectru multiplu.

Să ne reprezentăm, de exemplu, că vrem să transformăm elipsoidul de inerţie al unui solid rigid într-un elispoid de rotaţie, deplasînd pe o tijă fixată rigid de solid o masă de ajustare, astfel încît avem la dispoziţia noastră numai un singur parametru. Cele trei axe principale de inerţie a, b şi c vor fi funcţii continue de acest parametru şi la prima vedere s-ar părea că pentru o valoare convenabilă a parametrului (p) putem obţine egalitatea a două axe, de exemplu, $a(p) = b(p)$.

Se arată însă că în realitate se întîmplă altfel și că, în general, pentru a transforma elipsoidul de inerție într-un elipsoid de rotație, trebuie să deplasăm *cel puțin două mase de ajustare*.

În general, *în familiile de forme pătratice se observă un spectru multiplu numai dacă acestea depind de cel puțin doi parametri, iar în familiile cu un parametru generice spectrul este simplu pentru toate valorile parametrului*. Practic, aceasta se manifestă prin faptul că atunci cînd se variază parametrul într-o familie cu un singur parametru tipică, valorile proprii se pot apropia strîns unele de altele, dar, ajungînd suficient de aproape, încep parcă să se respingă una pe alta și se îndepărtează din nou, înșelînd astfel speranța celui care variază parametrul cu scopul de a realiza un spectru multiplu.

În anexa de față se analizează cauzele acestei comportări a valorilor proprii, care la prima vedere pare stranie; de asemenea se analizează pe scurt problemele similare pentru sisteme cu diverse grupuri de simetrie.

A. Varietatea elipsoizilor de rotație. Să considerăm mulțimea tuturor formelor pătratice în spațiul euclidian de dimensiune $2n$, $\mathbf{R}^n$. Această mulțime are și ea o structură de spațiu liniar de dimensiune $n(n+1)/2$. De exemplu, formele pătratice în plan formează un spațiu de dimensiune trei (forma $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ are drept coordonate numerele A, B și C).

Formele pătratice pozitiv definite formează în acest spațiu o submulțime deschisă (de exemplu, în cazul planului, această submulțime este interiorul uneia din pînzele conului $B^2=AC$ format de formele degenerate).

Fiecare elipsoid cu centrul în originea coordonatelor definește o formă pătratică pozitiv definită pentru care el este mulțimea de nivel constant 1; reciproc, mulțimea de nivel constant 1 a oricărei forme pătratice pozitiv definite este un elipsoid. Putem, prin urmare, identifica mulțimea formelor pătratice pozitiv definite cu mulțimea elipsoizilor cu centrul în originea coordonatelor.

În acest mod am introdus pe mulțimea elipsoizilor din $\mathbf{R}^n$ cu centrul în O o structură de varietate netedă de dimensiune $n(n+1)/2$ (această varietate este acoperită de o singură hartă: mulțimea deschisă descrisă în spațiul formelor pătratice).

Să considerăm acum mulțimea tuturor *elipsoizilor de rotație*. Afirmăm că această mulțime are în spațiul considerat codimensiunea 2: este definită de două ecuații independente și nu de una singură, așa cum s-ar părea la prima vedere.

Teorema 1. *Mulțimea elipsoizilor de rotație reprezintă o reuniune finită de subvarietăți netede de codimensiune 2 și mai mare ca 2 ale varietății tuturor elipsoizilor.*

Aici prin *codimensiunea* unei subvarietăți se înțelege diferența dintre dimensiunea spațiului ambiant și dimensiunea subvarietății.

D e m o n s t r a ț i e. Pentru început, să considerăm în spațiul de dimensiune n elipsoizii care au două axe egale și celelalte axe diferite. Un astfel de elipsoid este definit de direcțiile diferitelor axe, ceea ce dă un număr de

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2=(n+1)(n-2)/2$$

parametri și de mărimea axelor, deci de încă $n-1$ parametri. Prin urmare, numărul total de parametri este egal cu

$$(n^2-n-2-2n-2)/2$$

și deci este cu doi mai mic decît dimensiunea spațiului tuturor elipsoizilor $\left(\text{egală cu } \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Enumerarea de parametri dată mai sus arată de asemenea că mulțimea elipsoizilor cu exact două axe egale este o varietate.

În ceea ce privește elipsoizii cu un număr mai mare de axe egale este clar că aceștia formează o mulțime de dimensiune și mai mică. Demonstrația riguroasă a acestui rezultat se deduce din următoarea lemă.

Lemă. *Mulțimea tuturor elipsoizilor care au ν_2 axe de multiplicitate 2, ν_3 axe de multiplicitate 3, ν_4 axe de multiplicitate 4 ș.a.m.d. este o subvarietate netedă a varietății tuturor elipsoizilor și are codimensiunea*

$$2\cdot\nu_2+5\cdot\nu_3+9\cdot\nu_4+\ldots=\sum\frac{1}{2}(i-1)(i+2)\cdot\nu_i.$$

Demonstrația acestei leme se face prin același procedeu de enumerare a parametrilor ca și în cazul particular analizat mai sus (care corespunde alegerii $\nu_2=1$, $\nu_3=\nu_4=\ldots=0$). Cititorul poate face singur cu ușurință acest calcul, observînd la început că varie-

tatea tuturor subspaţiilor de dimensiune k ale unui spaţiu liniar real de dimensiune n este de dimensiune $k(n-k)$ (într-adevăr, un subspaţiu liniar de dimensiune k în poziţie generală poate fi considerat ca graficul unei aplicaţii liniare de la un spaţiu de dimensiune k la unul de dimensiune $n-k$ şi o astfel de aplicaţie este dată de o matrice dreptunghiulară de tip $k \times (n-k)$).

Exemplu. Să considerăm cazul $n = 2$, deci cazul elipselor în plan. O elipsă este definită de trei parametri (spre exemplu, de cele două lungimi ale axelor şi unghiul care dă înclinarea uneia din axe). Prin urmare, varietatea elipselor din plan (cu centrul în O) este de dimensiune trei, aşa cum rezultă şi din formula noastră.

Un cerc este însă definit de un singur parametru (raza). Prin urmare, subvarietatea cercurilor în spaţiul elipselor este o curbă într-un spaţiu de dimensiune trei şi nu o suprafaţă, cum s-ar părea la prima vedere.

Acest „paradox" devine eventual mai simplu de înţeles din următorul calcul. Formele pătratice $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ cu valori proprii egale formează, în spaţiul tridimensional cu coordonatele A, B, C, o varietate definită de *o singură* ecuaţie $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, unde $\lambda_{1,2}(A, B, C)$ sînt valorile proprii. Membrul stîng al acestei ecuaţii este însă o sumă de două pătrate, după cum se vede din formula discriminantului ecuaţiei caracteristice

$$\Delta = (A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2.$$

Prin urmare, unica ecuaţie $\Delta = 0$ defineşte în spaţiul tridimensional al formelor pătratice o dreaptă ($A = C$, $B = 0$) şi nu o suprafaţă.

Cea mai simplă concluzie care se poate trage din faptul că varietatea elipsoizilor de rotaţie are codimensiunea doi este că această varietate nu separă spaţiul tuturor elipsoizilor (şi varietatea formelor pătratice cu spectru multiplu nu separă spaţiul formelor pătratice), aşa cum o dreaptă nu separă spaţiul tridimensional.

Prin urmare, putem afirma nu numai că un elipsoid „generic" are toate axele de lungimi diferite ci şi că *doi asemenea elipsoizi pot fi uniţi în spaţiul elipsoizilor printr-o curbă netedă formată numai din elipsoizi cu axele de lungimi diferite.* În plus, dacă doi elipsoizi generici sînt uniţi în spaţiul elipsoizilor printr-o curbă netedă pe care există puncte care reprezintă elipsoizi de rotaţie, atunci, printr-o deformare oricît de mică a curbei, o putem face să nu mai întîlnească mulţimea elipsoizilor de rotaţie şi deci pe noua curbă nu vor fi decît puncte care reprezintă elipsoizi fără axe multiple.

Din cele arătate rezultă, în particular, o demonstraţie a creşterii frecvenţelor proprii atunci cînd creşte rigiditatea sistemului.

Într-adevăr, derivatele unei valori proprii de multiplicitate 1 a unei forme pătratice în raport cu parametrul sînt determinate de derivata formei pătratice în direcţia proprie corespunzătoare. Dacă rigiditatea creşte, atunci energia potenţială creşte în fiecare direcţie, în particular şi în cele proprii. Am demonstrat în acest fel teorema de creştere a frecvenţelor în cazul în care se poate trece de la sistemul dat la unul mai rigid, evitînd ca spectrul să devină multiplu. Demonstraţia în prezenţa unui spectru multiplu se obţine acum prin trecere la limită, ţinînd seama de faptul că partea interioară a drumului de trecere de la sistemul iniţial la cel mai rigid poate evita mulţimea sistemelor cu spectrul multiplu după o deformare oricît de mică.

Rezumînd, putem spune că *o familie tipică cu un parametru de elipsoizi (sau o familie tipică de forme pătratice în spaţiul euclidian nu conţine elipsoizi de rotaţie (forme pătratice cu spectru multiplu).* Aplicînd această concluzie elipsoidului de inerţie obţinem concluzia enunţată mai sus privind necesitatea a două mase de ajustare.

Să ne ocupăm acum de familiile cu doi parametri. Din calculele efectuate rezultă că *în familiile cu doi parametri de elipsoizi tipice, elipsoizii de rotaţie apar numai pentru puncte izolate din planul parametrilor.*

Să considerăm, spre exemplu, o suprafaţă convexă în spaţiul euclidian tridimensional. A doua formă pătratică a suprafeţei defineşte o elipsă în spaţiul tangent în fiecare punct şi prin urmare apare o familie cu doi parametri de elipse (care pot fi transformate toate într-un unic plan, alegînd un sistem de coordonate în vecinătatea unui punct al suprafeţei). Sîntem conduşi la concluzia că în fiecare punct al suprafeţei, cu excepţia unor puncte izolate, elipsa are axele inegale. Prin urmare, pe o suprafaţă generică apar două cîmpuri de direcţii ortogonale (corespunzătoare axelor mici şi axelor mari) care au *puncte singulare izolate.* În geometria diferenţială aceste direcţii se numesc *direcţiile principale de curbură,* iar punctele singulare — *puncte ombilicale.* De exemplu, pe suprafaţa unui elipsoid există exact patru puncte ombilicale; ele sînt aşezate pe elipsa care conţine axa mare şi cea mică a elipsoidului şi două dintre ele se observă uşor pe tabloul geodezicelor pe elipsoid (fig. 207).

Similar, *într-o familie tipică cu trei parametri, elipsoizii de rotaţie apar numai pe curbe izolate din spaţiul tridimensional al parametrilor.* De exemplu, dacă se dă cîte un elipsoid în fiecare punct al spaţiului euclidian tridimensional (altfel spus, se dă un tensor simetric cu doi indici), atunci singularităţile cîmpurilor axelor principale vor fi aşezate, în general, pe curbe izolate (unde două din cele trei cîmpuri de direcţii au salturi).

Aceste curbe, la fel ca şi punctele ombilicale din exemplul precedent, sînt de mai multe tipuri. Clasificarea lor (pentru cîmpurile de elipsoizi tipice) poate fi obţinută din clasificarea singularităţilor proiecţiilor lagrangeene, dată în anexa 12.

Într-o familie tipică cu *patru parametri*, elipsoizii de rotație apar numai pe suprafețe bidimensionale din spațiul parametrilor. Aceste suprafețe nu au alte singularități decît intersecții transversale în puncte izolate ale spațiului parametrilor; acestor valori ale parametrilor le corespund elipsoizi cu două perechi diferite de axe egale.

Axele de multiplicitate trei apar pentru prima dată în familiile cu cinci parametri, în puncte izolate ale spațiului parametrilor. Valorile parametrilor corespunzătoare elipsoizilor cu o axă de multiplicitate doi formează, în spațiul pentadimensional al parametrilor, o varietate tridimensională cu singularități de două tipuri : intersecții transversale a două ramuri de-a lungul unei curbe și singularități conice în puncte izolate (care nu sînt așezate pe această curbă), și anume în punctele din spațiul parametrilor corespunzătoare elipsoizilor cu o axă de multiplicitate trei.

O singularitate de tipul indicat este astfel construită încît prin intersecția cu o sferă de dimensiune patru și o rază mică cu centrul în punctul singular se obțin două exemplare ale planului proiectiv. Scufundările planului proiectiv în sfera de dimensiune patru, care apar în acest mod, sînt difeomorfe cu scufundarea care este definită de cinci funcții sferice de gradul doi pe sfera bidimensională (cinci combinații liniare de funcțiile $x_i x_j$, ortonormate în spațiul funcțiilor pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, ortogonale unității definesc o aplicație pară $S^2 \to S^4$ și deci o scufundare $\mathbf{R}P^2 \to S^4$.

Este util să mai determinăm cum se comportă valorile proprii ale unei forme pătratice dintr-o familie tipică cu doi parametri,

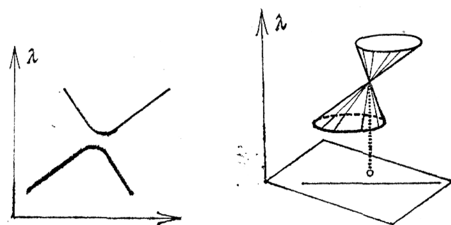


Fig. 243. Frecvențele proprii ale familiilor generice de sisteme oscilante cu unu și doi parametri

atunci cînd două valori proprii coincid. Un calcul nu prea lung arată că graficul perechii de valori proprii indicate are deasupra planului parametrilor, în vecinătatea unui punct singular, aspectul unui con cu două pînze, al cărui vîrf corespunde punctului singular, iar fiecare din pînze — uneia din valorile proprii (fig. 243).

O subfamilie tipică cu un parametru a familiei noastre cu doi parametri are forma unei curbe în spațiul parametrilor, care nu trece prin punctul singular. Fiecare subfamilie poate fi făcută să evite acest punct printr-o perturbație mică; familia cu un parametru care se obține în acest fel este o curbă în spațiul parametrilor care trece prin vecinătatea punctului singular. Graficul valorilor proprii deasupra unei curbe din planul parametrilor, care trece prin vecinătatea punctului singular, este format din acele puncte ale conului care se proiectează pe această curbă. Prin urmare, graficul indicat în vecinătatea punctului singular este apropiat de o hiperbolă, asemănătoare cu o pereche de drepte care se intersectează (s-ar fi obținut o pereche de drepte dacă familia noastră cu un parametru ar fi trecut prin punctul singular).

Raționamentul de mai sus privind valorile proprii ale familiilor cu doi parametri de forme pătratice explică comportarea stranie a valorilor proprii la variația unui singur parametru : în general vorbind (excluzînd cazuri cu totul excepționale), atunci cînd variază un singur parametru, valorile proprii se pot apropia una de alta, dar se pot depăși una pe cealaltă, ci trebuie, ca după ce se apropie să se îndepărteze din nou în direcții diferite.

B. Aplicații la studierea oscilațiilor mediilor continue. Considerațiile generale expuse mai sus au numeroase aplicații în studierea dependenței de parametri a frecvențelor proprii ale unei diversități de sisteme mecanice cu un număr finit de grade de libertate; este însă probabil că cele mai importante aplicații se referă la sistemele cu un număr infinit de grade de libertate, care descriu oscilațiile mediilor continue. Aceste aplicații se bazează pe observația că *varietatea elipsoizilor cu niște multiplicități date ale axelor are codimensiunea definită numai de aceste multiplicități și independentă de numărul de dimensiuni ale spațiului.*

Spre exemplu, codimensiunea mulțimii elipsoizilor de rotație în varietatea elipsoizilor este egală cu doi, în spații de orice dimensiune; prin urmare, este natural să considerăm că și în „varietatea" infinit dimensională a elipsoizilor dintr-un spațiu Hilbert mulțimea elipsoizilor de rotație este de codimensiune doi (și, în particular, că spațiul elipsoizilor fără axe multiple este conex).

Evident, raționamentele de acest tip necesită o fundamentare riguroasă. Nu ne vom ocupa însă de aceasta, ci vom încerca să vedem la ce concluzii conduce dezvoltarea considerațiilor generale de mai sus, dacă nu ne temem să le aplicăm la problema oscilațiilor unui mediu continuu.

Energia cinetică a unui mediu continuu care ocupă un domeniu compact D se exprimă prin abaterea u a punctului x de la echilibru prin formula

$$T = \frac{1}{2}\int_D u_t^2 \,\mathrm{d}x.$$

Pentru concretizare, vom considera că mediul este o membrană (în acest caz domeniul D este de dimensiune 2, iar abaterea u este de dimensiune 1). Energia cinetică definește o structură euclidiană în spațiul de configurații al problemei (deci în spațiul funcțiilor u). Energia potențială este dată de integrala lui Dirichlet

$$U = \frac{1}{2}\int_D (\nabla u)^2 \,\mathrm{d}x.$$

(din punct de vedere matematic, aceste date intră în definiția membranei).

Pătratele frecvențelor proprii ale membranei sînt valorile proprii ale formei pătratice U în spațiul de configurații a cărei metrică este definită cu ajutorul energiei cinetice. În *ipoteză* considerăm că unei membrane tipice îi corespunde o formă pătratică tipică (această ipoteză este echivalentă cu transversalitatea varietății formelor pătratice corespunzătoare diferitelor membrane la varietatea formelor cu valori proprii multiple). Dacă ne încredem în această proprietate de poziție generală (genericitate), ajungem la următoarele concluzii.

1. Pentru o membrană generică toate valorile proprii sînt diferite. De la o membrană generică la alta se poate trece pe un drum continuu, format în întregime din membrane cu spectru simplu. În plus, un drum tipic care unește două membrane arbitrare nu conține nici o membrană cu spectru multiplu (exceptînd eventual capetele drumului).

2. Făcînd să varieze doi parametri ai unei membrane putem face să coincidă două frecvențe proprii; pentru a obține o frecvență de multiplicitate trei, trebuie să avem la dispoziție cinci parametri pentru una de multiplicitate patru — nouă parametri ș.a.m.d.

3. Dacă se pleacă de la o membrană cu spectrul simplu și deformînd-o continuu se ajunge la o altă membrană cu spectrul simplu, urmînd un drum generic arbitrar, atunci, ca rezultat al unei astfel de prelungiri, din frecvența proprie de pe poziția k în ordonarea dată de mărime se obține exact frecvența proprie de pe poziția k (în aceeași ordonare) a membranei finale, indiferent de drumul de deformare; în general, prelungirea funcțiilor proprii depinde de drum (și anume la schimbarea drumului se poate schimba semnul funcției proprii care se obține).

În particular, dacă, începînd cu o membrană cu spectrul simplu și deformînd-o, descriem un drum închis în spațiul membranelor și ne întoarcem la membrana inițială, ocolind mulțimea membranelor cu spectru multiplu (care are codimensiunea doi), atunci frecvența proprie de pe poziția k se întoarce la valoarea inițială, iar funcția proprie corespunzătoare își poate schimba numai semnul.

C. Influența simetriei asupra multiplicității spectrului. Spectrul multiplu reprezintă un caz excepțional pentru sistemele generice, dar apare de neînlăturat prin deformări mici în cazul sistemelor cu simetrie și al deformărilor care păstrează simetria.

Spre exemplu, să considerăm un sistem format din trei mase egale situate în vîrfurile unui triunghi echilateral, unite între ele prin arcuri identice, unite tot cu arcuri identice cu centrul triunghiului și libere să se miște în planul triunghiului. Acest sistem are o simetrie de rotație de ordin trei. Prin urmare, în spațiul configurațiilor (a cărui dimensiune este 6) acționează operatorul liniar g care satisface relația $g^3 = 1$ și conservă atît structura euclidiană a acestui spațiu (definită de energia cinetică) cît și elipsoidul definit de energia potențială în același spațiu.

Din cele de mai sus rezultă că acest elipsoid este un *elipsoid de rotație*. Într-adevăr, dacă g este operatorul de simetrie în spațiul configurațiilor indicat mai sus și ξ este un vector de pe una din axele principale ale elipsoidului, atunci axa de direcție $g(\xi)$ este și ea principală (g transformă elipsoidul în el însuși).

Pentru vectorul $g(\xi)$ există două posibilități: fie că $g(\xi) = \xi$, vectorii ξ și $g(\xi)$ sînt liniar independenți și formează în spațiul configurațiilor un unghi de 120°. Prin urmare, multiplicitatea valorii proprii corespunzătoare unei astfel de axe ξ este cel puțin doi.

Raționamentul nostru arată că oscilațiile proprii ale unui sistem cu simetrie de rotație de ordinul trei pot fi de două tipuri: cele invariante la o rotație cu 120° ($g(\xi) = \xi$) și cele care se transformă printr-o astfel de rotație într-o oscilație proprie independentă cu aceeași frecvență ($g(\xi)$ și ξ sînt independenți). În al doilea caz

apar chiar trei forme de oscilaţii proprii cu aceeaşi frecvenţă $(\xi, g(\xi)$ şi $g^2(\xi))$, dar numai două din acestea sînt independente:

$$\xi + g(\xi) + g^2(\xi) = 0,$$

deoarece suma a trei vectori de lungime egală care formează între ei unghiuri de 120° în plan este egală cu zero.

Numărul total de oscilaţii proprii ale sistemului nostru este şase. Pentru a determina cîte dintre acestea sînt din primul tip (cel simetric) şi cîte din cel din al doilea (nesimetric) se poate utiliza următorul raţionament. Să considerăm cazul limită în care fiecare masă poate oscila independent de celelalte.

În acest caz putem alege în spaţiul configuraţiilor o bază ortonormată din şase oscilaţii proprii, cîte două pentru fiecare punct, pentru care unul din puncte se mişcă şi celelalte nu. Să notăm cu ξ_i şi η_i vectorii proprii cu valorile proprii a şi b corespunzători punctului i şi fie x_i, y_i coordonatele în baza ortonormată ξ_i, η_i. Atunci energia potenţială se scrie sub forma

$$U = \frac{1}{2}(a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2) + \frac{1}{2}(a^2 x_2^2 + b^2 y_2^2) + \frac{1}{2}(a^2 x_3^2 + b^2 y_3^2).$$

Operatorul de simetrie g permută axele de coordonate

$$g(\xi_1) = \xi_2,\ g(\xi_2) = \xi_3,\ g(\xi_3) = \xi_1,$$

$$g(\eta_1) = \eta_2,\ g(\eta_2) = \eta_3,\ g(\eta_3) = \eta_1.$$

Putem deci reprezenta spaţiul nostru de dimensiune şase ca o sumă ortogonală a două drepte şi a două plane bidimensionale, invariante în raport cu operatorul de simetrie g. Şi anume, dreptele invariante sînt definite de vectorii directori

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

iar planele invariante sînt complemenţi ortogonali ai acestor vectori în spaţiile generate de vectori ξ_1, ξ_2, ξ_3 şi respectiv η_1, η_2, η_3.

În această descompunere ortogonală, prima (a doua) dreaptă reprezintă direcţia oscilaţiei proprii simetrice cu frecvenţa a (respectiv b), care prin rotaţia cu 120° se transformă într-o oscilaţie proprie independentă cu aceeaşi frecvenţă.

Prin urmare, în cazul degenerat considerat a trei puncte materiale independente, *există două oscilaţii proprii independente de tip simetric şi patru de tip nesimetric, cele de ultimul tip fiind împărţite în două perechi. În fiecare pereche oscilaţiile au aceeaşi frecvenţă proprie şi se obţin una din alta printr-o rotaţie cu* 120° *în planul în care se găsesc punctele.*

Afirmăm că această concluzie rămîne valabilă pentru orice lege de interacţiune între punctele materiale, cu condiţia ca interacţiunea să fie simetrică — energia potenţială trebuie să se conserve la o rotaţie cu 120° în plan.

Într-adevăr, să alegem un sistem arbitrar format din şase oscilaţii proprii $\zeta_1, \ldots, \zeta_6$ ortogonale două cîte două. Sub acţiunea operatorului g fiecare din vectorii ζ_i din spaţiul configuraţiilor este sau lăsat pe loc, sau rotit cu 120°. Dar vectorii invarianţi la transformarea g formează un plan bidimensional, iar toţi cei care se rotesc cu 120° — un subspaţiu cvadridimensional. Prin urmare, din cei şase vectori, exact doi corespund unor oscilaţii simetrice, iar ceilalţi patru sînt conţinuţi în complementul ortogonal cvadridimensional la aceşti doi vectori, format din vectori care se rotesc cu 120°. Să alegem unul din vectorii acestui subspaţiu, să-i aplicăm operatorul g şi să declarăm că vectorul astfel obţinut reprezintă direcţia oscilaţiei proprii pereche cu cea iniţială. Apoi, în complementul ortogonal la subspaţiul bidimensional astfel obţinut în subspaţiul cvadridimensional, să alegem un vector arbitrar şi să-i luăm ca pereche imaginea sa prin operatorul g. Obţinem în final un sistem de şase oscilaţii proprii care au proprietăţile necesare.

Prin urmare, *într-un sistem generic de trei puncte în plan, care are simetrie de rotaţie de ordinul trei, apar patru frecvenţe proprii diferite, dintre care două simple şi două duble. Fiecăreia din frecvenţele proprii simple îi corespunde o oscilaţie proprie simetrică, iar fiecăreia din cele duble — trei oscilaţii proprii care se obţin una din alta printr-o rotaţie cu* 120° *şi a căror sumă este nulă* (*deoarece numai două din ele sînt independente*).

Problemă. Să se clasifice oscilaţiile proprii ale unui sistem cu simetria unui triunghi echilateral (care admite nu numai rotaţii cu 120°, ci şi reflexiile în raport cu înălţimile triunghiului).

Problemă. Să se clasifice oscilaţiile proprii ale unui sistem al cărui grup de simetrie este grupul celor 24 de rotaţii ale cubului.

Răspuns. Oscilaţiile sînt de cinci tipuri. Prin rotaţii, din fiecare oscilaţie se poate obţine un sistem de 8, sau 6, sau 4, sau 2, sau 1 oscilaţii independente (în ultimul caz oscilaţiile sînt complet simetrice).

Observație. Pentru clasificarea oscilațiilor proprii ale sistemelor cu grupuri arbitrare de simetrie a fost elaborat un aparat special (așa-numita teorie a reprezentării grupurilor). Vezi, de exemplu, G. Ia. Liubarski, *Teoria grupurilor și aplicațiile ei în fizică*, Fizmatghiz, Moscova, 1958, unde se găsesc tabelele necesare.

D. Comportarea frecvențelor unui sistem simetric la variațiile de parametri care conservă simetria. Să presupunem că sistemul nostru simetric depinde generic de un număr oarecare de parametri și că simetria nu se distruge la variația parametrilor. Atunci frecvențele proprii de multiplicități diferite vor depinde de parametri și apare problema ciocnirii acestor frecvențe proprii. Ne vom mărgini aici la formularea rezultatelor pentru cazul cel mai simplu al sistemelor cu simetrie de rotație de ordinul trei (pentru simetrie de rotație de ordin $n > 3$, răspunsul este același). Amănunte pot fi găsite în lucrările lui V. I. Arnold, *Moduri și cvasimoduri*, Funcționalnîi analiz i evo prilojenia, 6, 2, (1972), 12—20; V. N. Karpușin, *Asupra asimptoticii valorilor proprii ale varietăților simetrice și reprezentărilor «celor mai probabile» ale grupurilor finite*, Vestnik M.G.U., Ser. mat. 2, (1974) 9—13.

Oscilațiile proprii ale oricărui sistem cu simetrie de rotație de ordinul trei se împart în două tipuri: oscilații simetrice și oscilații care se transformă în oscilații independente de cea inițială prin rotație cu 120°. Pentru sistemele generice cu simetrie de rotație de ordinul trei (care nu au, în particular, nici o simetrie suplimentară) toate frecvențele proprii de primul tip sînt simple, iar cele de tipul al doilea — duble.

Mai departe, se dovedește că dacă sistemul depinde generic de un parametru și rămîne simetric pentru toate valorile parametrului, atunci *la variația parametrului frecvențele proprii ale oscilațiilor simetrice nu se pot ciocni una cu alta, în timp ce frecvențele proprii duble ale oscilațiilor nesimetrice nu se pot descompune. În plus, frecvențele proprii duble ale oscilațiilor simetrice și nesimetrice se mișcă independent la variația parametrului și deci pentru valori izolate ale parametrului se pot ciocni (și trece una prin alta) o frecvență proprie a unei oscilații simetrice cu o frecvență proprie a unei oscilații nesimetrice.*

Pentru ciocnirea a două frecvențe proprii de oscilații simetrice trebuie să varieze cel puțin doi parametri, iar pentru ciocnirea a două frecvențe proprii de oscilații nesimetrice — cel puțin trei.

În general, pentru ca într-o familie tipică de sisteme cu simetrie de rotație de ordinul trei să apară sisteme care corespund unei ciocniri de i frecvențe proprii simple (i oscilații simetrice) cu j frecvențe proprii duble (j oscilații nesimetrice), numărul de parametri ai familiei nu trebuie să fie mai mic de

$$(i-1)(i+2)/2+j^2.$$

Să aplicăm cele de mai sus la studiul oscilațiilor membranelor. Vom considera aici că unei membrane de formă generică, care admite ca simetrie o rotație de 120°, îi corespunde un elipsoid de formă generică în spațiul elipsoizilor spațiului de configurații, elipsoid care este invariant la operatorul indus în spațiul configurațiilor de rotația membranei.

Formularea exactă a acestei afirmații constă în a presupune transversalitatea aplicației spațiului membranelor simetrice în spațiul elipsoizilor simetrici la subvarietatea elipsoizilor cu numere diverse de axe egale, pentru toate membranele, exceptînd o mulțime de codimensiune infinită.

Dacă sîntem de acord cu această ipoteză, sîntem conduși la următoarele concluzii privind oscilațiile membranelor simetrice.

1. *Pentru membranele generice simetrice în raport cu rotația cu 120°, asimptotic, o treime din frecvențele proprii (numărate cu multiplicitățile lor) sînt simple și oscilațiile proprii corespunzătoare sînt invariante la rotația cu 120°. Celelalte frecvențe proprii sînt duble; fiecărei frecvențe proprii duble îi corespund trei funcții proprii a căror sumă este nulă și care se transformă una în alta prin rotația cu 120°.*

2. *În familiile generice cu un parametru de astfel de membrane simetrice apar, pentru valori izolate ale parametrului, ciocniri ale unei frecvențe simple cu una dublă, dar nu se întîlnesc nici ciocniri de frecvențe simple între ele, nici ciocniri de frecvențe duble între ele.*

3. *Numărul minim de parametri ai unei familii de membrane în care se realizează (într-un mod care nu se distruge prin deformări mici care conservă simetria) ciocniri mai complicate de frecvențe proprii, este dat de formula*

$$\sum_{i,j}([(i-1)(j+2)/2]+j^2)\,\nu_{i,j},$$

unde $\nu_{i,j}$ este numărul de puncte în care se ciocnesc i frecvențe simple și j frecvențe duble.

În particular, pentru o deformare mică tipică (generică) a unei membrane circulare, care conservă simetria de rotație de ordinul trei, o treime din frecvențele proprii duble se decuplează imediat (cele care corespund funcțiilor proprii cu partea azimutală cos $3k\varphi$

și sin $3k\varphi$). Continuînd cu deformarea cu un parametru, frecvențele proprii simple și duble pot trece una prin alta, dar nu se pot ciocni două frecvențe proprii simple sau două frecvențe proprii duble.

E. Discuție. Importanța considerațiilor de genericitate și simetrie constă, în particular, în posibilitatea pe care o dau de a obține anumite informații în cazurile în care nu se poate găsi o rezolvare exactă a problemei.

În particular, pentru aproape nici un fel de membrane nu se cunosc formele funcțiilor proprii. Cu toate acestea, din considerații generale se poate spune cîte ceva, de exemplu, despre multiplicitatea valorilor proprii.

Studierea oscilațiilor de înaltă frecvență ale mediilor continue are o importanță destul de mare pentru o serie de domenii (optica, acustica ș.a.m.d.) și de aceea pentru determinarea aproximativă a formelor oscilațiilor proprii au fost elaborate metode speciale. Una din aceste metode (așa-numita metodă *asimptotică cvasiclasică*) constă în a căuta oscilația sub o formă care este local vecină cu o undă armonică simplă de lungime de undă mică, dar pentru care, însă, amplitudinea și direcția frontului de undă variază puțin din punct în punct.

Analiza (asupra căreia nu ne putem opri aici) arată că în anumite cazuri putem construi soluții aproximative pentru ecuațiile funcțiilor proprii, cu proprietățile indicate. Soluțiile acestea sînt aproximative în sensul că sînt foarte aproape de a satisface ecuația de funcții proprii (și nu prin faptul că sînt apropiate de funcțiile proprii adevărate).

În particular, dacă o membrană are forma unui triunghi echilateral cu unghiurile netezite și puternic rotunjite, atunci se reușește să se construiască o soluție aproximativă de tipul indicat, care este sensibil diferită de zero numai în vecinătatea unei înălțimi a triunghiului. (Fizicienii numesc această soluție aproximativă analogul ondulatoriu al razei care se mișcă după înălțimea triunghiului; această rază este o traiectorie stabilă*) a biliardului care are forma membranei noastre (vezi anexa privind formulele asimptotice pentru lungimi de undă mici).

*) Condiția de stabilitate liniară a unei traiectorii de biliard are expresia

$$(r_1 + r_2 - l)(r_1 - l)(r_2 - l) > 0,$$

unde l este lungimea segmentului de traiectorie, iar r_1 și r_2 sînt razele de curbură ale peretelui în extremitățile sale.

Din considerații de simetrie și genericitate rezultă că membranele tipice cu simetrie de rotație de ordinul trei nu au oscilații proprii adevărate de tipul descris. Într-adevăr, să presupunem că una dintre oscilațiile proprii ale membranei este localizată în vecinătatea uneia din înălțimile triunghiului (dar nu în vecinătatea centrului membranei). Atunci, rotind-o cu 120° și 240°, obținem trei oscilații proprii cu aceeași frecvență proprie. Aceste trei oscilații sînt independente (aceasta rezultă din faptul că suma lor este nenulă). Prin urmare, frecvența proprie corespunzătoare este de multiplicitate trei, ceea ce nu se poate întîmpla în sistemele tipice cu simetrie de rotație de ordinul trei.

Din raționamentul expus rezultă că încercarea de a construi o formulă asimptotică riguroasă pentru funcțiile proprii este în mare măsură fără speranță: în cel mai bun caz, ne putem aștepta să obținem formule aproximative pentru oscilații aproape proprii. O astfel de oscilație aproape proprie se poate deosebi destul de puternic de oscilațiile proprii adevărate; dacă însă se consideră condiția inițială care îi corespunde, atunci mișcarea va aminti, pe un interval de timp mare, de o undă staționară (oscilație proprie).

Un exemplu de oscilație aproape proprie este mișcarea unuia din cele două pendule identice unite printr-un arc foarte slab. Dacă în momentul inițial punem în mișcare primul pendul, iar al doilea este nemișcat, atunci pe un interval de timp suficient de mare, va oscila practic numai primul pendul și oscilațiile vor fi aproape proprii. În cazul oscilațiilor proprii adevărate, amplitudinile ambelor pendule coincid.

Problema legăturii dintre geometria unei membrane și proprietățile oscilațiilor sale proprii a fost studiată intens în ultimii ani de mulți autori (printre care H. Weyl, S. Minakshisundaran și A. Plejel, A. Selberg, J. Milnor, M. Kac, I. Singer, H. McKean, M. Berger, I. Collin du Verdier, J. Chazarain, J. Duistermaat, V. F. Lazutkin, A. I. Snirelman, S. A. Molceanov).

La cea mai simplă întrebare „se poate auzi forma unei tobe" răspunsul s-a dovedit a fi negativ: există varietăți riemanniene care nu sînt izometrice, dar au același spectru (este vorba de spectrul operatorului Laplace-Beltrami). Pe de altă parte, anumite proprietăți ale varietății se regăsesc din spectrul valorilor proprii ale operatorului Laplace și proprietățile funcțiilor proprii (de exemplu, se regăsește familia completă a lungimilor geodezicelor închise).

ANEXA 11

ASIMPTOTICI PENTRU LUNGIMI DE UNDĂ MICI

Descrierea propagării luminii în optica geometrică cu ajutorul razelor (deci a ecuaţiilor canonice ale lui Hamilton) sau a fronturilor de undă (deci a ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi) reprezintă, din punctul de vedere al opticii fizice, numai o aproximaţie. Conform reprezentărilor opticii fizice lumina este formată din unde electromagnetice şi optica geometrică este numai o primă aproximare, care descrie bine fenomenele numai atunci cînd lungimea de undă este mică în raport cu dimensiunile corpurilor considerate.

Varianta matematică a acestor reprezentări cu caracter fizic este dată de formulele asimptotice pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale corespunzătoare, formule care dau o aproximare cu atît mai bună cu cît frecvenţa oscilaţiilor este mai mare (deci cu cît lungimea de undă este mai mică). Aceste formule asimptotice se exprimă în termeni de raze (deci de mişcările unui anumit sistem dinamic hamiltonian) sau fronturi de undă (deci soluţii ale ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi).

Formule asimptotice pentru lungimi de undă mici asemănătoare celor din optică există pentru multe ecuaţii ale fizicii matematice care descriu felurite procese ondulatorii. În diferitele domenii ale fizicii şi matematicii, ele sînt legate de diferite nume. De exemplu, în mecanica cuantică formula asimptotică pentru lungimi de undă mici se numeşte aproximaţia cvasiclasică, iar determinarea ei este cunoscută sub numele de metode WKBJ (Wentzel, Kramers, Brillouin, Jeffreys) deşi, de aproximaţia cvasiclasică s-au ocupat cu destul de mult timp înaintea acestora, de exemplu, Liouville, Green, Stokes şi Rayleigh.

Construcţia unei asimptotici pentru lungimi de undă mici se bazează pe reprezentarea conform căreia local, în vecinătatea fiecărui punct, se observă o serie de unde aproape sinusoidale,

dar amplitudinea acestora unde şi direcţia de deplasare a fronturilor lor variază de la punct la punct. Introducerea formală a unei funcţii de acest tip în ecuaţia cu derivate parţiale care descrie procesul ondulatoriu conduce (în primă aproximaţie, pentru lungimi de undă mici) la ecuaţia lui Hamilton-Jacobi pentru fronturile de undă. Următoarele aproximaţii permit şi determinarea modului în care variază cu punctul amplitudinea oscilaţiilor.

Evident, întreaga procedură se cere fundamentată matematic. Atît o astfel de formulare, cît şi demonstrarea teoremelor corespunzătoare nu sînt deloc simple. Dificultăţile mari sînt introduse în special de aşa-numitele caustici (cu altă terminologie—punctele focale sau conjugate sau punctele de întoarcere).

Causticile sînt înfăşurători de familii de raze; ele pot fi văzute pe un perete iluminat de razele reflectate de o suprafaţă netedă cu curbură oarecare. Dacă razele care apar în descrierea undelor se intersectează şi formează caustici, atunci în vecinătatea causticilor formulele asimptotice pentru lungimi de undă mici trebuie puţin modificate. Anume, faza oscilaţiilor de-a lungul fiecărei raze suferă un salt standard (cu un sfert de undă) la fiecare trecere a razei prin caustică.

Este comod ca descrierea exactă a tuturor acestor fenomene să fie făcută în termenii geometriei subvarietăţilor lagrangeene ale spaţiului de faze corespunzător şi ai proiecţiilor acestora pe spaţiul configuraţiilor.

În acest limbaj, causticile se interpretează ca singularităţile proiecţiei din spaţiul fazelor în spaţiul configuraţiilor a varietăţii lagrangeene care determină familia de raze. Prin urmare, formele normale ale singularităţilor proiecţiilor lagrangeene, enumerate în anexa 12, reprezintă, în particular, clasificarea singularităţilor causticilor, formate de sistemele de raze „în poziţie generală" (generice).

În anexa de faţă se expun (fără demonstraţii) cele mai simple formule asimptotice pentru lungimi de undă mici pentru ecuaţia lui Schrödinger din mecanica cuantică. O tratare mai amănunţită se poate găsi în următoarele lucrări:

J. H e a d i n g, *An introduction to phase-integral methods,* Menthuen's Monographs on Physical Subjects, London and New York, 1962

V. P. M a s l o v, *Teoria perturbaţiilor şi metode asimptotice,* M.G.U., 1965

V. I. A r n o l d, *Asupra unei clase caracteristice care apare în condiţia de cuantificare,* Funcţionalnii analiz i evo prilojenia, 1, *1* (1967), 1—14.

L. H ö r m a n d e r, *Fourier integral operators.* Acta Mathematica, 127, 1—2 (1971), 119.

A. Aproximația evasiclasică pentru soluțiile ecuației lui Schrödinger. Se numește *ecuația lui Schrödinger* pentru o particulă în cîmpul cu potențialul U în spațiul euclidian următoarea ecuație în raport cu funcția complexă $\psi(q, t)$:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + U(q) \psi, \quad q \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Aici h este o anumită constantă reală care joacă rolul de parametru mic al problemei, iar Δ — operatorul lui Laplace.

Să presupunem că condiția inițială are forma caracteristică lungimilor de undă mici

$$\psi\Big|_{t=0} = \varphi(q)\, e^{\frac{i}{h} s(q)},$$

unde funcția netedă φ este diferită de zero numai în interiorul unui domeniu mărginit. Vom indica mai jos formula asimptotică (pentru $h \to 0$) pentru soluția ecuației lui Schrödinger cu această condiție inițială.

Pentru început, să considerăm mișcarea unei particule clasice (punct material) în cîmpul potențial U, deci să considerăm ecuațiile lui Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \text{unde } H = \frac{1}{2} p^2 + U(q),$$

în spațiul de faze de dimensiune $2n$. Soluțiile acestor ecuații definesc un curent (atunci cînd potențialul satisface cîteva condiții, ceea ce vom presupune prin ipoteză ; aceste condiții împiedică îndepărtarea la infinit în timp finit).

Condiției noastre inițiale „de tip lungime mică de undă" îi asociem o subvarietate lagrangeeană în spațiul de faze (deci o varietate de dimensiune egală cu dimensiunea spațiului configurațiilor și pe care este identic nulă restricția 2-formei diferențiale $dp \wedge dq$ care definește structura simplectică în spațiul fazelor), și anume definim „impulsul" corespunzător condiției noastre inițiale ca

fiind gradientul fazei ; mai precis, punem

$$p(q) = \frac{\partial s}{\partial q}.$$

Lemă. *Pentru orice funcție netedă s, graficul funcției $p(q)$, construită cu ajutorul ei, în spațiul fazelor $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\}$ este varietate lagrangeană. Reciproc, dacă o varietate lagrangeană se proiectează injectiv pe spațiul $\mathbf{R}^n = \{q\}$ (este un grafic), atunci ea este dată de o funcție generatoare s prin formula precedentă.*

Să notăm cu M varietatea lagrangeană construită cu ajutorul condiției inițiale (funcția s). Evoluția la timpul t, g^t, a curentului hamiltonian transformă varietatea M într-o altă varietate g^tM. Această nouă varietate este și ea lagrangeană, deoarece curentul hamiltonian conservă structura simplectică.

Pentru valori mici ale lui t, atît varietatea lagrangeană inițială M cît și varietatea g^tM se proiectează injectiv pe spațiul configurațiilor. Pentru t mare însă, acest lucru nu se mai întîmplă (fig. 244).

Cu alte cuvinte, într-un punct Q al spațiului configurațiilor se pot proiecta mai multe puncte ale varietății lagrangeene g^tM. Vom presupune că numărul acestor puncte este finit și că fiecare din ele este nedegenerat (adică diferențiala aplicației de proiecție a varietății lagrangeene g^tM în spațiul configurațiilor este nedegenerată în fiecare punct care se proiectează peste Q).

Fig. 244. Curentul transformă varietățile lagrangeene.

Condiția de nedegenerare este satisfăcută de aproape toate punctele Q. Mai precis, acele puncte singulare Q pentru care ea nu este îndeplinită formează o mulțime de măsură nulă în spațiul fazelor. În cazul general această mulțime este o hipersuprafață de dimensiune cu unu mai mică decît dimensiunea spațiului configurațiilor. Această hipersuprafață, care joacă rolul de caustică în problema noastră, poate avea chiar ea singularități destul de complicate.

Punctele varietății lagrangeene $g^t M$ care se proiectează peste un punct Q provin din varietatea lagrangeană inițială M (construită din condiția inițială) prin intermediul curentului hamiltonian $\{g^t\}$. Cu alte cuvinte, în punctul Q, după timpul t, ajung mai multe traiectorii ale particulei clasice, date de condiții inițiale conținute în varietatea lagrangeană inițială.

Să notăm cu (p_j, q_j) aceste puncte inițiale din spațiul fazelor și cu S_j acțiunea evaluată de-a lungul traiectoriei sistemului hamiltonian, cu condiția inițială (p_j, q_j). Mai exact, punem

$$S_j(Q, t) = s(q_j) + \int_0^t L \, d\,\theta, \text{ unde}$$

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - U(q) \text{ și } g^\theta(p_j, q_j) = (p(\theta), q(\theta)).$$

Atunci, cînd $h \to 0$, soluția ecuației lui Schrödinger cu condițiile inițiale oscilante date de funcțiile s și φ are asimptotica

$$\psi(Q, t) = \sum \varphi(q_j) \left| \frac{DQ}{Dq_j} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{h} S_j(Q,t) - \frac{i\pi}{3} \mu_j} + O(h),$$

unde μ_j este un număr întreg (indicele lui Morse) a cărui definiție se dă mai jos.

Pentru a ne descurca în această formulă, să considerăm mai întîi cazul în care intervalul de timp t este mic. În această situație, suma se reduce la un singur termen, deoarece varietatea lagrangeană $g^t M$ care se obține din varietatea lagrangeană inițială M prin evoluția la timpul t, g^t, a curentului hamiltonian, se proiectează injectiv pe spațiul configurațiilor. Cu alte cuvinte, din familia de particule corespunzătoare condiției inițiale a ecuației lui Schrödinger numai una singură trece prin Q după un interval de timp scurt t.

Pentru valori mici ale lui t, indicele lui Morse este egal cu zero (vom vedea că acest lucru rezultă din definiția de mai jos). Prin urmare, funcția $\psi(Q, t)$ este, la fel ca și condiția inițială, o funcție rapid oscilantă.

În această formulare funcția S, care definește fronturile de undă la momentul t nu este altceva decît valoarea la momentul t a soluției ecuației lui Hamilton-Jacobi avînd ca condiție inițială funcția s care definește fronturile de undă la momentul inițial. Amplitudinea undelor în momentul t și în punctul Q se obține din amplitudinile în momentul inițial în punctele ale căror traiectorii ajung în Q, prin înmulțire cu un anumit factor. Acest factor este ales în așa fel încît, prin mișcarea particulelor corespunzătoare condiției inițiale, integrala pătratului modulului funcției ψ pe domeniul spațiului configurațiilor umplut de particule să nu varieze cu timpul. (Aici se presupune că, în momentul inițial, se alege un domeniu arbitrar al spațiului configurațiilor, apoi se consideră acele puncte de pe varietatea lagrangeană inițială M care se proiectează pe spațiul configurațiilor în acest domeniu, apoi imaginile acestor puncte prin evoluția la timpul t a curentului hamiltonian și, în sfîrșit, proiecția acestor imagini pe spațiul configurațiilor, ceea ce se obține fiind domeniul „umplut de particule la momentul t”).

B. Indicii lui Morse și Maslov. Numărul μ_j se definește ca fiind numărul punctelor focale la varietatea lagrangeană M situate pe segmentul $[0, t]$ al orbitei cu punctul inițial (p_j, q_j).

Definiția unui punct focal la M este următoarea. Am ales punctul Q astfel încît proiecția varietății lagrangeene $g^t M$, care se obține din M la momentul t, să fie nedegenerată în toate punctele care se proiectează peste Q. Dacă considerăm însă toată orbita cu condiția inițială (p_j, q_j), există momente de timp θ între 0 și t pentru care condiția de nedegenerare nu este satisfăcută în punctul $(p(\theta), q(\theta))$ al varietății lagrangeene $g^\theta M$. Aceste puncte se numesc *puncte focale la varietatea M* de-a lungul orbitei considerate.

Să observăm că definiția punctelor focale la M și a indicelui lui Morse nu depinde de ecuația lui Schrödinger, ci reflectă pur și simplu proprietăți ale geometriei curentului hamiltonian în fibrarea cotangentă la spațiul configurațiilor (sau, ceea ce este același lucru, proprietăți legate de calculul variațional). În particular, ca varietate lagrangeană inițială M se poate lua fibra fibrării cotangente, care trece prin punctul (p_0, q_0) (definită de condiția $q = q_0$).

În acest caz un punct focal la M situat pe orbita care începe în (p_0, q_0) se numește *conjugat* cu punctul inițial (mai exact, proiecția unui astfel de punct pe spațiul configurațiilor se numește *punct conjugat* cu punctul q_0 de-a lungul extremalei care iese din q_0 cu impulsul p_0 în spațiul configurațiilor). În cazul unei varietăți riemanniene proiecția unui punct focal la o fibră a fibrării cotangente se numește *punct conjugat* cu punctul inițial al geodezicei de-a lungul acestei geodezice. De exemplu, Polul Sud al sferei este punct conjugat polului Nord de-a lungul oricărui meridian.

Indicele lui Morse al unui arc de geodezică — egal cu numărul punctelor conjugate punctului inițial — joacă un rol important în calculul variațional : și anume să considerăm a doua diferențială a acțiunii ca o formă pătratică pe spațiul variațiilor unei geodezice date (cu capete fixate). Atunci indicele de inerție negativ al acestei forme pătratice este egal cu indicele Morse (vezi, de exemplu, J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. Math. Studies, Princeton, 1961).

Prin urmare, pînă la primul punct conjugat geodezica realizează minimul acțiunii, ceea ce justifică denumirea de „principiul minimei acțiuni" dată diverselor principii variaționale ale mecanicii.

Să observăm aici că pentru a calcula indicele lui Morse, fiecare punct focal trebuie numărat cu multiplicitatea sa (multiplicitatea unui punct focal generic este egală cu 1).

Indicele lui Morse este un caz particular al așa-numitului *indice al lui Maslov* care este definit, independent de orice curent, pentru orice curbă pe o varietate lagrangeană a fibrării cotangente la spațiul configurațiilor.

Să considerăm proiecția varietății noastre lagrangeene n- dimensionale pe spațiul configurațiilor, și el n-dimensional. Aceasta este o aplicație diferențiabilă de varietăți de dimensiuni egale. Ea poate avea puncte critice — puncte în care rangul diferențialei nu este maxim și în vecinătatea cărora proiecția nu este difeomorfism.

Se dovedește că, *generic, mulțimea punctelor singulare este de dimensiune $n-1$ și este formată din reuniunea unei varietăți netede de dimensiune $n-1$ constituită din cele mai simple puncte critice — cele în care rangul scade cu 1 — și un număr finit de varietăți de dimensiune* $\leqslant n-3$.

Aici „generic" înseamnă că proprietățile indicate pot fi obținute printr-o deformare oricît de mică a varietății lagrangeene în timpul căreia ea rămîne lagrangeană.

Este esențial să evidențiem faptul că printre părțile de diferite dimensiuni în care se descompune mulțimea punctelor critice nu există o parte de dimensiune $n-2$. După punctele critice cele mai simple, care formează o varietate de dimensiune $n-1$, urmează punctele în care rangul scade cu două unități și acestea formează o varietate de dimensiune $n-3$. Proiecția mulțimii punctelor critice pe spațiul configurațiilor (caustica) este alcătuită, în general, din părți de toate dimensiunile de la 0 la $n-1$, fără salturi.

În continuare, se constată că *subvarietatea $(n-1)$—dimensională a punctelor critice celor mai simple are două fețe în varietatea lagrangeană* (*este orientabilă*). Putem, prin procedura expusă mai jos, să alegem o orientare a normalei în fiecare punct astfel încît aceste orientări să fie compatibile.

Să considerăm un punct critic simplu (rangul mai mic cu 1) arbitrar pe varietatea lagrangeană.

Fie $q_1, \ldots, q_n$ un sistem de coordonate în vecinătatea proiecției acestui punct în spațiul configurațiilor. Fie $p_1, \ldots, p_n$ coordonatele corespunzătoare în fibrele fibrării cotangente. În vecinătatea punctului critic ales, varietatea lagrangeană poate fi considerată ca graficul funcției vectoriale $(q_1, p_2, \ldots, p_n)$ de variabilele $(p_1, q_2, \ldots \ldots, q_n)$ (sau al unei funcții vectoriale de formă similară, în care rolul coordonatei evidențiate nu este jucat de q_1, ci de o altă coordonată, q_j).

În vecinătatea punctului critic dat, celelalte puncte critice sînt date de condiția $\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = 0$. Pentru o varietate lagrangeană generică, această derivată își schimbă semnul la trecerea de pe o parte a varietății punctelor critice (de rang $n-1$) pe cealaltă, în vecinătatea punctului critic (de rang $n-1$) ales. Alegem ca *parte pozitivă* aceea în care această derivată este pozitivă.

Să observăm că trebuie demonstrată compatibilitatea direcțiilor pozitive definite în vecinătatea punctelor diferite. În plus, trebuie demonstrat că direcția pozitivă în vecinătatea unui punct critic este coret definită, adică nu depinde de alegerea sistemului de coordonate. Toate acestea se pot realiza prin calcule directe (vezi articolul lui V. I. Arnold din Funcționalnîi analiz i evo prilojenia citat mai sus).

Indicele lui Maslov al unei curbe pe o varietate lagrangeană se definește acum ca fiind numărul de treceri din partea negativă a varietății singularităților în partea pozitivă minus numărul trecerilor în sens invers. Se presupune în plus că capetele curbei nu sînt puncte critice și curba intersectează numai varietatea punctelor critice celor mai simple (unde rangul este $n-1$), și anume numai sub unghiuri nenule (transversal). Odată definit indicele pentru astfel de curbe, se poate extinde definiția și la curbe care unesc două puncte critice : pentru aceasta este suficient să se aproximeze curba dată printr-o curbă care intersectează numai varietatea punctelor critice simple și numai sub unghiuri nenule. Se poate arăta că indicele astfel obținut nu depinde de curba cu care se aproximează.

P r o b l e m ă . Să se determine indicele cercului $p = \cos t$, $q = \sin t$ orientat de parametrul t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ pe sub varietatea lagrangeană $p^2 + q^2 = 1$ a planului fazelor.

Răspuns. Indicele este $+2$.

În sfîrșit, indicele lui Morse al unei orbite în $\mathbf{R}^{2n}$ poate fi definit ca fiind indicele lui Maslov al unei curbe pe o varietate lagrangeană

de dimensiune $n+1$ conţinută într-un spaţiu de faze de dimensiune $2n+2$ adecvat. Coordonatele în acest spaţiu de faze sînt $(p_0, p; q_0, q)$ (unde $(p, q) \in \mathbf{R}^{2n}$). Dacă se pune $q_0 = t$, $p_0 = -H(p, q)$, iar punctul (p, q) parcurge o subvarietate lagrangeană de dimensiune n a lui $\mathbf{R}^{2n}$ obţinută din cea iniţială prin evoluţia la timpul t a curentului hamiltonian, punctele $(-H(p, q), p; t, q)$ descriu, cînd t variază, o varietate lagrangeană de dimensiune $n+1$ în $\mathbf{R}^{2n+2}$. Graficul mişcării punctului iniţial sub acţiunea curentului (pe orbita căreia vrem să-i calculăm indicele) poate fi considerat ca o curbă în această varietate lagrangeană de dimensiune $n+1$. Se poate verifica că indicele lui Maslov al acestui grafic coincide cu indicele lui Morse al orbitei analizate.

C. Indicii curbelor închise. Indicii curbelor închise situate pe o subvarietate lagrangeană a unui spaţiu de faze liniar pot fi calculaţi şi utilizînd structura complexă a unui astfel de spaţiu. Să introducem în spaţiul de faze liniar $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\}$, pe lîngă structura simplectică $dp \wedge dq$, o structură euclidiană (cu produsul scalar dat de $p^2 + q^2$) şi o structură complexă, definită de înmulţirea cu unitatea imaginară

$$I : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}, \quad I(p, q) = (-q, p); \quad z = p + iq, \quad \mathbf{C}^n = \{z\}.$$

Cele trei structuri sînt strîns legate prin relaţia

$$[x, y] = (Ix, y),$$

unde [,] este produsul scalar antisimetric, iar (,) — cel euclidian.

Transformările liniare care păstrează cel puţin două din aceste trei structuri (şi atunci pe toate trei) se numesc *unitare*. Ele transformă planele lagrangeene în plane lagrangeene.

Orice plan lagrangean se poate obţine dintr-un plan lagrangean dat arbitrar (de exemplu, din planul real $\mathbf{R}^n$ definit de ecuaţia $q=0$) printr-o transformare unitară. Orice două transformări unitare A şi B care transformă subspaţiul real $\mathbf{R}^n$ într-un acelaşi plan lagrangean, diferă printr-o transformare unitară care este o transformare reală ortogonală :

$$B = AC, \text{ unde } C(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n.$$

Reciproc, orice transformare reală ortogonală nu modifică imaginea planului real prin acţiunea unei transformări arbitrare.

Să observăm că determinantul unei transformări ortogonale este egal cu ± 1. Prin urmare, *pătratul determinantului* unei transformări unitare care transformă planul real într-un plan lagrangean dat depinde numai de planul lagrangean şi nu depinde deloc de alegerea transformării unitare.

După aceste observaţii preliminare, să ne întoarcem la varietatea noastră lagrangeană şi să considerăm pe ea o curbă închisă orientată. În fiecare punct al curbei există planul tangent la varietatea lagrangeană în spaţiul simplectic liniar. Pătratul determinantului transformării unitare care aplică planul real pe acest plan tangent este un număr complex de modul unu. La mişcarea punctului pe o curbă închisă, acest număr complex variază, astfel încît atunci cînd curba este parcursă complet, pătratul determinantului efectuează un anumit număr întreg de rotaţii în jurul originei coordonatelor în planul variabilei complexe, orientat de la 1 către i. Acest număr întreg este chiar indicele lui Maslov al curbei considerate.

Indicii curbelor închise apar în formulele asimptotice ale problemelor staţionare (de oscilaţii proprii). Să presupunem că curentul hamiltonian corespunzător potenţialului U lasă invariantă o varietate lagrangeană situată pe mulţimea de nivel constant al energiei $H = E$. Atunci ecuaţia

$$\frac{1}{2} \Delta \psi = \lambda^2 (U(q) - E) \psi$$

are un şir de valori proprii $\lambda_N \to \infty$ cu comportarea asimptotică $\lambda_N = \mu_N + 0(1/\mu_N)$ dacă, pentru orice contur închis γ pe varietatea lagrangeană, este îndeplinită relaţia (congruenţa)

$$\frac{2 \cdot \mu_N}{\pi} \oint_\gamma p \, dq = \operatorname{ind} \gamma \pmod 4.$$

În cazul unidimensional, varietatea lagrangeană este un cerc, indicele este egal cu 2 şi formula precedentă se transformă în aşa-numita *condiţie de cuantificare*

$$\mu_N \oint_\gamma p \, dq = 2\pi \left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Funcţiile proprii corespunzătoare acestor valori proprii sînt şi ele legate de varietatea lagrangeană, dar această legătură nu mai este atît de simplă. În realitate, se reuşeşte nu scrierea unor formule asimptotice pentru funcţiile proprii, ci numai formule pentru nişte funcţii care satisfac aproximativ ecuaţia funcţiilor proprii. Aceste funcţii se dovedesc a fi mici în exteriorul proiecţiei varietăţii lagrangeene pe spaţiul configuraţiilor. Formulele asimptotice prezintă singularităţi în vecinătatea causticilor care se formează prin proiecţie.

Funcţiile proprii adevărate pot însă să se comporte complet diferit, cel puţin dacă valoarea proprie corespunzătoare este multiplă sau dacă există alte valori proprii foarte apropiate de ea (vezi anexa 10).

ANEXA 12

SINGULARITĂŢILE LAGRANGEENE

Singularităţile lagrangeene nu sînt altceva decît punctele critice ale proiecţiei unei varietăţi lagrangeene pe spaţiul configuraţiilor. Acest tip de singularităţi apar în studiul global al soluţiilor ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi, în studiul casuticilor, al punctelor focale şi conjugate, în analiza propagării discontinuităţilor şi a undelor de şoc în mecanica mediilor continue şi în problemele care conduc la formule asimptotice pentru lungimi de undă mici (vezi anexa 11).

Pentru a descrie singularităţile lagrangeene, trebuie să spunem pentru început cîteva cuvinte despre singularităţile aplicaţiilor diferenţiabile în general. Vom începe cu exemplele cele mai simple.

A. Singularităţile aplicaţiilor netede ale unei suprafeţe în plan. Aplicaţia de proiecţie a sferei pe plan are ca singularităţi toate punctele de pe ecuatorul sferei (în punctele ecuatorului rangul scade cu o unitate). Ca rezultat, în planul proiecţiei se obţine o curbă (formată din valorile critice; aşa-numitul *contur vizibil*) care desparte domenii în care numărul punctelor din preimagine este diferit; fiecare punct din interiorul conturului vizibil are în preimagine două puncte, iar fiecare punct din exterior — numai unul.

În cazurile mai complicate «*conturul vizibil*» poate avea şi el nişte singularităţi mai complicate. De exemplu, să considerăm suprafaţa definită în spaţiul tridimensional cu coordonatele (x, y, z) de ecuaţia (fig. 245)

$$x = yz - z^3$$

şi aplicaţia de proiecţie a acestei suprafeţe în planul (x, y), paralel cu z.

Punctele singulare (critice) ale proiecției formează pe suprafață o curbă netedă (cu ecuația $3z^2 = y$). Imaginea acestei curbe în planul (x, y) nu mai este însă o curbă netedă. Această imagine este

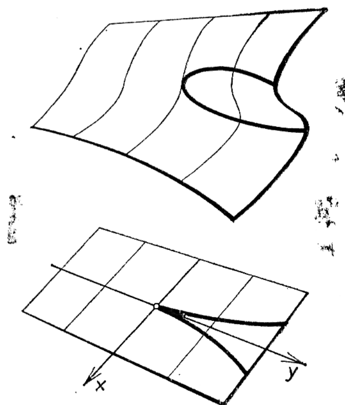


Fig. 245. Singularitatea lui Whitney.

o parabolă semicubică cu un unghi ascuțit în punctul (0, 0) și dată de ecuația

$$27\, x^2 = 4\, y^3.$$

O astfel de curbă împarte planul (x, y) în două părți: una mai mică (în interior) și cealaltă mai mare (în exterior). Deasupra fiecărui punct din partea mai mică se află cîte trei puncte ale suprafeței, în timp ce deasupra fiecărui punct din partea mai mare — doar unul.

Să considerăm acum o deformare mică arbitrară a suprafeței noastre. Se dovedește că proiectînd orice suprafață suficient de apropiată de suprafața noastră se obține un contur vizibil care are o singularitate asemănătoare (unghi semicubic) într-un punct apropiat de singularitatea conturului vizibil al surafeței inițiale. Cu alte cuvinte, *singularitatea considerată nu poate fi înlăturată prin deformări mici ale suprafeței.*

În plus, în loc de a deforma suprafața, se poate deforma în orice mod însăși aplicația suprafeței în plan (fără a ne mai îngriji ca ea să fie o proiecție), cu condiția ca aplicația să rămînă netedă și deformarea să fie mică. Se dovedește că și pentru astfel de deformări unghiul ascuțit nu dispare, ci numai se deformează puțin.

Exemplele date aici epuizează toate singularitățile tipice ale aplicațiilor de suprafețe în plan. Se poate demonstra că toate singularitățile mai complicate se pot elimina printr-o deformare mică. Prin urmare, deformînd puțin orice aplicație netedă se poate realiza ca, în vecinătatea oricărui punct al suprafeței pe care este ea definită, aplicația să fie sau nesingulară, sau structurată fie ca aplicația de proiecție a sferei în plan în apropierea ecuatorului, fie ca aplicația de proiecție a suprafeței considerate mai sus, cu unghi ascuțit cubic pe conturul vizibil.

Formularea „structurat ca" trebuie interpretată în modul următor: în suprafața preimagine și în planul imagine se pot alege coordonate locale (în vecinătatea punctului considerat și a preimaginii sale) astfel încît, în aceste coordonate, aplicația să se scrie într-o formă specială simplă, și anume formele normale la care se aduce o aplicație a unei suprafețe în plan, în vecinătatea punctelor de cele trei tipuri studiate mai sus, sînt

$y_1 = x_1, y_2 = x_2$ (punct nesingular),

$y_1 = x_1^2, y_2 = x_2$ (punct de tip „pliu", ca pe ecuatorul sferei)

$y_1 = x_1 x_2 - x_1^3, y_2 = x_2$ (punct „cuspidal", cu un unghi ascuțit al conturului vizibil).

Aici (x_1, x_2) sînt coordonate locale în preimagine, iar (y_1, y_2) — în imagine.

Demonstrațiile teoremelor enunțate (datorate lui H. Whitney) și ale generalizărilor lor în cazul dimensiunilor superioare pot fi găsite în lucrările dedicate teoriei singularităților aplicațiilor diferențiale, ca de exemplu:

V. I. Arnold, *Singularitățile aplicațiilor diferențiabile,* Uspehi Matem. Nauk, 23, *1* (1968), 3–44.
R. Thom, G. Levine, J. Mather și alții, în culegerea Singularitățile aplicațiilor diferențiabile, Mir, Moscova, 1968.

B. Singularitățile aplicațiilor de proiecție ale varietăților lagrangeene. Să considerăm o varietate a configurațiilor de dimensiune n, spațiul de faze corespunzător de dimensiune $2n$ și în acesta din urmă o subvarietate lagrangeană (o subvarietate de dimensiune n pe care se anulează 2-forma care definește structura simplectică a spațiului fazelor).

Proiectînd varietatea lagrangeană pe spațiul configurațiilor obținem o aplicație diferențiabilă a unei varietăți de dimensiune n într-o varietate de aceeași dimensiune.

Într-un punct generic nesingular, această aplicație este un difeomorfism local; există însă puncte ale varietății lagrangeene în care rangul diferențialei scade. Aceste puncte se numesc *singulare*. Proiectînd mulțimea punctelor singulare pe spațiul fazelor se obține „conturul vizibil" care în cazul lagrangean se numește *caustică*.

Causticile pot avea singularități complicate. Cu toate acestea, la fel ca în cazul teoriei obișnuite a singularităților, singularitățile prea complicate pot fi înlăturate printr-o deformare mică (este vorba de o deformare mică a varietății lagrangeene în spațiul fazelor, prin care varietatea rămîne lagrangeană).

După o astfel de deformare rămîn numai singularitățile cele mai simple, care nu pot fi înlăturate, pentru care se pot scrie forme normale și care se pot studia amănunțit odată pentru totdeauna. În considerarea problemelor generice, care nu admit proprietățile speciale de simetrie, este natural să ne așteptăm ca să apară numai aceste singularități simple și neeliminabile.

De exemplu, să considerăm causticile care se formează la iluminarea unui perete de către lumina emisă de o sursă punctiformă și reflectată de o suprafață netedă cu curbura arbitrară (în acest caz, spațiul de faze de dimensiune patru este format din dreptele care intersectează peretele sub toate unghiurile posibile, iar subvarietatea lagrangeană — din razele de lumină care ies din sursă, prin intersecția lor cu ecranul). Deplasînd sursa se poate observa că, în general, causticile au numai singularitățile de tipul cel mai simplu (unghiuri semicubice), iar singularitățile mai complicate apar numai pentru poziții speciale, excepționale, ale sursei.

Mai jos sînt enumerate formele normale ale singularităților aplicației de proiecție a unei subvarietăți lagrangeene de dimensiune n a spațiului de faze pe spațiul de configurații de dimensiune n, pentru $n \leqslant 5$. Aceste forme normale sînt în număr finit și clasificarea lor este legată (într-un mod destul de misterios) de clasificarea grupurilor Lie simple, de cele mai simple puncte critice nedegenerate ale funcțiilor, de poliedrele regulate și multe alte obiecte. Pentru $n \geqslant 6$, formele normale ale unor singularități lagrangeene trebuie să conțină inevitabil niște parametri. Pentru amănunte suplimentare, cititorului i se recomandă să citească articolul lui V. I. Arnold, *Formele normale ale funcțiilor în vecinătatea punctelor critice, grupurile lui Weyl A_k, D_k, E_k și singularitățile lagrangeene*, Funcționalnîi analiz i evo prilojenia, 6, *4* (1972), 3–25.

C. Tabelul formelor normale ale singularităților tipice de proiecție ale varietăților lagrangeene de dimensiune n $\leqslant$ 5. Vom utiliza următoarele notații:

$(q_1, \ldots, q_n)$ — coordonatele în spațiul configurațiilor;
$(p_1, \ldots, p_n)$ — impulsurile (canonic conjugate) corespunzătoare;
p și q formează împreună un sistem de coordonate simplectice în spațiul fazelor.

Vom defini varietatea lagrangeană (local) cu ajutorul funcției generatoare F, prin formulele

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad p_j = -\frac{\partial F}{\partial q_j},$$

unde indicele i parcurge o parte oarecare a mulțimii $(1, \ldots, n)$, iar indicele j — cealaltă parte. Și anume $i = 1, j > 1$ pentru singularitățile notate în listă cu A_k și $i = 1, 2, j > 2$ pentru singularitățile notate cu D_k și E_k.

Cu aceste notații, se poate considera că una și aceeași funcție $F(p_i, q_j)$ definește o varietate lagrangeană în spații de diferite dimensiuni: putem adăuga cîte argumente q_j vrem, dacă F nu depinde de fapt de ele.

Lista formelor normale ale singularităților tipice are acum următoarea formă:

pentru $n = 1$

$$A_1 : F = p_1^2; \qquad A_2 : F = \pm p_1^3;$$

Pentru $n = 2$, în afară de cele două forme precedente, și forma

$$A_3 : F = \pm p_1^4 + q_2 p_1^2;$$

pentru $n = 3$, în afară de cele trei forme precedente, și formele

$$A_4 : F = \pm p_1^5 + q_3 p_1^3 + q_2 p_1^2,$$

$$D_4 : F = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^3 + q_3 p_2^2;$$

pentru $n = 4$, în afară de cele cinci forme precedente și formele

$$A_5 : F = \pm p_1^6 + q_4 p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_2 p_1^2,$$

$$D_5 : F = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^4 + q_4 p_2^3 + q_3 p_2^2;$$

pentru $n = 5$, în afară de cele şapte forme precedente, şi formele

$$A_6 : F = \pm p_1^7 \pm q_5 p_1^5 + \ldots + q_2 p_1^2,$$

$$D_6 : F = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^5 + q_5 p_2^4 + q_4 p_2^3 + q_3 p_2^2,$$

$$E_6 : F = \pm p_1^3 \pm p_2^4 + q_5 p_1 p_2^2 + q_4 p_1 p_2 + q_3 p_2^2.$$

D. Discutarea formelor normale. Punctul de tip A_1 este nesingular.

Singularitatea de tip A_2 este o singularitate de tip pliu. Într-adevăr, dacă se iau drept coordonate pe varietatea lagrangeană $(p_1, q_2, \ldots, q_n)$, atunci aplicaţia de proiecţie se scrie ca

$$(p_1, q_2, \ldots, q_n) \to (\pm 3p_1^2, q_2, \ldots, q_n).$$

Singularitatea de tip A_3 este un punct cuspidal cu un unghi ascuţit semicubic pe conturul vizibil. Pentru a ne convinge de acest lucru, este suficient să scriem explicit aplicaţia corespunzătoare a varietăţii lagrangeene de dimensiune doi în plan:

$$(p_1, q_2) \to (\pm 4p_1^3 + 2q_2 p_1, q_2).$$

Singularitatea de tip A_4 apare pentru prima dată în cazul tridimensional şi caustica corespunzătoare reprezintă o suprafaţă în spaţiul tridimensional (fig. 246) cu o singularitate denumită „coadă de rîndunică" (ne-am mai întîlnit cu ea în § 46).

Caustica singularităţii D_4 în spaţiul de dimensiune patru reprezintă o suprafaţă cu patru muchii de întoarcere (de tip A_3) tangente într-un singur punct; două dintre aceste muchii pot fi imaginare, astfel încît există două variante ale causticii D_4.

E. Echivalenţa lagrangeană. Trebuie să precizăm în ce sens exemplele enumerate sînt formele normale ale singularităţilor tipice ale aplicaţiilor de proiecţie de varietăţi lagrangeene. În primul rînd vom defini singularităţile pe care le vom considera *« construite la fel »*.

Pentru comoditate, vom denumi aplicaţia de proiecţie a unei varietăţi lagrangeene pe spaţiul configuraţiilor — *aplicaţie lagrangeană*. Fie date două aplicaţii lagrangeene ale unor varietăţi de aceeaşi dimensiune n (varietăţile lagrangeene n-dimensionale corespunzătoare se află, în general, în spaţii de faze diferite care sînt

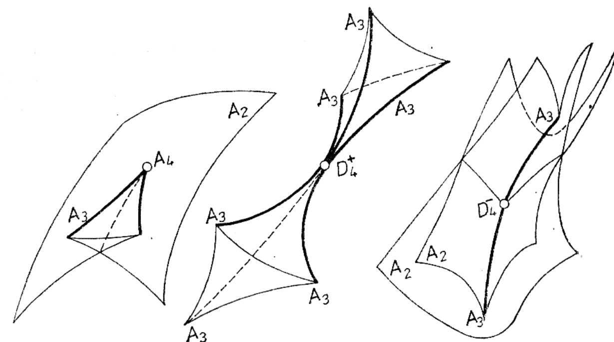


Fig. 246. Singularităţile tipice ale causticilor în spaţiul tridimensional.

fibrările cotangente la două spaţii de configuraţii diferite). Vom spune că cele două aplicaţii lagrangeene sînt *lagrangean echivalente* dacă există un difeomorfism simplectic al primului spaţiu de faze pe cel de-al doilea, care aplică fibrele primei fibrări cotangente pe fibrele celei de-a doua şi care transformă prima varietate lagrangeană în cea de-a doua. Un astfel de difeomorfism simplectic se numeşte *echivalenţă lagrangeană* de aplicaţii.

Să observăm că două aplicaţii lagrangeene care sînt lagrangean echivalente se transformă una în alta prin intermediul unor difeomorfisme în spaţiul-sursă şi în spaţiul ţintă (sau, cum se spune în analiză, se transformă una în alta prin schimbări de coordonate în spaţiul sursă şi în spaţiul-ţintă). Într-adevăr, difeomorfismul nostru simplectic, restrictat la varietatea lagrangeană defineşte un difeomorfism al spaţiului-sursă; difeomorfismul spaţiilor-ţintă de configuraţii apare datorită faptului că difeomorfismul simplectic iniţial transformă fibrele în fibre.

În particular, causticile a două aplicaţii lagrangean echivalente sînt difeomorfe şi deci clasificarea pînă la o echivalenţă lagrangeană a aplicaţiilor atrage după sine clasificarea causticilor. În general însă clasificarea pînă la o echivalenţă lagrangeană este mai fină decît clasificarea causticilor, deoarece atunci cînd causticile

sînt difeomorfe nu rezultă neapărat că aplicațiile sînt lagrangean echivalente. În plus, clasificarea pînă la o echivalență lagrangeană este mai fină și decît clasificarea pînă la difeomorfisme ale spațiilor-sursă și spațiilor țintă, deoarece nu orice pereche de astfel de difeomorfisme se obține dintr-un difeomorfism simplectic al spațiilor de faze.

O aplicație lagrangeană, considerată în vecinătatea unui punct ales, se numește *lagrangean echivalentă cu o altă aplicație lagrangeană* în acest punct (considerată și ea în vecinătatea unui punct ales) dacă există o echivalență lagrangeană a primei aplicații pe o vecinătate a punctului ales cu cea de-a doua, de asemenea pe o vecinătate a punctului ales, care transformă primul punct în cel de-al doilea.

Sîntem deci în măsură să formulăm teorema de clasificare a singularităților lagrangeene în dimensiune $n \leqslant 5$.

Fiecare varietate lagrangeană de dimensiune $n (n \leqslant 5)$ poate fi transformată printr-o deformare oricît de mică în clasa varietăților lagrangeene într-una pentru care aplicația de proiecție pe spațiul configurațiilor este lagrangean echivalentă în orice punct cu una din aplicațiile lagrangeene din lista de mai sus.

În particular, o varietate lagrangeană de dimensiune doi poate fi adusă în „poziție generală" printr-o deformare oricît de mică în clasa varietăților lagrangeene, astfel încît aplicația de proiecție pe spațiul de configurații (bidimensional) să nu aibă altfel de singularități decît pliuri (care se reduc, printr-o echivalență lagrangeană, la forma normală A_2) și puncte cuspidale (care se reduc, printr-o echivalență lagrangeană, la forma normală A_3).

Să observăm că teorema enunțată privind aplicațiile lagrangeene în dimensiune doi nu rezultă din teorema de clasificare pentru aplicații generale (care nu sînt lagrangeene). Aceasta, în primul rînd, deoarece aplicațiile lagrangeene formează o clasă destul de săracă printre toate aplicațiile netede și prin urmare pot avea (și chiar au, pentru $n > 2$) ca singularități tipice tipuri de singularități care pentru aplicațiile netede arbitrare nu sînt tipice. În al doilea rînd, din faptul că o aplicație se poate reduce la formă normală prin difeomorfisme ale spațiului-sursă și spațiului-țintă nu rezultă posibilitatea acestei reduceri cu ajutorul unei echivalențe lagrangeene.

Prin urmare, causticile unei varietăți lagrangeene bidimensionale generice pot avea ca singularități numai unghiuri semicubice (și puncte de autointersecție transversală). Toate singularitățile mai complicate dispar la o deformare mică a varietății lagrangeene, în timp ce punctele de întoarcere și punctele de autointersecție ale causticii nu se elimină printr-o deformare mică, ci numai se deformează puțin.

Formele normale ale singularităților A_4, D_4, ..., care urmează în tabel se pot utiliza în mod similar pentru a studia causticile varietăților lagrangeene cu un număr mai mare de dimensiuni și de asemenea, pentru a studia modificările causticilor cu un număr mai mic de dimensiuni la variația parametrilor de care depinde varietatea.

Formulele din această anexă își găsesc și alte aplicații, în teoria singularităților de tip Legendre (legendreene), deci a singularităților fronturilor de undă, a transformărilor Legendre, a înfășurătoarelor și anvelopelor convexe (vezi anexa 4, p. 451). Teoria singularităților lagrangeene și legendreene are aplicații evidente nu numai în optica geometrică și teoria asimptoticelor integralelor oscilante, ci și în calculul variațional, în teoria soluțiilor discontinue ale ecuațiilor neliniare, în problemele de optimizare, de trageri etc. R. Thom a propus pentru teoria singularităților, teoria bifurcațiilor și aplicațiile lor denumirea comună de *teoria catastrofelor*.

ANEXA 13

ECUAȚIA LUI KORTEWEG-DE VRIES

Nu toate integralele prime ale ecuațiilor mecanicii clasice se explică prin existența unei simetrii explicite a problemei (de exemplu, integralele prime specifice problemei lui Kepler, problemei geodezicelor pe un elipsoid ș. a.). În aceste cazuri se vorbește despre o „simetrie ascunsă".

Exemple interesante de astfel de simetrii ascunse sînt furnizate de ecuația lui Korteweg-de Vries

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}. \qquad (1)$$

Această ecuație neliniară cu derivate parțiale a apărut inițial în teoria canalelor de mică adîncime ; mai tîrziu s-a dovedit că această ecuație apare într-o serie de probleme ale fizicii matematice.

Ca rezultat al unei serii de experiențe numerice au fost descoperite niște proprietăți remarcabile ale soluțiilor acestei ecuații cu condiții la frontieră nule la infinit : pentru $t \to +\infty$ și $t \to -\infty$ aceste soluții se despart în „solitoni" — unde de o formă determinată care fug cu viteze diferite.

Pentru a obține expresia unui soliton care se deplasează cu viteza c, este suficient să căutăm soluția ecuației (1) sub forma unei funcții $u = \varphi(x - ct)$. Pentru φ se obține ecuația $\varphi'' = 3\varphi^2 + c\varphi + d$ (d — parametru). Aceasta este o ecuație de tip Newton cu potențial cubic. În planul fazelor (φ, φ') apare un punct șea. Separatoarea care pleacă din punctul șea și ajunge în punctul $\varphi = 0$, definește o soluție φ care tinde la 0 cînd $x \to \pm\infty$. Această soluție este solitonul.

În cazul cînd se ciocnesc mai mulți solitoni se observă o interacție neliniară destul de complicată. Experimentele numerice arată însă că dimensiunile și vitezele solitonilor nu se schimbă în urma ciocnirii. Această comportare a condus la ideea existenței

unor legi de conservare. Într-adevăr, Kruskal, Zabussky, Lax, Gardner, Green și Miura au reușit să găsească o serie de integrale prime ale ecuației lui Korteweg-de Vries. Aceste integrale prime sînt de forma $I_s = \int P_s(u, \ldots, u^{(s)})\, dx$, unde P_s sînt polinoame*). De exemplu, este ușor de verificat că primele integrale prime ale ecuației (1) sînt

$$I_{-1} = \int u\, dx,\quad I_0 = \int u^2\, dx,\quad I_1 = \int \left(u^3 + \frac{u'^2}{2}\right) dx,$$

$$I_2 = \int \left(\frac{5}{2}u^4 - \frac{5}{2}u^2u'' + \frac{1}{2}u''^2\right) dx.$$

Apariția unui șir infinit de integrale prime se explică ușor cu ajutorul următoarei teoreme a lui Lax**). Vom nota operatorul de înmulțire cu o funcție de variabila x cu semnul funcției respective, iar operatorul de derivare în raport cu x — cu ∂. Să considerăm operatorul lui Sturm-Liouville $L = -\partial^2 + u$, care depinde de funcția $u(x)$. Se verifică în mod direct următoarea

Teoremă. *Ecuația lui Korteweg-de Vries* (1) *este echivalentă cu ecuația (operatorială)* $\dot{L} = [L, A]$, *unde* $A = 4\,\partial^3 - 3(u\partial + \partial u)$.

Din această teoremă a lui Lax rezultă imediat următorul

Corolar. *Operatorii L, construiți cu ajutorul unei soluții a ecuației* (1), *sînt unitar echivalenți pentru orice t; în particular, fiecare valoarea proprie λ a problemei lui Sturm-Liouville $Lf = \lambda f$ cu condiții nule la infinit este o integrală primă a ecuației lui Korteweg-de Vries.*

V. F. Zaharov și L. D. Fadeev au observat că ecuația (1) este un sistem hamiltonian infinit dimensional complet integrabil și au construit variabilele acțiune-unghi corespunzătoare***). Structura

*) $u^{(s)} = \dfrac{\partial^s}{\partial x^s} u$. (*N. T.*)

**) P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math., *21* (1968), 467—490.

***) V. E. Zaharov, L. D. Fadeev, *Ecuația lui Korteweg-de Vries — sistem hamiltonian complet integrabil*, Funcționalnii analiz i evo prilojenia, 5, *4* (1971), 18—27.

simplectică pe spațiul funcțiilor care se anulează la infinit*) $u(x)$ este definită de produsul scalar antisimetric

$$\omega^2(\delta v, \delta w) = \frac{1}{2}\int (v \cdot \delta w - w \cdot \delta v)\,\mathrm{d}x,$$

hamiltonianul ecuației (1) fiind integrala I_1. Cu alte cuvinte, ecuația (1) se scrie ca ecuație Hamilton în spațiul funcțional al funcțiilor $u(x)$, $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta I_1}{\delta u}$ **).

Fiecare integrală I_s definește în același mod o „ecuație a lui Korteweg-de Vries de ordin superior" $\dot{u} = Q_s[u]$, unde $Q_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta I_s}{\mathrm{d}u}$ este un polinom în $u, u', \ldots, u^{(2s+1)}$. Integralele I_s sînt *în involuție* și curenții corespunzători din spațiul funcțional comută între ei.

Forma explicită a polinoamelor P_s și Q_s, cît și expresia variabilelor acțiune-unghi (și, prin urmare, a soluțiilor ecuației (1)) se descriu în termenii soluțiilor problemelor directă și inversă din teoria împrăștierii pe potențialul u.

Forma explicită a polinoamelor Q_s se poate obține și din următoarea teoremă a lui Gardner, care generalizează teorema lui Lax. Să considerăm în spațiul funcțiilor de variabila x, operatorul diferențial A de forma $A = \sum p_i \cdot \partial^{m-i}$, unde $p_0 = 1$ și ceilalți coeficienți p_i sînt polinoame în u și derivatele lui u în raport cu x. Se arată că *pentru orice s, există un astfel de operator A_s de ordinul $2s+1$ pentru care comutatorul său cu operatorul lui Sturm-Liouville L este un operator de înmulțire cu o funcție*: $[L, A_s] = Q_s$.

Operatorul A_s este univoc determinat de condițiile de mai sus modulo combinații liniare de operatori A_r cu $r < s$; prin urmare și polinoamele Q_s în u și derivatele lui u în raport cu x sînt definite modulo combinații liniare de polinoame Q_r cu $r < s$.

---

*) Împreună cu toate derivatele (în raport cu x). (*N. T.*)

**) Prin definiție, dacă $I[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(u, \ldots, u^{(s)})\,\mathrm{d}x$, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I[u + \varepsilon\,\delta u] - I[u]}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta I_1}{\delta u} \cdot \delta u\,\mathrm{d}x \cdot (N.T.)$$

V. E. Zaharov, A.B. Șabat, L.D. Fadeev și alți cercetători au studiat, utilizînd reprezentarea lui Lax și tehnicile problemei inverse a teoriei împrăștierii, o serie de ecuații importante pentru fizică, printre care și ecuațiile $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$, $i\psi_t + \psi_{xx} \pm \psi|\psi|^2 = 0$.

Studierea problemei determinării soluțiilor ecuației lui Korteweg-de Vries cu condiții la frontieră periodice l-a condus pe S. P. Novikov*) la descoperirea unei clase interesante de sisteme complet integrabile cu un număr finit de grade de libertate. Aceste sisteme se construiesc în modul următor.

Să considerăm o combinație liniară finită arbitrară de integrale prime $I = \sum c_i I_{n-i}$; fie $c_0 = 1$. Mulțimea punctelor staționare ale curentului cu hamiltonianul I în spațiul funcțional este invariantă în raport cu curenții cu hamiltonienii I_s și, în particular, în raport cu curentul ecuației (1).

Pe de altă parte, aceste puncte staționare se determină din ecuația $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta I}{\delta u} = 0$, sau $\frac{\delta I}{\delta u} = d$, $d = \text{const.}$) Ultima ecuație nu este altceva decît ecuația lui Euler-Lagrange pentru funcționala $I - dI_{-1}$, care conține derivata de ordinul n. Prin urmare, ea este de ordinul $2n$ și poate fi descrisă ca un sistem hamiltonian în spațiul euclidian de dimensiune $2n$.

Se dovedește că sistemul hamiltonian cu n grade de libertate astfel obținut are n integrale prime în involuție și poate fi integrat complet cu ajutorul unor coordonate acțiune-unghi adecvate. Se obține în acest fel o familie finit-dimensională de soluții particulare ale ecuației lui Korteweg-de Vries, care depinde de $3n+1$ parametri ($2n$ coordonate din spațiul fazelor și încă $n+1$ parametrii $c_1, \ldots, c_n, d$).

Așa cum a arătat Novikov, soluțiile găsite au proprietăți remarcabile: de exemplu, în problema periodică, ele dau funcții $u(x)$ pentru care ecuația diferențială liniară cu coeficienți periodici $-X'' + u(x)X = \lambda X$ are un număr finit de zone de rezonanță parametrică (vezi § 25) pe axa λ.

---

*) S. P. Novikov, *Problema periodică pentru ecuația Korteweg-de Vries*, I, Funcționalnîi analiz i evo prilojenia, 8, *3* (1974), 54—66.

Vezi și

B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, *Ecuații neliniare de tipul Korteweg-de Vries, operatorii liniari cu număr finit de zone și funcțiile abeliene*, Uspehi Mat. Nauk, XXXI, *1* (1976), 55—136.

H. P. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*, Inventiones Mathematicae, *30* (1975), 217—274.

INDICE DE NOŢIUNI

Redactor : MARIA BORICEAN

Tehnoredactor : CONSTANTIN IORDACHE

Coli de tipar : 35,75 Bun de tipar 15.V.1980



C. 1719 — I. P. INFORMAŢIA

Str. Brezoianu Nr. 23—25 BUCUREŞTI